

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

---

В. В. Колесников

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

## УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ

Текст лекций

Санкт-Петербург  
2006

УДК 621.3.072

ББК 31.211

К60

**Колесников, В. В.**

**К60 Основы теории цепей. Установившиеся режимы: текст лекций / В. В. Колесников; ГУАП.– СПб., 2006 – 101 с.: ил.**

Изложены теоретические основы расчета и анализа линейных электрических цепей в установившемся режиме работы при постоянном, гармоническом и негармоническом воздействиях традиционными методами с использованием топологических понятий цепей. Рассмотрены резонансные режимы работы в одиночных и связанных контурах. Даны понятия о цепях с взаимной индукцией.

Текст лекций предназначен для студентов заочного и вечернего факультетов по специальностям: «Радиотехника», «Системотехника» и «Приборостроение».

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теоретических основ электротехники  
Санкт-Петербургского электротехнического университета;  
кандидат технических наук, доцент *В. Е. Воробьев*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета  
в качестве текста лекций

Учебное издание

**Колесников Валерий Васильевич**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ  
УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ**

Текст лекций

Редактор *А. В. Семенчук*

Компьютерная верстка *И. С. Чернешева*

---

Сдано в набор 28.02.06. Подписано к печати 16.06.06. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,87. Усл. кр.-отт. 5,99. Уч. -изд. л. 6,2.  
Тираж 100 экз. Заказ № 304

---

Редакционно-издательский отдел  
Отдел электронных публикаций и библиографии библиотеки  
Отдел оперативной полиграфии  
ГУАП

190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

© ГОУ ВПО «СПбГУАП», 2006

© В. В. Колесников, 2006

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный текст лекций – часть общего курса по теоретическим основам электротехники, читаемого в Санкт-Петербургском государственном университете аэрокосмического приборостроения для студентов вечерней и заочной форм обучения. Подготовка студентов предполагает ознакомление с общими методами исследования электро- и радиотехнических цепей в различных режимах работы, с основными понятиями системного анализа и возможностью применения для расчета не электротехнических цепей, электротехнических моделей-аналогов. Текст лекций подготавливает студентов к углубленному изучению электромагнитных процессов в устройствах при постоянных и гармонических, а также импульсных возмущениях, рассматриваемых в последующих частях курса.

Даны основы анализа линейных цепей в установившемся режиме работы, возникающем при продолжительном постоянном, гармоническом и негармоническом воздействиях. В отличие от имеющейся в настоящее время учебной литературы рассматриваются системы уравнений по законам Кирхгофа, записанные как относительно токов, так и напряжений ветвей. Последнее позволяет на основе топологических понятий строго и обобщенно изложить методы анализа цепей и показать, что выбор рационального расчета и система неизвестных взаимно обусловлены.

Наряду с традиционными методами анализа цепей излагаются основные положения по анализу электрических цепей с управляемыми источниками.

Кроме того, представлены резонансные режимы работы в одиночных и связанных резонансных контурах. Подробно анализируется работа линейного трансформатора и автотрансформатора, даны основы анализа цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.

# 1. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

## 1.1. Основные понятия и величины электрической цепи

Курс теоретических основ электротехники (ТОЭ) состоит из следующих разделов:

Теории линейных электрических цепей.

Теории нелинейных электрических цепей.

Теории электромагнитного поля.

В начале курса будем рассматривать электрические цепи.

*Электрическая цепь* – совокупность электрорадиотехнических устройств, предназначенная для прохождения электрического тока.

Под понятием ток будем понимать как физическое явление (процесс переноса заряда), так и величину, например ток (сила тока)  $5\text{А}$ .

В ТОЭ изучаются не реально существующие электрические цепи, а их математические модели, составленные из идеализированных элементов. Различают пассивные и активные элементы цепи. *Пассивные элементы* цепи не содержат источников энергии, *активные* – содержат источники.

Пассивные элементы электрической цепи: сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$ , взаимдуктивность  $M$ .

Активные элементы электрической цепи: источник ЭДС  $E$  (напряжения  $u$ ) и источник тока  $J$ .

Электрические цепи можно разделить на двухполюсники (ДП), четырехполюсники и многополюсники:

*Двухполюсники* – сколь угодно сложная электрическая цепь, имеющая два зажима.

*Четырехполюсники* – сколь угодно сложная электрическая цепь, имеющая два входных зажима, к которым подводится напряжение источника, и два выходных зажима, к которым подсоединяется нагрузка (потребитель).

Если связь между напряжением и током двухполюсника – линейная, то данный ДП – линейный. Линейная электрическая цепь содержит линейные элементы (двухполюсники, четырехполюсники), параметры которых не зависят от времени.

Простейшие двухполюсники (элементы цепи): сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$ , а также независимые источники: ис-

точники ЭДС  $E$  (напряжения  $u$ ) и источники тока  $J$ . Четвертый, пассивный идеализированный элемент цепи – взаимоиנדуктивность  $M$  и зависимые источники напряжения и тока являются четырехплюсниками.

Нелинейные электрические цепи содержат нелинейные двухполюсники и многополюсники. В начале курса будем рассматривать линейные электрические цепи. Вспомним основные понятия и величины электрической цепи.

Как известно, величина тока  $i$  определяется количеством электричества  $dq$ , проходящего за промежуток времени  $dt$ , т.е.

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

В проводящей среде существует ток проводимости

$$i = i_{\text{пр}} = \int_S \mathbf{J}_{\text{пр}} d\mathbf{S}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{J}_{\text{пр}}$  – плотность тока проводимости, которая при удельной проводимости среды  $\gamma$  пропорциональна напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , т.е.  $\mathbf{J}_{\text{пр}} = \gamma\mathbf{E}$ .

В диэлектрике (изоляции) существует ток смещения

$$i = i_{\text{см}} = \int_S \mathbf{J}_{\text{см}} d\mathbf{S}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{J}_{\text{см}}$  – плотность тока смещения.

Плотность тока смещения определяется скоростью изменения вектора электрической индукции (смещения)  $\mathbf{D}$ , т.е.  $\mathbf{J}_{\text{см}} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ , где  $\mathbf{D} = \xi_a \mathbf{E}$ ;  $\xi_a = \xi_o \xi_r$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость;  $\xi_o = 8,85 \cdot 10^{-2} \text{ Ф/м}$  – диэлектрическая постоянная;  $\xi_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость;

Ток переноса  $i_{\text{пер}}$  возникает под действием электрического поля  $\mathbf{E}$  в свободном пространстве, заполненном зарядами с объемной плотностью  $\rho_Q$ , движущимися со скоростью  $\mathbf{v}$

$$i_{\text{пер}} = \int_S \mathbf{J}_{\text{пер}} d\mathbf{S}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{J}_{\text{пер}} = \rho_Q \mathbf{v}$  – плотность тока переноса.

Результирующий ток  $i$  через поверхность  $S$  определяется плотностью полного тока

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{см}} + \mathbf{J}_{\text{пр}} + \mathbf{J}_{\text{пер}}, \quad i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}. \quad (1.5)$$

Другими основными величинами, характеризующими процессы в электрической цепи, кроме тока, являются напряжение и электродвижущая сила (ЭДС).

Напряжение  $u_{12}$  представляет собой работу по перемещению единичного заряда между определенными точками 1 и 2 пространства и определяется выражением

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \mathbf{d}l. \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность поля, определяемая зарядами в рассматриваемой области.

Электродвижущая сила (ЭДС) создается сторонними силами, под которыми понимают неэлектростатические силы, действие которых на электроны проводимости в проводнике вызывает их упорядоченное движение и поддерживает ток в цепи. Сторонние силы, в отличие от кулоновских, не соединяют разноименные заряды, а вызывают их разъединение и поддерживают разность потенциалов на концах проводника. Сторонние силы вызывают неэлектростатическое электрическое поле  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ , обеспечивающее упорядоченное движение электрических зарядов. Суммарное действие электрического поля сторонних сил вдоль части контура  $L$  характеризуется ЭДС

$$e = \int_L \mathbf{E}_{\text{стор}} \mathbf{d}l, \quad (1.7)$$

которая создается источниками электрической энергии (гальваническими элементами, электрическими генераторами и т.п.).

Напряжение, ЭДС и ток как функции времени  $u(t)$ ,  $e(t)$  и  $i(t)$  имеют смысл только в том случае, если заданы положительные направления их отсчета на участках цепи, которые показаны на рис. 1.1 в виде двухполюсника ДП. Положительные направления обозначаются либо стрелкой с указанием величины (рис. 1.1, а), либо порядком расположения индексов (рис. 1.1, б и в),

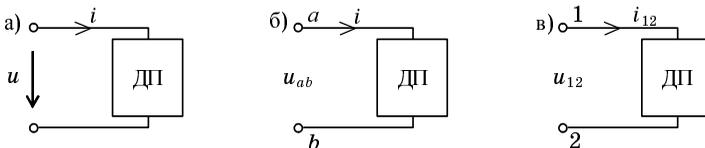


Рис. 1.1

обозначающим границы участка у той же величины и обычно выбираются произвольно. Так, если ток  $i$  в какой-либо момент времени

совпадает с выбранным положительным направлением, то  $i > 0$ , и, наоборот, если  $i < 0$ , то его направление не совпадает с направлением отсчета тока. В дальнейшем положительные направления называются направлениями тока, напряжения, ЭДС.

Как известно, идеализированных пассивных элементов электрической цепи четыре: сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$ , взаимдуктивность  $M$ . Все эти элементы необходимо учитывать в цепях переменного тока либо в переходных режимах работы. В начале курса будем рассматривать цепи постоянного тока, параметром которых является только сопротивление  $R$ .

## 1.2. Сопротивление $R$

Это такой идеализированный элемент, в котором энергия источника превращается в потери, т. е. идет на любой вид необратимого процесса.

Реальным элементом цепи, обладающим таким свойством, является резистор. Кроме этого, схемы замещения диодов, транзисторов, микросхем содержат одно или несколько сопротивлений, т.е. если при работе устройств происходит выделение тепла, то в схеме замещения таких устройств должно присутствовать сопротивление.

Условное обозначение  $R$  приведено на рис. 1.2.

В соответствии с законом Ома:

$$R = \frac{u}{i}, \text{ Ом.} \quad (1.8)$$

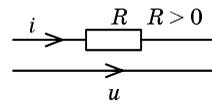


Рис. 1.2

Однако сопротивление не зависит ни от напряжения  $u$ , ни от тока  $i$ , а определяется удельным сопротивлением  $\rho$  материала, длиной  $l$  и сечением  $S$  проводника.

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (1.9)$$

Линейное сопротивление имеет линейную вольт-амперную (ВАХ) характеристику (рис. 1.3). Графически сопротивление можно найти в соответствии с выражением (1.10), зная  $\alpha$  – угол наклона ВАХ к оси абсцисс

$$R = \frac{M_u}{M_i} \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.10)$$

где  $M_u$  и  $M_i$  – масштаб напряжения  $u$  и тока  $i$ .

Величина, обратная сопротивлению, носит название проводимости.

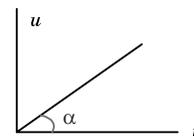


Рис. 1.3

$$G = \frac{1}{R}, \text{ См.} \quad (1.11)$$

где размерность проводимости См (сименс)  $= \frac{1}{\text{Ом}}$ .

В соответствии с законом Джоуля–Ленца мощность, выделяющаяся на сопротивлении в виде тепла, равна

$$P = i^2 R, \text{ Вт.} \quad (1.12)$$

При этом за время  $T$  на сопротивлении выделяется энергия

$$W = \int_0^T P dt = i^2 RT, \text{ Дж.} \quad (1.13)$$

### 1.3. Активные элементы электрической цепи

Активные элементы представляют собой источники энергии: гальванические элементы, аккумуляторы, солнечные батареи и т.д. Различают источники ЭДС (напряжения) и источники тока.

Источником ЭДС (напряжения) называется такой идеализированный источник, напряжение которого не зависит от тока во внешней цепи, т.е. ВАХ такого источника имеет вид (рис. 1.4), а условное изображение источника ЭДС приведено на рис. 1.5.

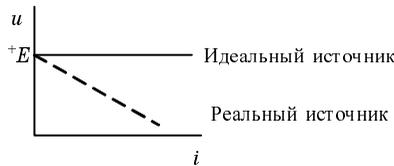


Рис. 1.4

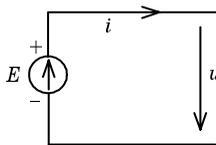


Рис. 1.5

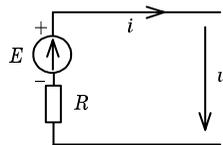


Рис. 1.6

На рис. 1.6. приведена схема реального источника напряжения ЭДС.

*Источник тока* – это такой идеализированный источник, ток которого не зависит от напряжения на внешних зажимах; ВАХ источника

тока приведена на рис.1.7, а условное изображение – на рис.1.8.

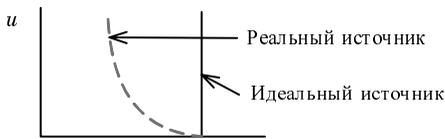


Рис. 1.7

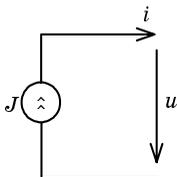


Рис. 1.8

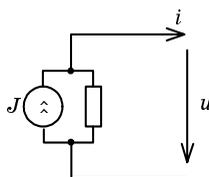


Рис. 1.9

На рис.1.9. приведена схема реального источника тока. Вопрос о том, куда отнести реальный источник: к источнику ЭДС или к источнику тока решается в зависимости от соотношения внутреннего сопротивления источника и нагрузки. Если сопротивление нагрузки много больше внутреннего сопротивления, то такой источник имеет характеристики источника ЭДС, если наоборот (много меньше), то источника тока. Однако схемы реального источника ЭДС (рис.1.6) и реального источника тока (рис.1.9) эквивалентны друг другу, т.е. одна схема может быть преобразована в другую.

Рассмотренные источники относятся к независимым (неуправляемым) источникам. Рассмотрим теперь зависимые (управляемые источники).

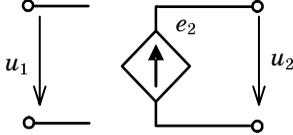
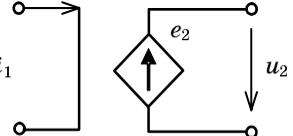
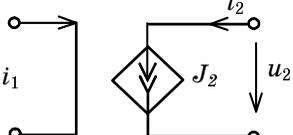
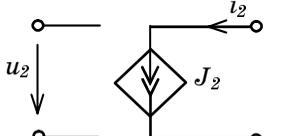
Зависимый источник представляет собой идеализированный четырехполюсник с входной и выходной ветвями. Источники тока и напряжения выходной ветви являются зависимыми от управляющих входных величин тока или напряжения. Различают четыре типа зависимых источников.

*Зависимый источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН).* Управляемой величиной является напряжение  $u_1$ , приложенное к входной ветви. Выходная ветвь содержит источник напряжения, величина которого  $u_2$  пропорциональна напряжению на входе. Коэффициент пропорциональности  $\alpha_u = u_1 / u_2$  – коэффициент передачи по напряжению (табл. 1.1).

*Зависимый источник напряжения, управляемый током (ИНУТ).* Управляющей величиной является ток  $i_1$  входной ветви. Выходная ветвь

содержит источник напряжения, величина которого  $u_2$  пропорциональна  $i_1$ . Коэффициент пропорциональности  $\alpha_Z = u_2/i_1$  – передаточное сопротивление (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Тип источника	Схемы	Уравнение элемента
Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН)		$e_2 = u_2 = \alpha_u u_1$
Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ)		$e_2 = u_2 = \alpha_i i_1$
Источник тока, управляемый током (ИТУТ)		$J_2 = i_2 = \alpha_i i_1$
Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН)		$J_2 = i_2 = \alpha_u u_1$

*Зависимый источник тока, управляемый током (ИТУТ).* Управляющей величиной является ток  $i_1$  входной ветви. Выходная ветвь содержит источник тока, ток которого  $J_2$  пропорционален  $i_1$ . Коэффициент  $\alpha_i = J_2/i_1$  – коэффициент передачи по току (табл. 1.1).

*Зависимый источник тока, управляемый напряжением (ИТУН).* Управляющей величиной является напряжение  $u_1$  входной ветви. Выходная ветвь содержит источник тока, ток которого  $J_2$ , пропорционален входному напряжению  $u_1$ . Коэффициент  $\alpha_u = J_2/u_1$  – передаточная проводимость (табл. 1.1).

Зависимые источники позволяют строить схемы замещения электронных цепей. В качестве примера на рис. 1.10,а приведена транзисторная схема с общей базой. Моделирующая эту схему на низкой частоте цепь (рис.1.10,б) содержит три сопротивления, величины

которых определяются  $p-n-p$ -переходами, и зависимый источник ИТУТ, величина тока которого пропорциональна току эмиттера  $J = \alpha_i i_1$ . Идеальный операционный усилитель представляет ИНУН с бесконечно большим коэффициентом усиления, бесконечным входным и нулевым выходным сопротивлениями.

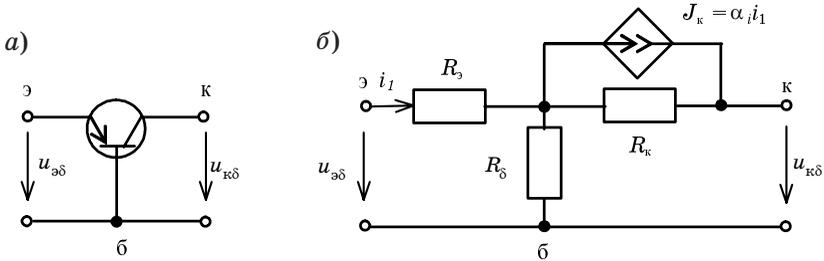


Рис. 1.10

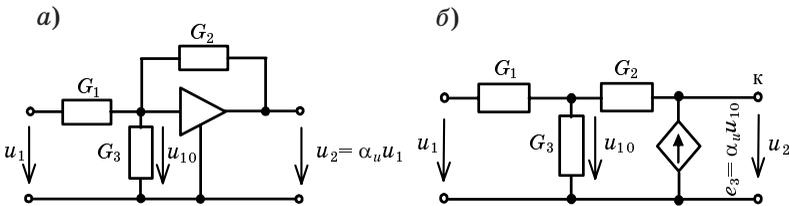


Рис. 1.11

Схему с операционным усилителем, охваченным обратной связью (рис. 1.11,а) можно представить в виде цепи с зависимым источником ИНУН. Напряжение этого источника  $u_2$  пропорционально  $u_{10}$  (рис.1.11,б).

#### 1.4. Основные топологические понятия. Законы Кирхгофа

*Электрической схемой* называется графическое изображение электрической цепи. На рис.1.12 приведена электрическая схема для некоторой цепи. Элементы схемы: ветви, узлы, контуры.

*Ветвь* – это двухполюсник (участок цепи), ток либо напряжение которого принимается за неизвестную величину. Для данной схемы число ветвей  $p = 6$ . Номера ветвей условимся обозначать арабскими цифрами, при этом индексы элементов ветви соответствуют ее номеру, например, в ветви 1 сопротивления  $R_1$  и источник ЭДС  $E_1$ .

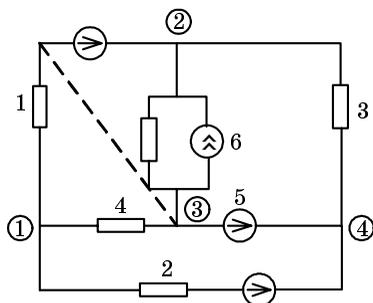


Рис. 1.12

*Узел* – точка соединения двух и более ветвей. Например, в ветви 1 точка соединения сопротивления  $R_1$  и источника ЭДС  $E_1$ . Если соединяются две ветви, то это – устранимый узел, если три ветви и более, то – неустранимый. Условимся узлы обозначать цифрами в кружочках (см. рис. 1.12). Для нашей схемы число узлов  $q = 4$ .

*Контуром* называется любой замкнутый путь в электрической цепи. Контур может быть реально существующим и мысленным (одна или две ветви замыкаются по воздуху). Например, ветви 2, 4, 5 образуют контур. Мысленный контур: ветвь 4, мысленная ветвь между узлом 3 и точкой соединения  $R_1$  и  $E_1$ , а также ветвь с  $R_1$ .

При составлении уравнений удобно пользоваться понятием графа электрической цепи.

*Графом* электрической цепи называется такое графическое изображение цепи, когда сохранены все узлы, а ветви заменены линиями, т. е. граф-основа, скелет схемы. На рис. 1.13 показан граф для данной цепи.

*Дерево* – совокупность ветвей графа, соединяющая узлы без образования контуров. Ветви графа, не вошедшие в дерево, – *ветви связи* (*хорды*). На рис. 1.14 они обозначены пунктирными линиями.

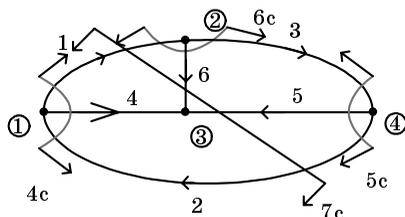


Рис. 1.13

На рис. 1.14 и 1.15 приведены два возможных дерева графа.

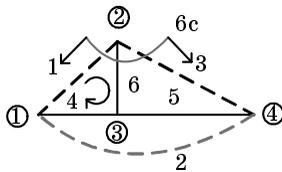


Рис. 1.14

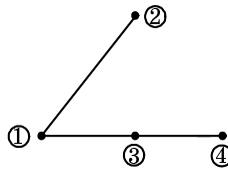


Рис. 1.15

Если ветви дерева исходят из одной вершины, то это лагранжево дерево. Им удобно пользоваться для определения независимых контуров, для которых составляются уравнения по закону напряжений Кирхгофа.

Совокупность ветвей электрической цепи (графа), пересекаемых замкнутой поверхностью, носит название *сечения*. За направление сечения принимается направление нормали к поверхности. Обычно указывается не вся поверхность, а только ее часть, т.е. след сечения, как это выполнено на рис. 1.13 и 1.14. Сечение, содержащее только одну ветвь дерева – *главное сечение* (см. рис. 1.14). Номер главного сечения соответствует номеру ветви дерева.

При добавлении к ветвям дерева одной ветви связи получается контур (замкнутый путь), причем он независимый, так как отличается от другого контура наличием новой ветви. Например, контур 1 образуется при добавлении ветви 1 связи к ветвям 6 и 4 дерева графа (см. рис. 1.14).

Рассмотрим теперь законы Кирхгофа: закон токов Кирхгофа и закон напряжений Кирхгофа.

*Закон токов Кирхгофа (ЗТК)* гласит: алгебраическая сумма токов в узле (сечении) электрической цепи равна нулю. Математически выражается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.14)$$

**Правило знаков:** ток, выходящий из узла (совпадающий по направлению с направлением сечения), берется со знаком «+», в противном случае – с минусом.

Если не пользоваться топологическими понятиями, то возможно и противоположное, т.е. для тока, входящего в узел знак «+», а для выходящего «-», т.е. токи, имеющие разное направление относительно узла, должны иметь разные знаки.

Например, для некоторого узла электрической цепи, изображенной на рис. 1.16, имеем по ЗТК:  $i_3 + i_2 - i_1 = 0$ .

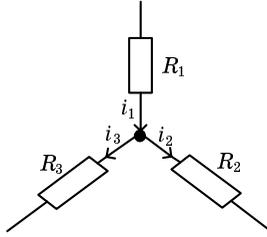


Рис. 1.16

Для сечения 7 ЗТК (см. рис. 1.13) выражается  $i_2 + i_5 + i_6 - i_1 = 0$ .

*Закон напряжений Кирхгофа* (ЗНК) формулируется: алгебраическая сумма напряжений в контуре равна нулю. Математически записывается в виде

$$\sum_{k=1}^m u_k = 0. \quad (1.15)$$

Если выделяются источники ЭДС  $E$  и источники тока  $J$  из напряжений ветвей, то ЗНК читается следующим образом: алгебраическая сумма падений напряжений в контуре равняется алгебраической сумме источников ЭДС и напряжений преобразованных источников тока, действующих в данном контуре

$$\sum_{k=1}^m i_k R_k = \sum_{i=1}^{m_1} E_i + \sum_{i=1}^{m_2} J_i R_i, \quad (1.16)$$

где  $i_k R_k = u_k$  – падение напряжения на сопротивлении  $k$ -й ветви.

Правило знаков для ЗНК определяется в соответствии с положительным направлением обхода контура, которое совпадает с направлением ветвей связи, либо выбирается произвольно (если не пользуются графом цепи). Если направление обхода контура совпадает с направлением напряжения, то знак «+».

Если направление источника ЭДС и тока совпадают с направлением обхода контура, то «+» (когда источники записаны в правой части уравнения).

Для цепи, изображенной на рис. 1.17, имеем по ЗНК

$$u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0.$$

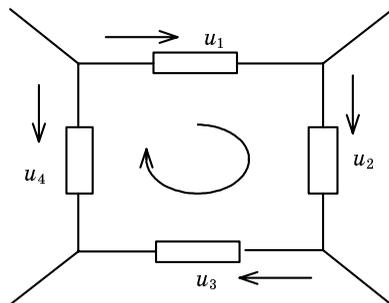


Рис.1.17

### 1.5. Понятие эквивалентности электрических цепей

Одна электрическая цепь может быть преобразована к другой, эквивалентной, при этом токи и напряжения на тех участках цепи, которые не подвергались преобразованию, должны остаться неизменными. Часто при анализе электрических цепей рассчитываемая цепь приводится на основе принципа эквивалентности к более простой цепи, что позволяет облегчить расчет цепи. Рассмотрим использование принципа эквивалентности на примере обобщенной ветви.

### 1.6. Обобщенная ветвь и ее уравнение. Законы Кирхгофа для токов и напряжений ветвей

При анализе электрических цепей стремятся, чтобы число неизвестных, т.е. токов либо напряжений ветвей было бы минимальным. При этом является эффективным объединять пассивные и активные элементы в виде активного двухполюсника, который характеризуется током  $i$  и напряжением  $u$  (рис. 1.18, а). Такой двухполюсник называется обобщенной ветвью. При этом схемы, изображенные на рис. 1.18, б, в, г, д в соответствии с принципом эквивалентности, являются эквивалентными, так как ток  $i$  и напряжение  $u$  у них не меняются.

Получим уравнения, связывающие ток  $I$  и напряжение  $u$  в обобщенной ветви. Для схемы рис. 1.18, б имеем

$$\text{ЗТК: } i - i' + J = 0, \quad (1.17)$$

$$i' = i + J; \quad (1.18)$$

$$\text{ЗНК: } u - i'R = -E. \quad (1.19)$$

Подставляя выражение (1.18) в (1.19), получим  $u - (i+J)R = -E$  или окончательно

$$u = iR + JR - E. \quad (1.20)$$

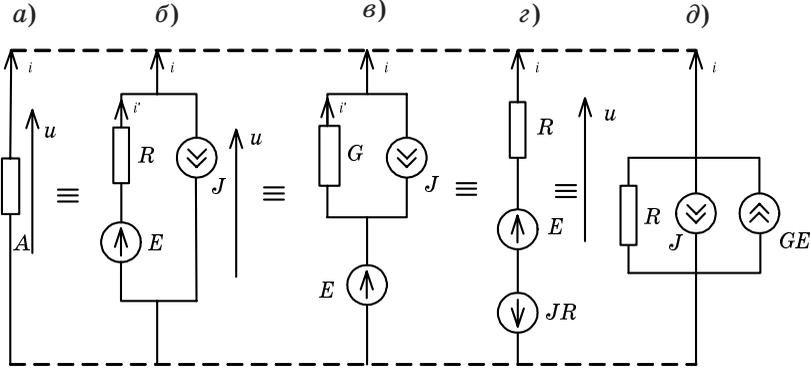


Рис.1.18

Выражение (1.20) определяет напряжение ветви  $u$  через ток  $J$ . Выразим из (1.19) ток

$$i' = \frac{u + E}{R} = i + J = Gu + GE$$

и найдем ток ветви через напряжение ветви

$$i = Gu + GE - J. \quad (1.21)$$

На основе полученных выражений (1.20) и (1.21) законы Кирхгофа можно записать в двух формах: в форме токов и в форме напряжений. Если принимаются за неизвестные напряжения ветвей, то в соответствии с (1.21), имеем законы Кирхгофа в форме напряжений ветвей в виде

$$\text{ЗТК: } \sum_{k=1}^n G_k u_k = \sum_{k=1}^n G_k E_k + \sum_{k=1}^n J_k, \quad (1.22)$$

$$\text{ЗНК: } \sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (1.23)$$

В этом случае ЗТК читается следующим образом: алгебраическая сумма произведений проводимости  $k$ -й ветви  $G_k$  на напряжение этой ветви  $u_k$  равна алгебраической сумме источников тока  $J_k$  и токов, преобразованных источником ЭДС. Правило знаков: если направление напряжения ветви  $k$  от узла, то знак у произведения  $u_k G_k$  — «+», а у токов источников, записанных в правой части и выходящих из

узла (сечения), знаки «-».

Если в качестве неизвестных принимаются токи ветвей, то имеем законы Кирхгофа в форме токов ветвей в виде

$$\text{ЗТК: } \sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (1.24)$$

$$\text{ЗНК: } \sum_{k=1}^m i_k R_k = \sum_{i=1}^{m_1} E_i + \sum_{i=1}^{m_2} J_i R_i. \quad (1.25)$$

В соответствии с выражениями (1.20), (1.21) следуют следующие формулы для перехода от реального источника ЭДС к реальному источнику тока, и наоборот (см. рис. 1.6 и 1.9):

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{R}; \quad J = \frac{E}{R}, \\ R &= \frac{1}{G}; \quad E = JR. \end{aligned} \quad (1.26)$$

### 1.7. Анализ сложных цепей по законам Кирхгофа

При анализе сложных цепей являются неизвестными либо напряжения, либо токи ветвей.

Пусть схема содержит  $p$  – число ветвей,  $q$  – число узлов. Как известно из математики, число неизвестных должно равняться числу уравнений. В этом случае система уравнений имеет единственное решение, поэтому по законам Кирхгофа для анализа сложной цепи необходимо составить  $p$  уравнений.

По ЗТК можно составить  $(q-1)$ -уравнение, так как  $(q-e)$ -уравнение – линейная комбинация предыдущих уравнений. Следовательно, по ЗНК необходимо составить недостающее до  $p$  число уравнений

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{ЗНК}} &= q - 1 \\ N_{\text{ЗНК}} &= p - q + 1 \end{aligned} \right\} p \text{ - уравнений.}$$

Следовательно, система уравнений имеет единственное решение.

Если пользоваться топологическими понятиями, то число ветвей дерева равно числу уравнений по ЗТК, т. е.  $q-1$ , а число ветвей связей определяет число уравнений по ЗНК,  $p-q+1$ .

Уравнения по ЗТК необходимо составлять для главных сечений

$$N_{\text{г.с}} = N_{\text{ЗНК}} = q - 1.$$

Главное сечение – сечение, которое содержит только одну ветвь дерева, остальные – ветви связи.

Уравнения по ЗНК составляют для главных контуров. Главный контур содержит только одну ветвь связи, остальные ветви – ветви дерева, поэтому число уравнений по ЗНК определяется числом ветвей связей.

$$N_{\text{в.св}} = N_{\text{ЗНК}} = p - q + 1.$$

### Пример

Для цепи, изображенной на рис. 1.12, составить уравнения по законам Кирхгофа.

Составляем граф цепи (рис. 1.13). Граф является направленным, если указано направление напряжения или тока, в противном случае граф – ненаправленный. Направление ветви связи при составлении уравнений по ЗНК выбирают за направление обхода контура, поэтому направление обхода контура может не обозначаться. Главный контур – контур, содержащий одну ветвь связи, остальные – ветви дерева. Итак, для цепи, изображенной на рис. 1.12 и имеющей число ветвей  $p = 6$ , число узлов  $q = 4$ , необходимо составить число уравнений

$$N_{\text{ЗНК}} = q - 1 = 4 - 1 = 3,$$

$$N_{\text{ЗНК}} = p - q + 1 = 6 - 3 + 1 = 3.$$

Если в качестве независимых переменных взять токи ветвей, то уравнения в соответствии с (1.24) и (1.25) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -i_1 + i_6 + i_3 = 0, \\ i_4 + i_1 - i_2 = 0, \\ i_5 - i_3 + i_2 = 0, \\ i_1 R_1 + i_6 R_6 - i_4 R_4 = E_1 - J_6 R_6, \\ i_2 R_2 + i_4 R_4 = -E_2 + E_5, \\ i_3 R_3 - i_6 R_6 + i_3 R_3 = -E_5 + J_6 R_6. \end{array} \right.$$

Если в качестве независимых переменных выбрать напряжения ветвей, то в соответствии с (1.22) и (1.23) уравнения запишутся

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 G_1 + u_4 G_4 - u_2 G_2 = -E_1 G_1 - E_2 G_2, \\ -u_1 G_1 + u_6 G_6 + u_3 G_3 = E_1 G_1 + J_6, \\ u_5 = E_5, \\ u_1 + u_6 - u_4 = 0, \\ u_2 + u_4 - u_5 = 0, \\ u_3 + u_5 - u_6 = 0. \end{array} \right.$$

*Примечание.* Сечение 5 (см. рис. 1.13) имеет топологически выродившуюся ветвь (источник ЭДС  $E_5$  без сопротивления,  $R_5 = 0$ ), по-

этому  $G_5 = \infty$ . Если составить уравнения по ЗТК по общему правилу и раскрыть неопределенность, то получим  $u_5 = E_5$ .

В самом деле

$$-u_3 G_3 + u_5 G_5 + u_2 G_2 = E_5 G_5 + E_1 G_1.$$

Разделим левую и правую части на  $G_5$  и учтем, что  $G_5 \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$\lim_{G_5 \rightarrow \infty} \left( -\frac{u_3 G_3}{G_5} + u_5 + u_2 \frac{G_2}{G_5} \right) = E_5 + \lim_{G_5 \rightarrow \infty} E_1 \frac{G_1}{G_5},$$

т.е.  $u_5 = E_5$ .

Для топологически вырожденной ветви (например, ветви 5) не обязательно составлять выражение по общему правилу, а затем раскрывать неопределенность. Если воспользоваться ЗНК, то  $u_5 = E_5$ , и сразу будет найдено напряжение ветви.

Анализ цепей по законам Кирхгофа вызывает математические трудности, связанные с решением системы из  $p$  уравнений, поэтому предложены методы расчета цепей, которые позволяют обойти эти математические трудности:

- 1) *метод токов связей (МТС)*,
- 2) *метод напряжений дерева (МНД)*,
- 3) *метод узловых напряжений (МУН)*.

Идея всех методов: уменьшить число неизвестных путем исключения некоторых из них либо введения новых неизвестных, число которых меньше; для оставшихся (новых) неизвестных составляются уравнения по определенному закону, решаются, а затем возвращаются к старым неизвестным.

### 1.8. Метод токов связи. Метод контурных токов

В качестве неизвестных  $p$ -токов ветвей оставляют только  $p-q+1$  токов ветвей связи. Токи ветвей дерева через ЗТК для главных сечений выражают через токи ветвей связей. Например, для цепи рис. 1.12

$$i_6 = i_1 - i_3, \quad i_4 = i_2 - i_1, \quad i_5 = i_3 - i_2.$$

Затем выражения для токов ветвей дерева через токи ветвей связи подставляют в ЗНК в форме токов и группируют слагаемые с одинаковыми токами связи. Получим

$$\begin{cases} i_1(R_1 + R_6 + R_4) - i_2 R_2 - i_3 R_6 = E_1 - J_6 R_6, \\ i_2(R_2 + R_4) - i_1 R_4 = -E_2 + E_5, \\ i_3(R_3 + R_5 + R_6) - i_1 R_6 = -E_5 + J_6 R_6. \end{cases}$$

Полученная система уравнений позволяет сформулировать алгоритм составления уравнений по методу токов связей, в соответствии с которым для  $k$ -го контура имеем

$$i_k R_{kk} \pm \sum i_{km} R_{km} = \sum_{k=1}^n E_k - \sum J_k R_k, \quad (1.27)$$

где  $R_{kk}$  – собственное сопротивление  $k$ -го контура, т.е. алгебраическая сумма сопротивлений, составляющих  $k$ -й контур;  $R_{km}$  – сопротивление общей ветви (ветвей дерева) для  $k$ -го и  $m$ -го контура;  $i_{km}$  – ток связи  $m$ -го контура.

Знак произведения  $i_{km} R_{km}$  «-», если направление обходов  $k$ -го и  $m$ -го контуров на этом сопротивлении противоположно.

При составлении уравнений по методу токов связи необходимо обращать внимание на топологически вырожденные ветви, т.е. ветви, содержащие идеальные источники тока (параллельно с источником отсутствует проводимость, сопротивление). В этом случае при составлении графа такие ветви должны быть ветвями связи. При этом уравнения по общему алгоритму не составляются, так как по определению источника тока ток ветви равен току источника тока, т.е. ток связи будет равен току источника, и уравнения по МТС вырождаются в тождество. Например, если бы в схеме на рис. 1.12 вместо  $R_1$  и  $E_1$  в первой ветви был бы источник тока  $J_1$ , имеющий направление, противоположное  $E_1$ , то тогда ток связи  $i_1 = -J_1$  (направления тока и источника – разные, поэтому появляется знак минус).

Таким образом, метод токов связей – это иначе записанные законы напряжения Кирхгофа, когда падения напряжений выражаются только через токи ветвей связей.

В методе контурных токов уравнения составляются по адекватному алгоритму для другой системы независимых контуров, которые образуют на графе самостоятельные ячейки.

### 1.9. Метод напряжений дерева

В этом случае в качестве неизвестных  $p$ -напряжений ветвей оставляют  $(q-1)$ -напряжения ветвей дерева, а напряжения ветвей связей через ЗНК для главных контуров выражают через напряжения ветвей дерева.

Затем полученные выражения подставляют в ЗТК в форме напряжений, группируют слагаемые при одинаковых напряжениях ветвей дерева и получают уравнения следующего вида:

$$u_k G_{kk} \pm \sum u_m G_{km} = \sum J_i - \sum E_i G_i, \quad (1.28)$$

где  $u_k$  – напряжение  $k$ -й ветви дерева;  $G_{kk}$  – собственная проводимость  $k$ -го сечения, т.е. сумма проводимостей ветвей, составляющих сечение  $k$ ;  $u_m$  – напряжение  $m$ -й ветви дерева;  $G_{km}$  – взаимная проводимость  $k$ -го и  $m$ -го сечений, т.е. проводимость ветви, общая для  $k$ -го и  $m$ -го сечений.

Произведение  $u_m G_{km}$  со знаком «-», если направления сечений на общих ветвях не совпадают по направлению. В правой части записывается алгебраическая сумма источников тока  $\sum J_i$  и преобразованных источников ЭДС  $\sum E_i G_i$ . Знак у источников «-», если их направления совпадают с направлением  $k$ -го сечения. Например, уравнения для цепи на рис. 1.12. по методу напряжений дерева (МНД) имеют вид

$$\begin{cases} u_4(G_1 + G_2 + G_4) - u_5 G_2 - u_6 G_1 = -E_1 G_1 - E_2 G_2, \\ u_5 = E_5, \\ u_6(G_1 + G_3 + G_6) - u_4 G_1 - u_5 G_3 = J_6 + E_1 G_1. \end{cases}$$

При составлении уравнений необходимо обращать внимание на топологически вырожденные ветви, содержащие источники ЭДС. В этом случае по ЗНК напряжение такой ветви равно ЭДС с тем или иным знаком (если по направлению обхода контура совпадают их направления, то со знаком плюс и уравнения по общему алгоритму не составляют (уравнение вырождается в тождество).

Таким образом, уравнения по методу напряжений дерева – это иначе записанные уравнения по ЗТК. Проверка решения выполняется по ЗТК.

### 1.10. Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений (МУН) – это видоизмененный метод напряжений дерева, если все ветви дерева выходят из одной вершины, потенциал которой принимается за нулевой, и определяются напряжения оставшихся узлов относительно этого опорного (базисного) узла. Эти узловые напряжения равны напряжениям ветвей дерева при совпадении направлений со знаком плюс либо со знаком минус в противном случае.

В соответствии с вышесказанным для  $k$ -го узла можно записать

$$u_{k0} G_{kk} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n u_m G_{km} = \sum J_k - \sum E_k G_k, \quad (1.29)$$

где  $u_{k0}$ ;  $u_{m0}$  – узловые напряжения  $k$ -го и  $m$ -го узлов соответственно;  $G_{kk}$  – собственная проводимость  $k$ -го узла, т.е. сумма проводимостей ветвей, сходящихся к  $k$ -му узлу;  $G_{km}$  – взаимная проводимость  $k$ -го и  $m$ -го узлов (проводимость ветви, общей для  $k$ -го и  $m$ -го узлов);

$\sum J_k$ ;  $\sum E_k G_k$  – сумма источников тока и преобразованных источников ЭДС со знаком плюс, если направление источника – к узлу, в противном случае – минус.

Если в цепи имеется топологически вырожденная ветвь, то за опорный узел выбирается узел, принадлежащий ветви с идеальным источником ЭДС. При этом узловое напряжение оставшегося узла этой ветви относительно опорного равно значению ЭДС с тем или иным знаком.

Для цепи на рис. 1.12 за опорный узел необходимо взять узлы 3 или 4. Выбираем за опорный узел 3. Система уравнений по методу узловых напряжений имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{10} \left( \frac{G_1 + G_2 + G_4}{G_{11}} \right) - u_{20} \frac{G_1}{G_{12}} - u_{40} \frac{G_2}{G_{14}} = -E_2 G_2 - E_1 G_1, \\ u_{40} = E_5, \\ u_{20} \left( \frac{G_1 + G_3 + G_6}{G_{22}} \right) - u_{40} G_3 - u_{10} G_1 = E_1 G_1 + J_6. \end{array} \right.$$

Нетрудно видеть из сравнения систем уравнений МНД и МУН, что узловые напряжения связаны с напряжениями дерева следующими выражениями:  $u_{10} = u_4$ ;  $u_{20} = u_6$ ;  $u_{40} = u_5$ .

Таким образом, уравнения по методу узловых напряжений – это иначе записанные уравнения по ЗТК. Проверка решения выполняется по ЗТК.

В случае, когда необходимо рассчитать ток (напряжение) одной ветви используют метод эквивалентного источника напряжения (эквивалентного генератора), либо источника тока.

При анализе электрической цепи рациональность использования того или иного метода определяется числом уравнений, необходимых для расчета цепи.

### 1.11. Уравнения цепей с зависимыми источниками

Анализ цепей с зависимыми источниками можно проводить всеми известными методами теории цепей.

Приведем методику составления уравнения электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники, управляемые током или напряжением какой-либо невырожденной ветви. Для таких цепей источники, управляемые напряжением, можно преобразовать в источники, управляемые током и наоборот.

При составлении основной системы уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники напряжения или тока рассматриваемого типа, последние учитываются наряду с независимыми источниками в составленных по законам Кирхгофа уравнениях. Затем токи и ЭДС зависимых источников выражают через соответствующие управляющие воздействия. При составлении уравнений по методу токов ветвей токи и ЭДС управляемых источников должны быть выражены через неизвестные токи ветвей, а при формировании таких уравнений по методу напряжений ветвей – через неизвестные напряжения ветвей.

Методом токов связей (контурных токов) можно построить систему уравнений цепи, содержащей зависимые источники других типов, и они должны быть преобразованы в источники, управляемые током. При составлении контурных уравнений такие источники учитываются наравне с независимыми источниками, а затем переносятся в левую часть уравнений и выражаются через соответствующие токи связи (контурные токи).

Методом узловых напряжений можно составить систему уравнений цепей, содержащих управляемые напряжением источники. Если цепь содержит зависимые источники других типов, то они должны быть заменены на источники, управляемые напряжением. При составлении узловых уравнений такие источники учитываются наравне с независимыми источниками, а затем выражаются через соответствующие узловые напряжения.

В качестве примера расчета методом узловых напряжений рассмотрим схему транзисторного усилителя на рис. 1.19

Выразим управляющий ток  $i_3$  через узловые напряжения

$$u_{10} - \frac{1}{G_3} i_3 = u_{\text{вх}},$$

откуда  $i_3 = G_3(u_{\text{вх}} - u_{10})$  и окончательно уравнение источника тока будет

$$J = \alpha_i G_3 u_{\text{вх}} - \alpha_i G_3 u_{10}.$$

Узловые уравнения:

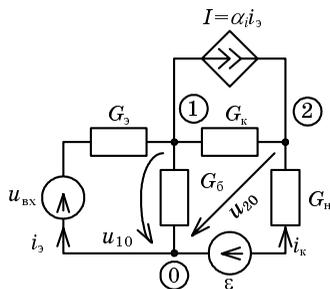


Рис. 1.19

$$(G_3 + G_6 + G_k)u_{10} - G_k u_{20} = G_3 u_{\text{вх}} - J,$$

$$-G_k u_{10} - (G_k + G_H)u_{20} = J - G_H e.$$

После подстановки выражения для  $J$  получим

$$(G_3 + G_6 + G_k - \alpha_i G_3)u_{10} - G_k u_{20} = (G_3 - \alpha_i G_3)u_{\text{вх}},$$

$$-(G_k - \alpha_i G_3)u_{10} + (G_k + G_H)u_{20} = \alpha_i G_3 u_{\text{вх}} - G_H e.$$

## 2. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 2.1. Переменные тока, напряжения, ЭДС. Основные понятия, определения

*Переменные токи, напряжения и ЭДС* – это такие токи, напряжения и ЭДС, которые изменяются во времени по периодическим и непериодическим законам (рис. 2.1), где  $\tau_{\text{и}}$  – длительность прямоугольного импульса;  $T$  – период.

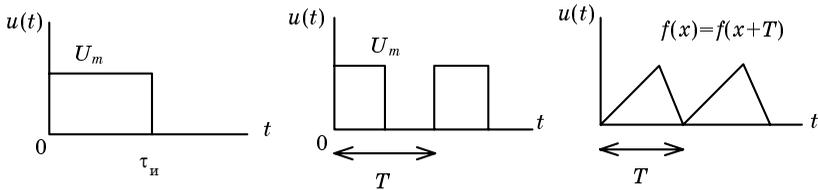


Рис. 2.1

Наибольшее распространение получили периодические токи, напряжения и ЭДС, изменяющиеся во времени по гармоническим законам (рис. 2.2)

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_U), \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_I), \\ e(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_E), \end{aligned} \quad (2.1)$$

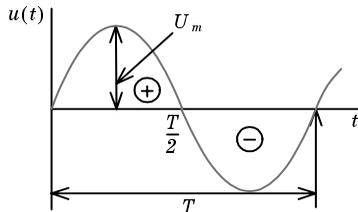


Рис.2.2

где  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$  – мгновенные значения напряжения, тока и ЭДС;

$U_m, I_m, E_m$  – амплитудные значения, т. е. наибольшие значения гармонической функции;  $\Psi_U, \Psi_I, \Psi_E$  – начальные фазы напряжения, тока и ЭДС соответственно;  $\omega$  – круговая частота;  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ , рад/с;  $f$  – частота,  $f = \frac{1}{T}$ , Гц.

*Начальная фаза*  $\Psi$  характеризует значение напряжения (тока, ЭДС) в начальный (нулевой) момент времени.

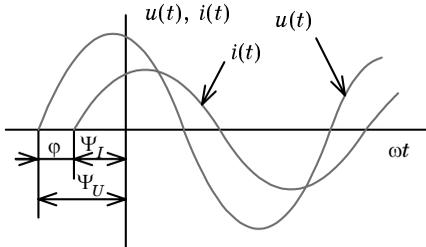


Рис. 2.3

*Фаза*  $(\omega t + \psi_0)$  характеризует значение напряжения (тока, ЭДС) в данный момент времени.

При анализе цепей гармонического тока большое значение имеют не начальные фазы напряжений и токов, а их разность  $\Psi_U - \Psi_I = \varphi$ , которая называется углом сдвига фаз  $\varphi$  (рис. 2.3).

В случае, если:

- 1) угол  $\varphi = 0 \Rightarrow \varphi u = \varphi_I$ , т.е. ток и напряжение совпадают по фазе;
- 2) угол  $\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow$  ток и напряжение расположены под углом  $90^\circ$ ;
- 3) угол  $\varphi = \pm\pi \Rightarrow$  ток и напряжение находятся в противофазе.

## 2.2. Действующее и среднее значения гармонического тока

*Действующее* (эффективное) значение переменного тока, напряжения, ЭДС определяется его среднеквадратичным значением. Например, для тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.2)$$

*Действующее значение* характеризует тепловое, энергетическое воздействие переменного тока. Действующее значение периодического тока численно равно такому постоянному току, который за время, равное периоду переменного тока выделяет такое же количество тепла, что и переменный ток

$$RI^2T = R \int_0^T i^2 dt. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что выражения (2.2) и (2.3) эквивалентны друг другу. Найдем действующее значение гармонического тока. Для это-

го возьмем мгновенное значение тока  $i(t) = I_m \sin \omega t$ , подставим в (2.2) и возьмем интеграл. Тогда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2 T}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t\right) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Так как  $\int_0^T \cos k\omega t dt = 0$ , то взяв интеграл, получим

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ А.} \quad (2.4)$$

Действующее значение гармонического тока, а, следовательно, напряжения и ЭДС, в  $\sqrt{2}$  меньше его амплитудного значения.

Найдем среднее значение. Как известно из математики, среднее значение равно высоте прямоугольника, равновеликого по площади под данной кривой, т. е.

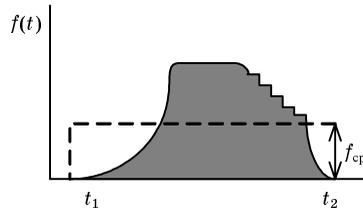


Рис.2.4

$$f_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Определим среднее значение для гармонического тока. Так как за период имеются положительная и отрицательная полуволны (см. рис. 2.2), то значение гармонического тока за период равно нулю, следовательно, среднее значение определим за полупериод

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt. \quad (2.5)$$

*Среднее значение тока*  $I_{cp}$  характеризует заряд, который переносит переменный ток за время, равное половине периода. Поэтому среднее значение гармонического тока можно определить следующим образом: среднее значение гармонического тока  $I_{cp}$  равно такому постоянному току, который за время, равное  $\frac{T}{2}$  переменного тока, переносит такой же заряд, что и постоянный ток.

Определим, как связаны амплитудное и среднее значения для гармонического тока

$$I_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0.637 I_m. \quad (2.6)$$

Для гармонического тока среднее значение обычно меньше действующего  $I_{\text{cp}} < I$ . Для характеристики периодических кривых вводятся коэффициенты амплитуды  $k_a$  и формы  $k_{\Phi}$

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2},$$

$$k_{\Phi} = \frac{I}{I_{\text{cp}}} = \frac{I_m \pi}{\sqrt{2} \cdot 2I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11.$$

### 2.3. Изображение синусоидальных величин с помощью вращающихся векторов. Метод комплексных амплитуд

При анализе цепей необходимо выполнять операции над гармоническими функциями по правилам тригонометрии, что вызывает математические трудности, поэтому было предложено изображать гармонические функции в виде проекции вращающегося вектора на ось абсцисс или ординат и на основе метода комплексных амплитуд использовать для анализа цепей операции с комплексными числами.

Покажем, что гармоническую функцию можно определить в виде проекции вращающегося вектора. Возьмем оси  $M$ ,  $N$  прямоугольной системы координат и в момент времени  $t = 0$  изобразим вектор, равный амплитудному значению  $I_m$  и образующий угол  $\Psi_I$  с осью  $M$  (рис. 2.5). Пусть данный вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , равной круговой частоте. Тогда в момент времени  $t$  вектор займет положение под углом  $\omega t + \Psi_I$  к оси  $M$ .

Рассмотрим проекцию данного вектора на ось абсцисс и ось ординат. Они равны соответственно

$$i_1(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (2.7)$$

т. е. гармоническую функцию можно представить в виде вектора, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ .

Операции с гармоническими функциями при использовании вращающе-

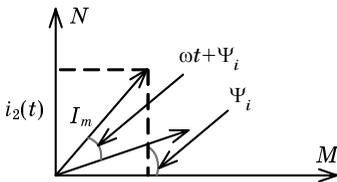


Рис. 2.5

гося вектора заменяются операциями над векторами, которые выполняются по правилам векторной алгебры.

Возьмем комплексную плоскость и изобразим комплексное число  $\dot{A}$  (рис. 2.6).

Как известно, данное число  $\dot{A}$  можно записать в трех формах:

$a+jb$  – алгебраическая форма записи комплексного числа;  $Ae^{j\varphi}$  – показательная форма записи комплексного числа;  $A\cos\varphi + Aj\sin\varphi$  – тригонометрическая форма записи комплексного числа, где,  $j = \sqrt{-1}$  – чисто мнимая единица.

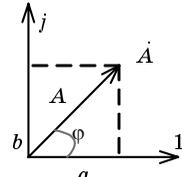


Рис. 2.6

Модуль  $A$  и аргумент комплексного числа  $\varphi$  связаны с вещественной  $a$  и мнимой  $b$  частями комплексного числа выражениями:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

– формулы перехода от алгебраической к показательной форме записи.

Вспомним основные операции с комплексными числами: в соответствии с формулой Эйлера:  $e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$

$$Ae^{j(\omega t + \varphi)} = \dot{A}e^{j\omega t} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}.$$

1. Сложение  $\dot{A}_1 \pm \dot{A}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$ .
2. Умножение  $\dot{A}_1 \dot{A}_2 = A_1 e^{j\varphi_1} A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$ .
3. Деление  $\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{A_1 e^{j\varphi_1}}{A_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$ .

Комплексное число  $\dot{A}^*$  называется сопряженным с числом  $\dot{A}$ , если оно отличается знаком у мнимой части либо знаком у аргумента

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= a + jb = Ae^{j\varphi}, \\ \dot{A}^* &= a - jb = Ae^{-j\varphi}. \end{aligned} \right\}$$

Произведение комплексного числа на сопряженное равно квадрату модуля и дает вещественное число

$$\dot{A} \dot{A}^* = a^2 + b^2 = A^2.$$

Изобразим вращающийся вектор в комплексной плоскости (рис.2.7). Конец вектора определяет некоторую точку, т.е. комплексное число

$$\begin{aligned} i_1 + ji_2 &= I_m \cos(\omega t + \psi_I) + I_m \sin(\omega t + \psi_I)j = \\ &= I_m e^{j(\omega t + \psi_I)} = I_m e^{j\psi_I} i e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

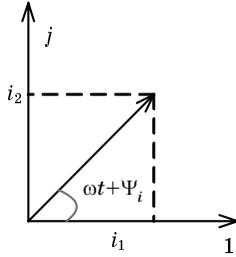


Рис. 2.7

Обозначим комплекс амплитудного значения тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\Psi}, \quad (2.9)$$

где  $e^{j\omega t}$  – множитель вращения.

С учетом введенных обозначений выражение (2.8) имеет вид

$$i_1 + j i_2 = \dot{I}_m e^{j\omega t}. \quad (2.9)$$

Так как проекция вращающегося вектора на ось ординат представляет временную функцию (2.7), то гармонической (синусоидальной или косинусоидальной) функции можно поставить в соответствие комплексное число (амплитуду)

$$i(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t} \quad (2.10)$$

– прямое преобразование.

### Пример

Мгновенное значение тока (оригинал)  $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$ .

Тогда в соответствии с выражением (2.10) комплекс амплитудного значения тока (изображение) равен  $\dot{I}_m = 5\sqrt{2} e^{j30^\circ} e^{j\omega t}$ . Часто множитель вращения опускают и записывают только комплексную амплитуду, например  $\dot{I}_m = 5\sqrt{2} e^{j30^\circ}$ . Так как амплитудное и действующее значения связаны  $\sqrt{2}$ , то можно определить комплекс действующего значения тока  $\dot{I} = 5 e^{j30^\circ}$ .

При анализе цепей можно пользоваться комплексом либо амплитудного, либо действующего значения тока (напряжения, ЭДС).

Обратное преобразование осуществляется в соответствии с выражениями:

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Im} \left[ \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] \leftarrow I_m \sin(\omega t + \psi), \\ i(t) &= \text{Re} \left[ \dot{I}_m e^{j\omega t} \right] \leftarrow I_m \cos(\omega t + \psi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В первом случае получается синусоидальная функция времени, во втором – косинусоидальная функция времени.

### *Пример*

Комплекс амплитудного значения тока  $\dot{I}_m = 10e^{-j45^\circ}$ , тогда исходя из (2.11) мгновенное значение тока либо  $i(t) = 10\cos(\omega t - 45^\circ)$ , либо  $i(t) = 10\sin(\omega t - 45^\circ)$  в зависимости от того, через какую функцию определяется мгновенное значение.

Рассмотрим основные свойства метода комплексных амплитуд (МКА):

#### 1. Свойство линейности

Изображение от суммы оригиналов равняется сумме изображений. Математически записывается следующим образом:

$$i_1(t) + i_2(t) \bullet = \dot{I}_{m_1} + \dot{I}_{m_2},$$

$$i_1(t) \bullet = \dot{I}_{m_1}; i_2(t) \bullet = \dot{I}_{m_2},$$

где  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  – оригиналы (временные функции);  $\dot{I}_{m_1}$ ,  $\dot{I}_{m_2}$  – изображения (комплексные амплитуды).

Пусть оригинал –  $i(t)$ , а изображение – комплексная амплитуда  $\dot{I}_m$ .

Следствие из свойства линейности: пусть оригиналы (временные функции) одинаковы  $i_1(t) = i_2(t) = i(t)$ , тогда

$$i_1(t) + \dots + i_k(t) = ki(t) \bullet = k\dot{I}_m,$$

т. е. при умножении оригинала на постоянный множитель, изображение также умножается на постоянный множитель.

#### 2. Изображение производной

Пусть оригиналу  $i(t)$  соответствует изображение (комплексная амплитуда)  $\dot{I}_m$ , т. е.  $i(t) \bullet = \dot{I}_m e^{j\omega t}$ . Тогда изображение производной от оригинала соответствует изображению функции, умноженному на

множитель  $j\omega$ , а именно:  $\frac{di(t)}{dt} \bullet = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}$ .

#### 3. Изображение интеграла

Изображение интеграла от оригинала соответствует изображению функции, деленному на множитель  $j\omega$ . Математически:

$$\int i(t) dt \bullet = \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}.$$

Свойства 2 и 3 определяют достоинства МКА, а именно: интегрально-дифференциальные уравнения, которые описывают электромагнитные процессы в цепи относительно мгновенных значений за-

меняются алгебраическими уравнениями относительно комплексных амплитуд, решение которых значительно упрощается.

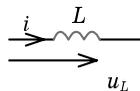
## 2.4. Параметры цепей гармонического тока

В цепи гармонического тока напряжения и токи изменяются во времени. Поэтому при анализе цепи переменного тока учитывают все пассивные элементы: сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и взаимную индуктивность  $M$ , которые определяют режим работы цепи. Сопротивление было уже рассмотрено ранее (см. подразд. 1.2). Рассмотрим индуктивность  $L$ .

### Индуктивность $L$

*Индуктивность* – это такой идеализированный элемент электрической цепи, в котором энергия источника запасается в виде энергии магнитного поля и возвращается без потерь в источник.

Условное обозначение:



Реальным устройством, обладающим такими свойствами, является индуктивная катушка (рис.2.8).

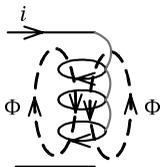


Рис. 2.8

Пусть в катушке протекает ток  $i$ . При этом будет создано магнитное поле, которое характеризуется магнитным потоком  $\Phi$ . Направления тока  $i$  и магнитного потока  $\Phi$  связаны правилом буравчика (правоходного винта), или правилом правой руки. Потокосцепление  $\Psi$  – это произведение потока на число витков:  $\Psi = \Phi w$ , где  $w$  – число витков.

Как известно, индуктивность как величина, определяется отношением потокосцепления самоиндукции к току, его вызвавшему, т. е.

$$L = \frac{\Psi}{i}, \text{ Гн.} \quad (2.12)$$

Однако индуктивность в линейной цепи не зависит ни от потокосцепления  $\Psi$ , ни от тока  $i$ , а определяется

$$L = \frac{w^2}{R_m}; \quad R_m = \frac{l_{cp}}{\mu_a S}, \quad (2.13)$$

где  $R_m$  – магнитное сопротивление пути замыкания потока самоиндукции;  $l_{cp}$  – средняя длина пути замыкания потока самоиндукции;  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость пути замыкания потока самоиндукции;  $S$  – площадь поперечного сечения магнитного сердечника.

Найдем ЭДС самоиндукции. В соответствии с законом электромагнитной индукции

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -u_L, \quad (2.14)$$

где ЭДС самоиндукции  $e_L$  уравновешивается напряжением самоиндукции  $u_L$ . Тогда из (2.14) напряжение самоиндукции будет

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt},$$

$i \frac{dL}{dt} = 0$  – для линейной цепи;  $L = \text{const}$ , поэтому окончательно напряжение самоиндукции:

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (2.15)$$

Определим мгновенную мощность

$$p(t) = ui = Li \frac{di}{dt}.$$

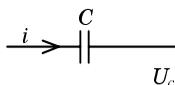
Знак мощности определяется знаком производной. Если ток  $i$  возрастает, то производная больше нуля, а следовательно, мощность  $p(t) > 0$ , происходит накопление энергии в магнитном поле. Если ток  $i$  убывает, то производная и мощность  $p(t) < 0$  энергия рекуперируется (возвращается) в источник. Если ток  $i$  постоянен, то мощность  $p(t) = 0$ .

Таким образом, в индуктивности происходит колебание энергии. В течение половины периода мощность от источника накапливается в магнитном поле индуктивности, а затем в другом полупериоде возвращается в источник. Активная мощность при этом равна нулю.

### Емкость $C$

*Емкость* – это идеальный элемент цепи, в котором энергия источника запасается в виде энергии электрического поля и возвращается без потерь в источник.

Условное обозначение:



Реальное устройство, обладающее таким свойством – конденсатор. На рис. 2.9 схематично изображен плоский конденсатор. Внутри конденсатора в диэлектрике протекает ток смещения, вызванный изменением во времени вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$ .

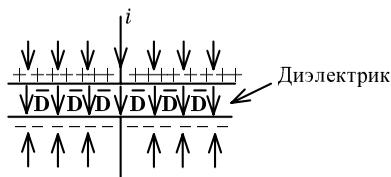


Рис. 2.9

Считаем, что ток проводимости (см. 1.1) численно равен току смещения, тогда

$$i_{\text{пр}} = i_{\text{смещ}} = \frac{dD}{dt}.$$

Вектор электрического смещения связан с напряженностью поля  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость;  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля.

Найдем ток в емкости. Как известно, емкость есть отношение заряда к напряжению

$$C = \frac{Q}{U}, \Phi. \quad (2.16)$$

Емкость не зависит ни от заряда  $Q$ , ни от напряжения  $u$ , а определяется диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$  и геометрическими размерами: площадью  $S$  и расстоянием между пластинами  $d$ . Например, для плоского конденсатора его емкость равна:  $C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{d}$ , где  $\epsilon_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Как известно, ток  $i(t)$  связан с зарядом  $Q$  выражением  $i(t) = \frac{dQ}{dt}$ . С учетом (2.16) получим для тока емкости

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = u \frac{dC}{dt} + C \frac{du}{dt} = C \frac{du}{dt}. \quad (2.17)$$

Для линейных цепей  $C = \text{const}$ , поэтому первое слагаемое  $u \frac{dC}{dt} = 0$ .

Зная ток емкости, всегда можно найти из выражения (2.17) напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt. \quad (2.18)$$

Определим мгновенную мощность электрического поля емкости

$$p(t) = u_C(t) i_C(t) = C u_C(t) \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Аналогично, как и в индуктивности, имеют место колебания энергии между электрическим полем и источником.

## 2.5. Сопротивление в цепи гармонического тока

Пусть сопротивление  $R$  включено на источник гармонического напряжения и для какого-то момента времени укажем направление тока и напряжения. Допустим, ток в цепи равен

$$i(t) = I_m \sin \omega t.$$

Тогда в соответствии с законом Ома для мгновенных значений напряжение будет

$$u(t) = iR = I_m R \sin \omega t = U_m \sin \omega t,$$

где  $U_m = I_m R$  – амплитудное значение напряжения.

Сопоставляя выражения для тока и напряжения, видно, что на активном сопротивлении ток  $i(t)$  и напряжение  $u(t)$  совпадают по фазе (рис. 2.10), начальные фазы тока и напряжения равны:  $\psi_I = \psi_U = 0$  и угол сдвига фаз  $\varphi = 0$ .

*Векторная диаграмма* – это графическое изображение векторов токов и напряжений в цепи на комплексной плоскости. Диаграмму (рис. 2.11) изображают относительно комплексных амплитуд (либо комплексов действующих значений).

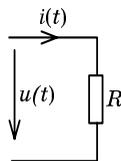


Рис. 2.10

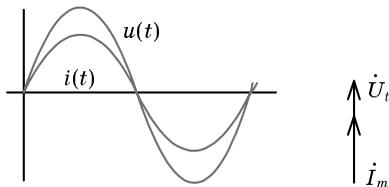


Рис. 2.11

Найдем, как связаны ток и напряжение на сопротивлении в соответствии с методом комплексных амплитуд. На основе МКА перейдем от мгновенных значений к комплексным и будем иметь

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin \omega t = \dot{I}_m e^{j\omega t}, \\ u(t) &= U_m \sin \omega t = \dot{U}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

В соответствии с законом Ома для мгновенных величин  $i(t) = \frac{u(t)}{R}$  и для комплексных амплитуд получим  $\dot{I}_m e^{j\omega t} = \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t}}{R}$  или, сократив множитель вращения, окончательно получим выражение закона Ома для комплексных амплитуд

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_R} = Y_R \dot{U}_m, \quad (2.19)$$

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m Z_R = \frac{\dot{I}_m}{Y_R},$$

где  $Z_R = R$  – комплексное сопротивление цепи;  $Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G$  – комплексная проводимость.

## 2.6. Индуктивность в цепи гармонического тока

Пусть индуктивность включена на источник синусоидального тока (рис. 2.12)

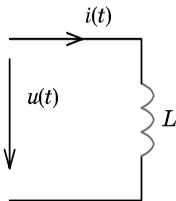


Рис. 2.12

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (2.20)$$

Тогда напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \omega I_m \cos \omega t,$$

$$u_L(t) = L \omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.21)$$

Обозначим в выражении (2.21)  $\omega L = X_L$  – реактивное сопротивление индуктивности,  $U_m = I_m \omega L = X_L I_m$  – амплитудное значение напряжения индуктивности. Тогда из (2.21) с учетом введенных обозначений мгновенное напряжение

$$u_L(t) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.22)$$

Как видно из (2.22), напряжение на индуктивности  $u_L(t)$  по фазе опережает ток на угол  $90^\circ (\frac{\pi}{2})$ , т. е. ток в индуктивности отстает от напряжения на  $90^\circ$  (рис. 2.13).

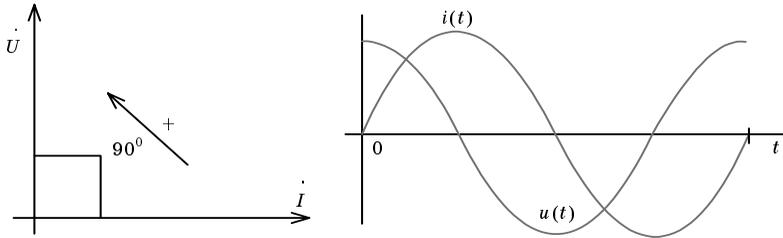


Рис. 2.13

Используя МКА, найдем, как связаны комплексы амплитудных значений тока и напряжения на индуктивности. Для этого перейдем от мгновенных значений тока  $i(t)$  и напряжения  $u_L(t)$  к комплексным амплитудам. На основе изображения функции и ее производной получим

$$i(t) = I_m \sin \omega t = \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \dot{U}_{Lm} = \dot{I}_m j\omega L = \dot{I}_m Z_L. \quad (2.23)$$

Обозначим

$$Z_L = j\omega L = X_L e^{j90^\circ} = jX_L \quad (2.24)$$

– комплексное сопротивление индуктивности.

Тогда из (2.23) комплексы амплитудных значений напряжения и тока индуктивности связаны законом Ома

$$\dot{U}_{Lm} = \dot{I}_m Z_L. \quad (2.25)$$

Найдем комплексную проводимость индуктивности

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jB_L = B_L e^{-j90^\circ}, \quad (2.26)$$

где  $B_L = \frac{1}{\omega L}$  – реактивная проводимость индуктивности.

## 2.7. Емкость в цепи гармонического тока

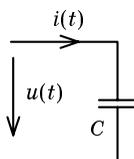


Рис. 2.14

Пусть емкость  $C$  включена на источник синусоидального напряжения (рис. 2.14)

$$u_C(t) = U_m \sin \omega t. \quad (2.27)$$

Найдем ток емкости в соответствии с выражением (2.17)

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{Cd(U_m \sin \omega t)}{dt} = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (2.28)$$

Построим кривые зависимостей тока и напряжения емкости. Как видно из рис. 2.15 и выражения (2.28), ток в емкости на  $90^\circ$  опережает напряжение. Перейдем от выражений (2.27), (2.28) к комплексным амплитудным значениям тока и напряжения

$$\begin{aligned} i(t) \cdot e^{j\omega t} &= \dot{I}_m, & U(t) \cdot e^{j\omega t} &= \dot{U}_m, \\ \dot{I}_m &= \omega C \dot{U}_m e^{j90^\circ} = j\omega C \dot{U}_m. \end{aligned} \quad (2.29)$$

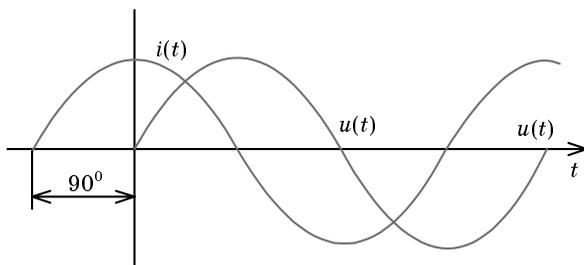


Рис. 2.15

Обозначим величину

$$j\omega C = Y_C = y_C e^{j90^\circ}, \quad (2.30)$$

где  $Y_C = j\omega C$  – комплексная проводимость емкости;  $y_C = \omega C$  – реактивная проводимость емкости.

Тогда из (2.29) имеем закон Ома для емкости

$$\dot{I}_m = Y_C \dot{U}_m, \quad (2.31)$$

Найдем сопротивление емкости  $Z_C$  как величину, обратную проводимости  $Y_C$

$$Z_C = Y_C^{-1} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}, \quad (2.32)$$

где  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  – реактивное сопротивление емкости.

Изобразим векторную диаграмму для емкости. Как видно из рис. 2.16, ток емкости по фазе опережает напряжение на угол  $90^\circ$ .

## 2.8. Анализ сложных цепей по законам Кирхгофа

Рассмотрим, как выражаются законы Кирхгофа для комплексных амплитуд. Как известно, ЗТК для мгновенных значений токов записывается

$$\sum_{k=1}^m i_k(t) = 0.$$

На основе свойства линейности метода комплексных амплитуд ЗТК для комплексных амплитуд будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^m \dot{I}_k = 0. \quad (2.33)$$

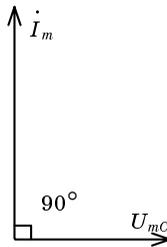


Рис. 2.16

Алгебраическая сумма комплексов амплитудных (действующих значений) тока в узле (сечении) равна нулю.

Закон напряжений Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = 0.$$

Аналогично на основе свойства линейности имеем

$$\sum_{k=1}^m \dot{U}_k = 0, \quad (2.34)$$

т. е. алгебраическая сумма комплексов амплитудных (действующих значений) напряжений в контуре равна нулю.

Так как формально законы Кирхгофа выглядят аналогично законам Кирхгофа для цепи постоянного тока, то для расчета цепей переменного тока могут быть использованы все ранее рассмотренные методы расчета цепей: МТС, МУН, МНД и др. Однако следует отметить, что использование МУН имеет особенности для цепей с взаимной индукцией.

### Последовательное соединение $R, L, C$

Рассмотрим цепь с последовательным соединением  $R, L, C$  (рис. 2.17).

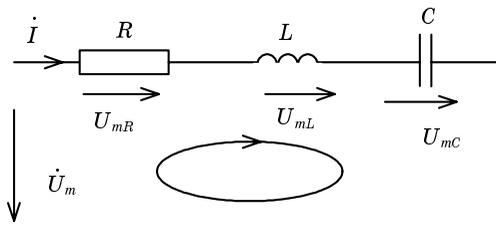


Рис. 2.17

В соответствии с ЗНК имеем

$$\dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} = \dot{U}_m.$$

Выразим входное напряжение через ток в цепи. Для этого запишем напряжения на каждом из элементов в соответствии с законом Ома, получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_m Z_R + \dot{I}_m Z_L + \dot{I}_m Z_C &= \dot{U}_m, \\ \dot{I}_m (Z_R + Z_L + Z_C) &= \dot{U}_m. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Обозначим через  $Z$  комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \\ &= R + j(X_L - X_C) = \sqrt{R^2 + x^2} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  – полное сопротивление цепи (модуль комплексного сопротивления);  $X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление цепи;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

– аргумент комплексного сопротивления цепи, определяет угол сдвига между током и напряжением на входе цепи.

Как видно из (2.36), *общее комплексное сопротивление цепи* при последовательном соединении элементов равно сумме комплексных сопротивлений отдельных элементов.

Исходя из (2.35) с учетом (2.36), можно записать закон Ома для цепи с последовательным соединением  $R, L, C$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z}. \quad (2.37)$$

Построим векторную диаграмму. За опорный вектор выбираем вектор тока, так как ток один, соединение последовательное. Затем строим векторы напряжений на каждом из элементов: на сопротивлении  $\dot{U}_{mR}$ , который совпадает по фазе с током, на индуктивности  $\dot{U}_{mL}$  – опережает, а на емкости  $\dot{U}_{mC}$  – отстает от тока в цепи. Результирующий вектор – напряжение источника получаем в соответствии с ЗНК суммированием векторов напряжений каждого элемента.

Как видно из векторной диаграммы, для цепи с последовательным соединением  $R, L, C$  (рис. 2.18) характер цепи – индуктивный, так как ток отстает от входного напряжения на угол  $\varphi$ . При этом соотношение между напряжениями на индуктивности и емкости:  $U_{mL} > U_{mC}$ , так как при построении векторной диаграммы для определенности приняли  $X_L > X_C$ .

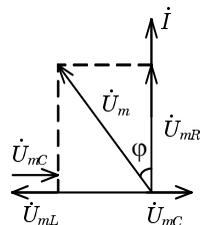


Рис. 2.18

### Параллельное соединение $G, L, C$

Рассмотрим параллельное соединение  $G, L, C$  (рис. 2.19).

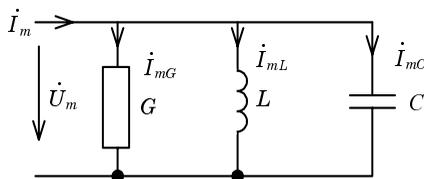


Рис. 2.19

Обозначим токи элементов и составим ЗТК для верхнего узла

$$\dot{I}_{Gm} + \dot{I}_{Lm} + \dot{I}_{Cm} = \dot{I}_m.$$

Выразим токи элементов в соответствии с законом Ома через напряжение и проводимости, получим

$$\dot{U}_m Y_G + \dot{U}_m Y_L + \dot{U}_m Y_C = \dot{I}_m. \quad (2.38)$$

Обозначим через  $Y$  комплексную проводимость цепи

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = G - j(B_L - B_C) = G - jB = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi}, \quad (2.39)$$

где  $y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$  – полная проводимость, модуль комплексной проводимости цепи;  $\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}$  – угол сдвига между током и напряжением.

Как видно из (2.38), *общая проводимость цепи* при параллельном соединении равна сумме проводимостей ветвей

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C. \quad (2.40)$$

С учетом (2.39) из (2.38) закон Ома для цепи с параллельным соединением элементов  $G, L, C$  будет

$$\dot{U}_m Y = \dot{I}_m. \quad (2.41)$$

Построим векторную диаграмму для цепи: за опорный вектор берем напряжение, затем строим векторы токов для отдельных элементов с учетом углов фазового сдвига (2.5)–(2.7). Вектор входного тока

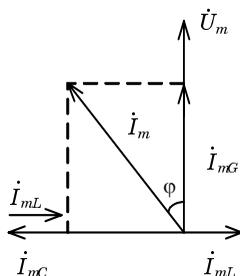


Рис. 2.20

получаем в соответствии с ЗТК путем сложения векторов токов параллельных элементов. Как видно из векторной диаграммы для цепи с параллельным соединением  $G, L, C$  (рис. 2.20), входной ток  $\dot{I}_m$  опережает

напряжение  $\dot{U}_m$ , т. е. характер цепи – активно-емкостный.

## 2.9. Комплексное сопротивление и проводимость.

### Схема замещения двухполюсника на заданной частоте

Рассмотрим некоторый двухполюсник, включенный на источник гармонического напряжения (рис. 2.21).

Зная напряжение  $\dot{U}_m$  и ток  $\dot{I}_m$  на входе двухполюсника, найдем, соответственно, входное сопротивление и проводимость

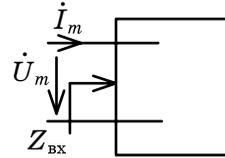


Рис. 2.21

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = R + jX,$$

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = G - jB,$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{Y_{\text{вх}}}.$$

Очевидно, что входное сопротивление и проводимость – обратные величины. Определим теперь, как связаны реактивное и активное сопротивление с активной и реактивной проводимостью. Для этого помножим и разделим дробь на число сопряженное знаменателю и затем почленно разделим числитель на знаменатель (см. операцию деления комплексных чисел в алгебраической форме), получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + \frac{jB}{G^2 + B^2},$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} \quad (2.42)$$

– формулы перехода от параллельной схемы замещения двухполюсника к последовательной.

Рассмотрим входную проводимость цепи и пределаем аналогичные преобразования, получим

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB,$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (2.43)$$

– формулы перехода от последовательной схемы замещения к параллельной.

Следует отметить, что зная параметры одной схемы замещения возможно найти параметры другой схемы только при данной частоте, так как в исходной цепи частотные характеристики элементов и ветвей различны.

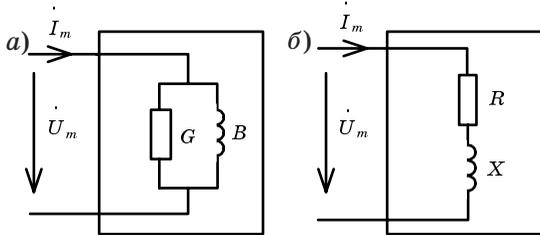


Рис. 2.22

На рис. 2.22 показана параллельная схема замещения двухполюсника (а) и последовательная схема замещения двухполюсника (б).

## 2.10. Анализ сложных цепей гармонического тока по законам Кирхгофа и методам токов связей

При анализе сложных цепей необходимо от цепи, содержащей сопротивления, емкости, индуктивности, источники, перейти к комплексным сопротивлениям и комплексам амплитудных значений тока и напряжения, затем необходимо перерисовать цепь. Если не обращать внимание на точки и формально считать, что  $Z$  соответствует  $R$ , то для расчета цепей гармонического тока возможно использовать все ранее рассмотренные методы расчета цепей постоянного тока.

### Пример

Составить уравнения для расчета цепи (рис. 2.23) по законам Кирхгофа методом токов связей и узловых напряжений.

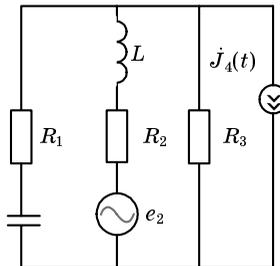


Рис. 2.23

Дано  $R_1, C_1, R_2, L_2, R_3$ :

$$e_2(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi),$$

$$J_4(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

*Решение*

1. Записываем комплексы амплитудных значений источников и сопротивлений ветвей

$$e_2(t) \bullet = \dot{E}_{2m} = E_m e^{j\varphi_1}, \quad J_4(t) \bullet = \dot{J}_m = J_m e^{j\varphi_4},$$

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1}, \quad Z_2 = R_2 + jX_2 = R_2 + j\omega L_2, \quad Z_3 = R_3.$$

2. Перерисовываем схему относительно комплексных значений сопротивлений и источников. Получим схему в виде (рис. 2.24).

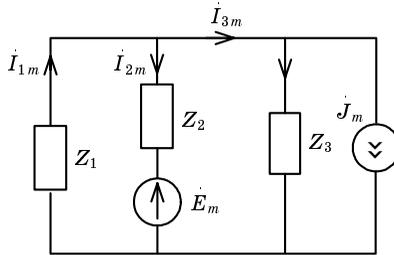


Рис. 2.24

3. Рисуем граф цепи (рис. 2.25) и составляем уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} -\dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} + \dot{I}_{3m} = 0, \\ \dot{I}_{1m} Z_1 + \dot{I}_{2m} Z_2 = -\dot{E}_{2m}, \\ \dot{I}_{3m} Z_3 - \dot{I}_{2m} Z_2 = \dot{J}_{3m} Z_3 + \dot{E}_{2m}. \end{cases}$$

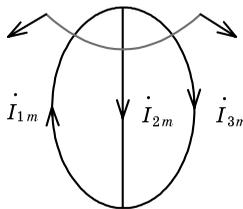


Рис. 2.25

4. Получим систему уравнений относительно токов ветвей связей. Для этого выразим из ЗТК ток ветви дерева (ветвь 2) через токи ветвей связей:

$$\dot{I}_{2m} = \dot{I}_{1m} - \dot{I}_{3m}.$$

Затем подставим это выражение в ЗНК и сгруппируем слагаемые с одинаковыми токами и получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1m}(Z_1 + Z_2) - \dot{I}_{3m}Z_2 &= -\dot{E}_{2m}, \\ \dot{I}_{3m}(Z_3 + Z_2) - \dot{I}_{1m}Z_2 &= \dot{E}_{2m} + \dot{I}_mZ_3. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений содержит только токи ветвей связей, причем это – иначе записанные ЗНК. Правая часть содержит слагаемые с источниками ЭДС и тока, как в ЗНК, а в левой части записаны падения напряжения от токов ветвей связи:

$Z_{11} = Z_1 + Z_2$  – собственное сопротивление 1-го контура, т.е. сумма сопротивлений ветвей, составляющих 1-й контур.

Обозначим:

$Z_{31} = Z_{13} = Z_2$  – взаимное (общее) сопротивление цепи, т.е. общее сопротивление для 1-го и 3-го контуров.

Для  $k$ -го контура с учетом введенных обозначений можно записать

$$\dot{I}_k Z_{kk} \pm \dot{I}_n Z_{nk} \mp \dot{I}_l Z_{lk} \mp \dots = \sum \dot{E}_i + \sum \dot{I}_i Z_i. \quad (2.44)$$

Знаки у произведений вида  $\pm \dot{I}_n Z_{nk}$  определяются по следующему правилу: если в ветвях дерева направления обходов  $k$ -го и  $n$ -го контуров – разные, то знак «-». При совпадении – знак «+».

Сравнивая полученный алгоритм (2.44) с выражением (1.27) при расчете цепей постоянного тока, нетрудно видеть их формальное сходство. Как и при постоянном токе: количество уравнений по МТС в цепи гармонического тока  $N_{\text{МТС}} = p - q + 1 - n$ , где  $n$  – число идеальных источников тока, которые являются ветвями связей.

## 2.11. Анализ сложных цепей в гармоническом режиме методом узловых напряжений

При анализе цепей в соответствии с методом узловых напряжений один из узлов выбирается за опорный и обозначают напряжения остальных узлов относительно этого опорного узла. Число узловых напряжений, а, следовательно, и уравнений будет  $N_{\text{МУН}} = q - 1$ .

Покажем, что если известно напряжение на концах ветви, то всегда можно найти ток этой ветви (рис. 2.26).

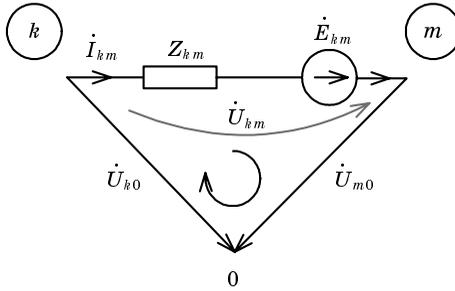


Рис. 2.26

Напряжение ветви, например  $\dot{U}_{km}$ , всегда можно выразить через узловые напряжения. Из ЗНК для большого и маленького контуров имеем

$$\begin{aligned}\dot{U}_{km} + \dot{U}_{mo} - \dot{U}_{ko} &= 0, \\ \dot{U}_{km} &= \dot{U}_{ko} - \dot{U}_{mo}.\end{aligned}$$

По ЗНК для контура, содержащего ветвь с сопротивлением (рис. 2.26), получим

$$\dot{I}_{km} Z_{km} + \dot{U}_{mo} - \dot{U}_{ko} = \dot{E}_{km}.$$

Откуда ток ветви

$$\dot{I}_{km} = \frac{\dot{U}_{ko} - \dot{U}_{mo} + \dot{E}_{km}}{Z_{km}} = \frac{\dot{U}_{km} + \dot{E}_{km}}{Z_{km}}.$$

Таким образом, ток ветви равен напряжению  $u$ , совпадающему по направлению с током, плюс значение источника ЭДС, если его направление совпадает с направлением тока, деленному на сопротивление ветви.

Метод узловых напряжений – это иначе записанные ЗТК, когда токи ветвей выражены через узловые напряжения, сгруппированы слагаемые при узловых напряжениях, а источники тока и токи преобразованных источников ЭДС, записаны в правой части уравнений.

При анализе цепей на основе МУН вначале выбирают опорный – нулевой узел. Если существует ветвь с идеальным источником ЭДС, то за опорный узел выбирают узел, принадлежащий данной ветви. При этом ток идеальной ветви определяется в последнюю очередь, исходя из ЗТК.

Запишем выражения для токов ветвей через узловые напряжения для цепи, изображенной на рис. 2.24. За опорный узел выбран нижний узел

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{01}}{Z_1} = -\frac{\dot{U}_{10}}{Z_1}, \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{10} - \dot{E}_1}{Z_2}, \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{10}}{Z_3} + \dot{J}_m.$$

Если ветвь имеет источник тока и его направление совпадает с направлением тока ветви, то значение источника тока необходимо прибавить к току ветви, ЗТК для 1-го узла:  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ .

Подставляя выражения для токов через узловые напряжения и группируя слагаемые, получим

$$\dot{U}_{10} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \frac{\dot{E}_2}{Z_2} - \dot{J}_m.$$

В общем случае для  $k$ -го узла имеем следующий алгоритм составления уравнений методом узловых напряжений:

$$\dot{U}_{ko} \dot{Y}_{kk} - \dot{U}_{10} \dot{Y}_{k1} - \dot{U}_{m0} \dot{Y}_{km} - \dots = \sum \dot{J} - \sum \frac{\dot{E}_i}{Z_i} = \sum \dot{J}_{kk}, \quad (2.45)$$

где  $Y_{kk}$  – собственная проводимость  $k$ -го узла, т. е. сумма проводимостей ветвей, сходящихся к  $k$ -му узлу;  $Y_{km}$  – общая проводимость ветви между  $k$ -м и  $m$ -м узлами;  $\sum I_{11}$  – сумма токов источников тока и токов преобразованных источников ЭДС, причем знак у них «+», если они направлены к узлу  $k$ .

Сопоставляя полученный алгоритм (2.45) с правилом составления уравнений по МУН для постоянного тока, видно их формальное сходство.

## 2.12. Мощность в цепи гармонического тока

Рассмотрим двухполюсник, на входе которого гармонические напряжение и ток изменяются в соответствии с выражениями (рис 2.27)

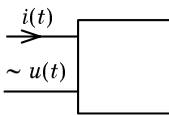


Рис. 2.27

$$u(t) = U_m \sin \omega t,$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Найдем мгновенную мощность

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = I_m U_m \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{I_m U_m}{2} (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Как видно из выражения (2.46), мгновенное значение мощности

изменяется с удвоенной частотой по сравнению с током и напряжением (рис. 2.28).

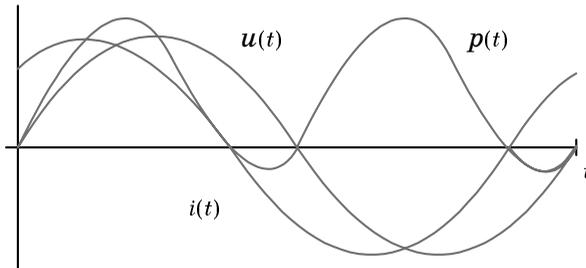


Рис. 2.28

Рассмотрим отдельно кривую мгновенной мощности (рис. 2.29).

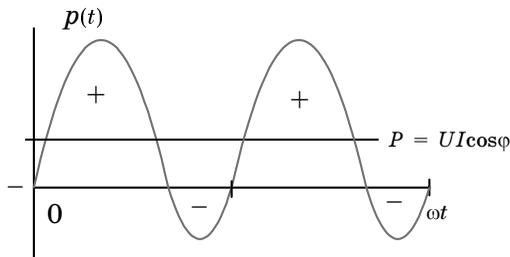


Рис. 2.29

Мгновенная мощность изменяется во времени. Пользоваться неудобно, поэтому вводят в рассмотрение среднее значение мощности за период изменения тока

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T IU (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt - \frac{1}{T} \int_0^T IU \cos(2\omega t + \varphi) dt = UI \cos \varphi - 0 = UI \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Как видно, среднее значение мгновенной мощности  $P$  не зависит от времени и оно носит название *активной мощности*. Итак, активная мощность определяется

$$P = UI \cos \varphi = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \text{ Вт.} \quad (2.47)$$

Если угол  $\varphi = 0$ , то активная мощность  $P$  максимальна и равна  $P = uI$ . Если угол  $\varphi = \pm\pi/2$ , то средняя мощность в цепи с индуктивностью либо емкостью равна нулю, т. е. индуктивность и емкость не потребляют энергию от источника за период тока (рис. 2.30). Вернемся к зависимости мгновенной мощности от времени. Там, где мгновенная мощность положительна, энергия от источника поступает в цепь и выделяется на активных сопротивлениях в виде тепла там, где отрицательна – энергия, запасенная в магнитном поле индуктивности или в электрическом поле емкости, возвращается (рекуперирована) в источник. Таким образом, в цепи имеют место колебания мощности (энергии). При угле  $\varphi = 90^\circ$  активная мощность равна нулю, так как за первый полупериод мгновенная мощность положительна, за второй – отрицательна (рис. 2.30).

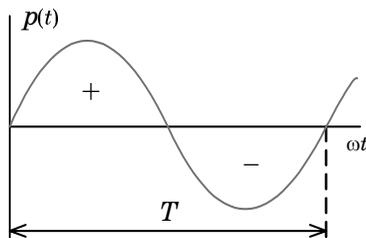


Рис. 2.30

Следовательно, индуктивность и емкость за период тока не потребляют активную мощность из источника.

Максимальное значение активной мощности есть *полная мощность*  $S$

$$S = UI, \text{ ВА.} \quad (2.48)$$

Полная мощность характеризует габариты всего устройства. Поэтому она часто называется габаритной, типовой мощностью.

Для характеристики реактивных элементов вводят понятие реактивной мощности

$$Q = UI \sin \varphi, \text{ вар.} \quad (2.49)$$

Найдем, как выражаются различные виды мощности на основе метода комплексных амплитуд, т.е. определим комплексную мощность. Пусть даны комплексы действующих значений напряжения и тока:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}, \quad \dot{I} = Ie^{j\psi_i}.$$

Найдем их произведение  $\dot{U}I = UIe^{j(\psi_u + \psi_i)}$ . Данное произведение физического смысла не имеет, так как сумма начальных фаз  $(\psi_u + \psi_i)$  не имеет физического смысла. Поэтому возьмем сопряженный комплекс одной из величин, например тока  $I = Ie^{-j\psi_i}$ . В этом случае в показателе будем иметь разность начальных фаз напряжения и тока, которая, как известно, называется углом сдвига фаз. Поэтому произведение комплексов напряжения и тока будет иметь физический смысл и определяет комплексную мощность  $\dot{S}$

$$\dot{U}I^* = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Se^{j\varphi} = \dot{S}. \quad (2.50)$$

Записывая комплексную мощность в алгебраической форме

$$\dot{S} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j\varphi},$$

нетрудно видеть, что вещественная часть комплексной мощности представляет собой активную мощность  $P = \text{Re}[\dot{S}]$ , а мнимая часть – реактивную мощность  $Q = \text{Im}[\dot{S}]$ . Модуль комплексной мощности равен полной мощности  $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ . Активная, реактивная и полная мощности составляют треугольник мощностей (рис. 2.31).

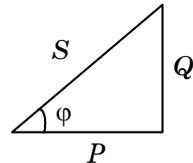


Рис. 2.31

Отношение активной мощности к полной, характеризующее степень использования по мощности электротехнического оборудования, называется *коэффициентом мощности*  $\alpha$ . Для гармонического тока:

$$\alpha = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi. \quad (2.51)$$

### 2.13. Согласование сопротивления нагрузки и сопротивления источника. Условие передачи максимальной мощности

Рассмотрим некоторый реальный источник и представим его в виде активного двухполюсника с источником ЭДС  $\dot{E}$  и внутренним сопротивлением  $Z_o$  (рис. 2.32)

$$Z_o = R_o + jX_o. \quad (2.52)$$

При этом сопротивление нагрузки

$$Z_H = R_H + jX_H. \quad (2.53)$$

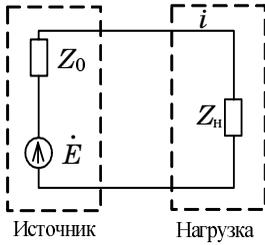


Рис. 2.32

Найдем сопротивление цепи

$$Z = Z_0 + Z_H = (R_0 + R_H) + j(X_0 + X_H) = \sqrt{(R_0 + R_H)^2 + (X_0 + X_H)^2} e^{j\varphi}, \quad (2.54)$$

$$\text{где } \varphi = \arctg \frac{X_0 + X_H}{R_0 + R_H}.$$

В соответствии с законом Ома ток в цепи будет

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{E e^{j\psi}}{\sqrt{(R_0 + R_H)^2 + (X_0 + X_H)^2} e^{j\varphi}}, \quad (2.55)$$

$$\text{где модуль тока } I = \frac{E}{\sqrt{(R_0 + R_H)^2 + (X_0 + X_H)^2}}.$$

Мощность, выделяющаяся на сопротивлении нагрузки, выражается

$$P_H = I^2 R_H = \frac{E^2 R_H}{(R_0 + R_H)^2 + (X_0 + X_H)^2}. \quad (2.56)$$

Найдем, когда мощность нагрузки  $P_H$  максимальна. Если для реактивных сопротивлений выполняется условие

$$X_0 = -X_H, \quad (2.57)$$

то мощность  $P_H$  имеет наибольшее значение

$$P_H = I^2 R_H = \frac{E^2 R_H}{(R_0 + R_H)^2}. \quad (2.58)$$

Определим соотношение между  $R_0$  и  $R_H$ , когда мощность нагрузки  $P_H$  максимальна. Для этого возьмем производную от выражения (2.58)

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{E^2 (R_0 + R_H)^2 - 2E^2 R_H (R_0 + R_H)}{(R_0 + R_H)^4} = 0$$

и приравняем ее к нулю. Получим

$$(R_0 + R_H)^2 - 2R_H (R_0 + R_H) = 0,$$

т. е. мощность в нагрузке максимальна, когда равны активные сопротивления источника и нагрузки

$$R_0 = R_n. \quad (2.59)$$

Сопоставляя между собой комплексные сопротивления источника  $Z_0 = R_0 + jX_0$  и нагрузки  $Z_n = R_n + jX_n$ , и учитывая (2.52) и (2.53), будем иметь условие передачи максимальной мощности

$$Z_0 = Z_n^*, \quad R_0 + jX_0 = R_n - jX_n, \quad (2.60)$$

где  $Z_n^* = R_n - jX_n$  – сопряженный комплекс сопротивления нагрузки.

Таким образом, максимальная мощность в цепи передается, когда комплексное сопротивление источника равно сопряженному комплексу сопротивления нагрузки. При этом мощность нагрузки определяется выражением (2.61), а КПД  $\eta$  выражением (2.62)

$$P_{n \max_x} = \frac{E^2 R_n}{(2R_n)^2} = \frac{E^2}{4R_n}, \quad (2.61)$$

$$\eta = \frac{P}{P + P_0} = \frac{I^2 R_n}{I^2 R_n + I^2 R_0} = \frac{1}{2}, \quad (2.62)$$

т. е. в согласованном режиме передачи максимальной мощности в нагрузку КПД  $\eta = 50\%$ . Для мощной энергетической сети этот режим работы невыгоден, но для информационной системы такой режим необходим с целью уменьшения ложных сигналов и увеличения помехозащищенности.

### 3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

#### 3.1. Резонанс напряжений в последовательном контуре

Возьмем электрическую цепь в виде двухполюсника (рис. 3.1), на входе которого действует источник гармонического напряжения  $\dot{U}$  и протекает ток  $\dot{I}$ . Тогда комплексное входное сопротивление  $Z_{\text{вх}}$  и угол сдвига  $\varphi$  между током и напряжением равны соответственно

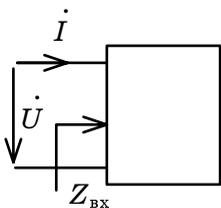


Рис. 3.1

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}},$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_{\text{вх}}}{R_{\text{вх}}}.$$

Для входной проводимости  $Y_{\text{вх}}$  и угла сдвига фаз  $\varphi$  имеем

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G_{\text{вх}} - jB_{\text{вх}},$$

$$\varphi = \arctg \frac{B_{\text{вх}}}{G_{\text{вх}}}.$$

Если в электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, оказывается, что при некоторой частоте  $X_{\text{вх}} = 0$  или  $B_{\text{вх}} = 0$ , т. е. напряжение  $\dot{U}$  и ток  $\dot{I}$  совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ), то в электрической цепи имеет место *резонанс* (фазовый резонанс). При этом несмотря на наличие реактивных сопротивлений цепь ведет себя как некоторое активное эквивалентное сопротивление.

*Резонансом* называется такой режим работы электрической цепи, когда угол сдвига между током  $I$  и напряжением  $u$  на входе цепи равен нулю  $\varphi = 0$ .

*Условие резонанса* – соотношение, связывающее резонансную частоту с параметрами цепи ( $R, L, C$ ). Для получения резонанса необходимо найти либо входное реактивное сопротивление  $X_{\text{вх}}$ , либо проводимость  $B_{\text{вх}}$ , приравнять их нулю, а затем решить полученные уравнения относительно резонансной частоты.

**Пример**

Определим условие резонанса для цепи, изображенной на рис. 3.2. Так как схема представляет параллельное соединение емкости и ветви с последовательным соединением сопротивления и индуктивности, то рациональнее записать входную проводимость цепи. Имеем

$$\begin{aligned} Y_{\text{вх}} &= Y_1 + Y_2 = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \\ &= \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C = \\ &= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j\left(\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C\right). \end{aligned}$$

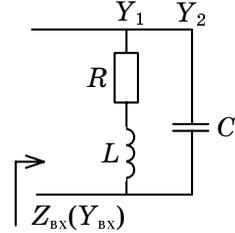


Рис. 3.2

Приравниваем мнимую часть к нулю и решаем полученное уравнение, найдем резонансную частоту

$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \omega C \Rightarrow L = CR^2 + C\omega^2 L^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{L - CR^2}{L^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

или, вводя обозначение волнового сопротивления  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , окончательно получим

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}.$$

Рассмотрим электрическую цепь с последовательным соединением  $R, L, C$ , включенную на источник гармонического напряжения  $\dot{U}$  (рис. 3.3).

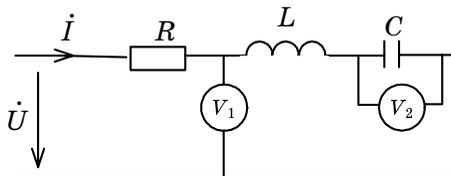


Рис. 3.3

Найдем условие резонанса. Для этого запишем комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}}$ , выделим его мнимую часть, т. е. реактивное сопротивление  $X_{\text{вх}}$  и приравняем его нулю

$$Z_{\text{вх}} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right); X_{\text{вх}} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Получим условие резонанса в виде

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (3.1)$$

т. е. при резонансе в последовательном контуре сопротивления индуктивности и емкости равны друг другу, и эта величина носит название волнового сопротивления  $\rho$

$$\rho = X_{L0} = X_{C0}. \quad (3.2)$$

Как видно из выражения (3.1), резонанс в цепи можно получить, изменяя либо частоту, либо емкость, либо индуктивность. При изменении частоты источника она должна равняться резонансной частоте цепи

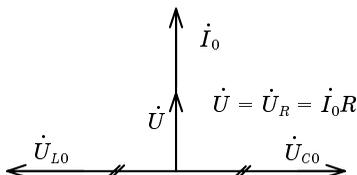
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.3)$$

Резонансные значения емкости  $C_0$  и индуктивности  $L_0$  равны соответственно

$$C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}, \quad (3.4)$$

$$L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C}. \quad (3.5)$$

Построим векторную диаграмму при резонансе (рис.3.4). За опорный вектор берем вектор тока, так как в последовательной цепи ток один, а напряжений столько, сколько элементов плюс входное напряжение.



Напряжения на индуктивности и емкости при резонансе равны (равны их сопротивления), но в противофазе

$$\dot{U}_{L_0} = j\omega LI_0 = j\rho I_0, \quad \dot{U}_{C_0} = I_0 j \frac{1}{\omega C} = -j\rho I_0. \quad (3.6)$$

Если волновое сопротивление  $\rho > R$ , то напряжения на реактивных элементах  $U_{L_0} > U_R$  и  $U_{C_0} > U_R$ . В соответствии с ЗНК

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_{C_0} + \dot{U}_{L_0}. \quad (3.7)$$

Так как напряжения на реактивных элементах при резонансе находятся в противофазе и равны по модулю, то напряжение на активном сопротивлении, исходя из (3.7), равно входному напряжению

$$U = U_R = I_0 R. \quad (3.8)$$

При этом показание вольтметра  $V_1$  на схеме рис.3.3 равно нулю  $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$ , а вольтметра  $V_2$ , измеряющего напряжение  $U_{C_0}$ , больше, чем напряжение на входе цепи  $\dot{U}$ . Найдем отношение напряжения на емкости либо индуктивности при резонансе к напряжению на входе цепи. С учетом (3.6) и (3.8), получим

$$\frac{U_{C_0}}{U} = \frac{\rho I_0}{R I_0} = \frac{U_{L_0}}{U} = \frac{\rho}{R} = Q. \quad (3.9)$$

*Добротность контура*  $Q$  – это кратность превышения напряжения на реактивных элементах по сравнению с напряжением источника при резонансе.

Обычно в последовательном контуре напряжения на индуктивности и емкости при резонансе больше, чем входное напряжение. Поэтому, чтобы подчеркнуть это явление, резонанс в последовательной цепи называется резонансом напряжений.

### 3.2. Частотные характеристики последовательного контура

*Частотные характеристики* – это зависимость сопротивления, тока и напряжения от частоты. Среди частотных характеристик выделяют *резонансные характеристики*: зависимость тока и напряжения от частоты. Зависимость амплитуды сопротивления, тока, напряжения и т.д. от частоты называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ). Зависимость фазы (аргумента комплекса) сопротивления, тока, напряжения и т.д. от частоты называется *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ).

Найдем АЧХ и ФЧХ входного сопротивления цепи  $Z_{вх}$ . Для этого запишем  $Z_{вх}$ , вынесем из круглой скобки сомножитель  $\omega_0 L = \rho$  и, учитывая (3.3) и (3.9), получим зависимость входного сопротивления  $Z_{вх}$  от относительной частоты  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$  в виде

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{вх}} &= R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j\omega_0 L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 L \omega C} \right) = R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \\
 &= R \left[ 1 + jQ \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) \right] = R \sqrt{1 + Q^2 \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2} e^{j\varphi},
 \end{aligned}$$

где  $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{\omega_0 L \omega C}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Отсюда следует, что АЧХ и ФЧХ сопротивления равны соответственно

$$Z = R \sqrt{1 + Q^2 \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2} \quad (\text{АЧХ}), \quad (3.10)$$

$$\varphi = \arctg Q \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) \quad (\text{ФЧХ}). \quad (3.11)$$

На рис. 3.5 приведена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) входного сопротивления при двух разных добротностях  $Q$ .

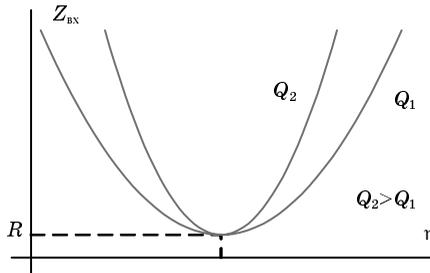


Рис. 3.5

Как видно из АЧХ входного сопротивления, при резонансной частоте  $\eta = 1$ , входное сопротивление цепи минимально возможное  $Z_{\text{вх}} = R$ , поэтому ток при резонансе максимальный.

Рассмотрим подробнее зависимость тока от частоты. В соответствии с законом Ома ток в цепи будет

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{\dot{U}}{R \left[ 1 + jQ \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) \right]} = \frac{U e^{j\psi_U}}{R \sqrt{1 + Q^2 \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2} e^{j\varphi}},$$

тогда АЧХ тока имеет вид

$$I = \frac{U}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}. \quad (3.12)$$

В соответствии с выражением (3.12) на рис. 3.6 построена АЧХ тока для двух значений добротности:  $Q_1$  и  $Q_2$ , причем  $Q_2 > Q_1$ . При резонансной частоте  $\omega$ , равной резонансной  $\omega = \omega_0$ , относительная частота  $\eta = 1$  и ток в цепи  $I = I_0 = \frac{U}{R}$  – максимальный (рис. 3.6).

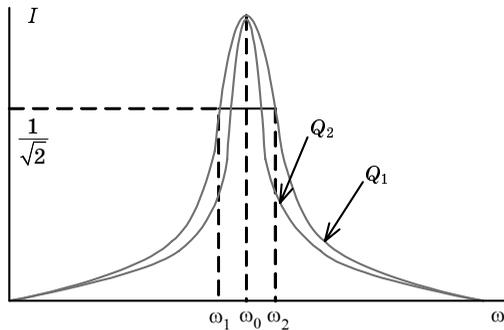


Рис. 3.6

Частотные свойства цепи характеризуются полосой пропускания.

*Полоса пропускания* – область частот, на границах которой ток уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с током при резонансе. Или же – это область частот, на границах которой мощность уменьшается в два раза по сравнению с мощностью, выделяющейся при резонансе. На рис. 3.6 полоса пропускания равна  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Величина, обратная добротности, называется *коэффициентом*

*затухания*  $d = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ . Коэффициент затухания определяет полосу про-

пускания: чем больше добротность, тем меньше коэффициент затухания, тем уже полоса пропускания  $\Delta\omega$  и острее резонансная кривая тока.

Рассмотрим фазочастотную характеристику цепи (ФЧХ). В соответствии с выражением (3.11) зависимость фазы от частоты выражается следующей зависимостью:

$$\psi(\omega) = \text{arctg} Q \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right).$$

На рис. 3.7 приведена ФЧХ цепи в зависимости от относительной частоты  $\eta$  для двух значений добротности  $Q$ , при чем  $Q_2 > Q_1$ .

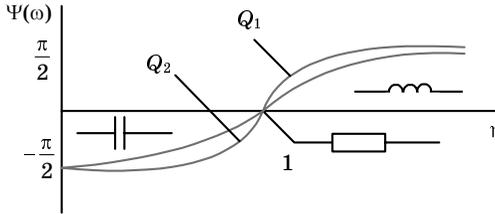


Рис. 3.7

Рассмотрим подробнее резонансные характеристики цепи. Для этого запишем выражения для тока и напряжения на элементах в следующем виде:

$$I = \frac{U}{R\sqrt{1 + R^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \quad U_R = IR,$$

$$U_L = I\omega L = \frac{U\omega L}{R\sqrt{1 + R^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{R\omega C\sqrt{1 + R^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

По полученным выражениям на рис. 3.8 построены резонансные

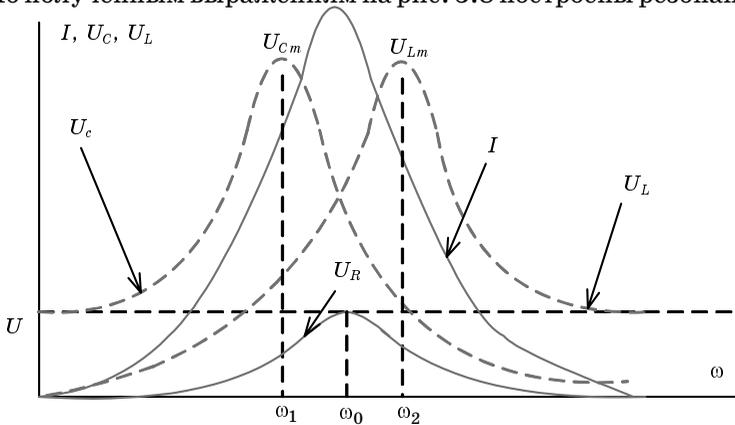


Рис. 3.8

характеристики. Из зависимостей напряжений на емкости и индуктивности видно, что их максимальные значения достигаются при разных частотах. Сдвиг между максимальными значениями напряжений  $U_{C_m}$  и  $U_{L_m}$  определяется добротностью.

Чем выше добротность, тем ближе максимумы напряжений на емкости и индуктивности, т.е. меньше разность частот между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

### 3.3. Резонанс токов в параллельном контуре

Рассмотрим цепь с параллельным соединением  $G, L, C$  (рис. 3.9).

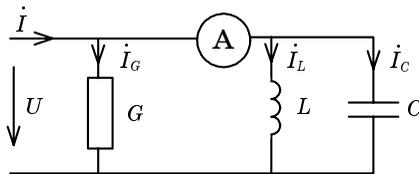


Рис. 3.9

Запишем входную комплексную проводимость и выделим мнимую часть

$$Y_{\text{вх}} = G - j(B_L - B_C) = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

Как известно, при резонансе  $\varphi = \arctg \frac{B_{\text{вх}}}{G} = 0$  и  $B_{\text{вх}} = 0$ , следовательно, реактивные проводимости индуктивности и емкости одинаковы и эта величина называется *волновой проводимостью*  $\gamma$

$$B_{L_0} = B_{C_0} = \gamma. \quad (3.13)$$

Если выразить проводимости через частоту и параметры, то условие резонанса в параллельном контуре (3.13) можно записать по-другому

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C. \quad (3.14)$$

Тогда резонансная частота параллельного контура, индуктивность и емкость связаны следующим образом:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}. \quad (3.15)$$

Резонанс в цепи в соответствии с (3.14) можно достигнуть изменением частоты  $\omega$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$ .

Найдем токи в емкости и индуктивности при резонансе

$$\begin{aligned} \dot{I}_{C0} &= \dot{U}jB_{C0} = \dot{U}j\gamma, \\ \dot{I}_{L0} &= \dot{U}(-j)B_{L0} = -\dot{U}j\gamma. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В соответствии с выражениями для токов строим векторную диаграмму цепи в режиме резонанса (рис. 3.10).

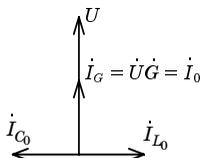


Рис. 3.10

Рассмотрим показания амперметра: так как при резонансе токи в индуктивности и емкости равны и находятся в противофазе, то амперметр в общей ветви показывает нуль. При этом ток на входе цепи:  $\dot{I}_G + \dot{I}_{L0} + \dot{I}_{C0} = \dot{I}_{\text{вх}}$  равен току через проводимость  $G$

$$\dot{I}_G = \dot{I}_{\text{вх}} = \dot{I}_0 = \dot{U}G. \quad (3.17)$$

Из векторной диаграммы видно, что если волновая проводимость  $\gamma > G$ , то при резонансе токи индуктивности и емкости больше входного тока:  $\dot{I}_{L0} > \dot{I}_0$  и  $\dot{I}_{C0} > \dot{I}_0$ . Если учесть (3.16), (3.17) и рассмотреть отношения токов в реактивных элементах к входному току при резонансе, то получим

$$\frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{\gamma}{G} = Q, \quad (3.18)$$

где  $Q$  – добротность параллельного контура.

*Добротностью* параллельного контура  $Q$  называется кратность превышения тока в реактивном элементе к входному току при резонансе. В этом заключается физический смысл добротности. При высокой добротности  $Q$  токи внутри цепи значительно выше входного тока. Поэтому резонанс в параллельном контуре называется резонансом токов.

### 3.4. Частотные характеристики параллельного контура

Рассмотрим сначала зависимости проводимостей ветвей цепи от частоты. Зависимости строятся на основе следующих выражений:

проводимость емкости  $B_C = \omega C$ ; проводимость индуктивности  $B_L = \frac{1}{\omega L}$ ; активная проводимость  $G$ . Полная проводимость цепи

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}.$$

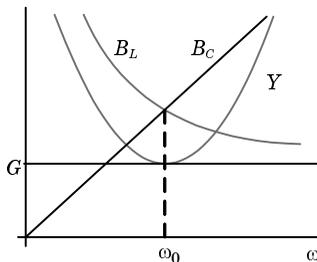


Рис. 3.11

Как видно на рис. 3.11, при резонансе проводимость цепи минимальна и равна активной проводимости. При этом проводимости индуктивности и емкости одинаковы и могут превосходить общую проводимость. Поэтому при резонансе ток в общей ветви (входной ток) может быть меньше тока через реактивный элемент. Их отношение определяется добротностью  $Q$ .

Найдем ФЧХ цепи. Зависимость фазы от частоты определяется, исходя из выражения

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_L - B_C}{G} = \operatorname{arctg} \frac{1/\omega L - \omega C}{G}. \quad (3.19)$$

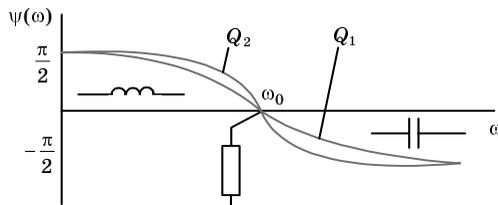


Рис. 3.12

Как видно из ФЧХ цепи, при частоте меньшей резонансной цепь имеет индуктивный характер, а при частоте большей – емкостной (рис. 3.12). Добротность  $Q$  влияет на фазочастотную характеристику

ку параллельного контура ФЧХ аналогично, как и для последовательного контура, т. е. чем выше добротность, тем выше ФЧХ вблизи резонансной частоты  $\omega_0$ .

Резонансные характеристики параллельного соединения  $G, L, C$  при питании от источника напряжения подобны зависимостям проводимостей от частоты, так как выражения для токов отличаются от проводимостей постоянным множителем  $u$ . Токи через проводимость  $G$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и входной ток равны соответственно  $I_G = GU$ ,  $I_L = B_L U$ ,  $I_C = B_C U$ ,  $I = YU$ .

Аналогично, как и для последовательного соединения, возможно ввести понятие полосы пропускания.

*Полоса пропускания* – область частот, на границах которой ток увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с резонансным значением тока.

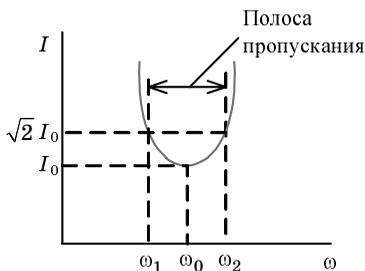


Рис. 3.13

При резонансе ток в цепи минимальный:  $I_0 = Y_0 U = GU$ , так как минимальна полная проводимость цепи (рис. 3.13).

### 3.5. Резонанс в индуктивно связанных цепях

Явление резонанса в связанных цепях широко используется в технике связи и, особенно, в радиотехнике – в передающих и приемных устройствах.

*Связанными* называются цепи, имеющие общую ветвь в действительной или эквивалентной схеме. Примером может служить индуктивная связь, осуществляемая при помощи общего индуктивного сопротивления (рис. 3.14) или путем электромагнитной индукции – трансформаторная связь (рис. 3.15).

Степень связи цепей характеризуется коэффициентом связи  $k$ , который в общем случае представляет собой отношение сопротивления общей ветви к корню квадратному из произведения одноименных с ним сопротивлений каждого из двух связанных контуров, при-

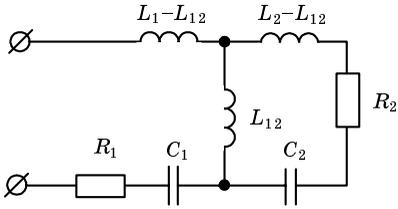


Рис. 3.14

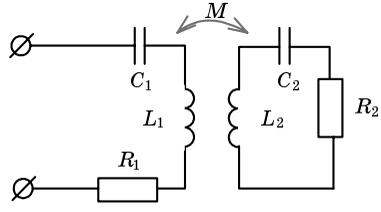


Рис. 3.15

чем в сопротивление контуров должно быть включено и сопротивление общей ветви. Тогда для простой индуктивной связи (рис. 3.14)

$$k_L = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

а для трансформаторной связи (рис. 3.15) получается известное выражение

$$k_L = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (3.20)$$

Оба эти вида индуктивной связи будут эквивалентны друг другу, если полные индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  обоих контуров, соответственно, равны друг другу, а  $L_{12} = M$ . При этом входное сопротивление обоих контуров  $Z_{\text{вх}}$  может быть найдено из эквивалентной одноконтурной схемы (рис. 3.16).

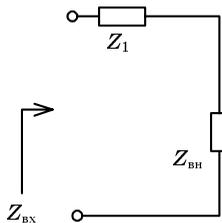


Рис. 3.16

В этой схеме вторичный контур приведен к первичному при помощи вносимого сопротивления. Если пренебречь активным сопротивлением вторичной цепи  $R_2 = 0$ , то входное сопротивление обоих контуров равно

$$Z_{\text{вх}} = U_1 / I_1 = Z_1 + Z_{\text{вн}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}, \quad (3.21)$$

где  $Z_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})$  – комплексное сопротивление первого контура;  $Z_{\text{вн}} = R_{\text{вн}} + jX_{\text{вн}}$  – комплексное вносимое сопротивление;  $R_{\text{вн}}$  – активное вносимое сопротивление;  $X_{\text{вн}} = -X_M^2 / X_2$  – реактивное вносимое сопротивление;  $X_M = \omega M$  – сопротивление взаимной индукции;  $X_2 = X_{L2} - X_{C2}$  – реактивное сопротивление вторичного контура;  $R_{\text{вх}}$ ,  $X_{\text{вх}}$  – входные активное и реактивное сопротивления соответственно.

Входное реактивное сопротивление цепи рис. 3.16 равно

$$X_{\text{вх}} = X_1 - \frac{x_M^2}{x_2} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}. \quad (3.22)$$

Пусть резонансная частота обеих цепей одинакова

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad (3.23)$$

тогда при частоте  $\omega = \omega_0$  реактивное входное сопротивление  $X_{\text{вх}} = -\infty$  и входной ток  $I_1 = 0$ , т. е. в разветвленной части схемы рис. 3.14 и в эквивалентной цепи рис. 3.16 имеет место резонанс токов. При наличии во вторичном контуре небольшого активного сопротивления кривая тока  $I_1(\omega)$  при неизменном действующем значении входного напряжения  $u_1 = \text{const}$  также проходит через минимум, но значение входного тока  $I_{1\text{min}} > 0$  (рис. 3.17).

В исследуемой цепи происходит резонанс напряжений, и входной ток получает максимальное значение, если входное реактивное сопротивление  $X_{\text{вх}} = 0$ . Откуда

$$\left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \omega^2 M^2. \quad (3.24)$$

Если разделить обе части равенства (3.24) на  $\omega L_1 \omega L_2$  и учесть выражения (3.20), (3.23) для резонансной частоты  $\omega_0$  обоих контуров и коэффициента связи  $k$ , то условие резонанса напряжений получает вид

$$\left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2 = k^2,$$

откуда

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \quad (3.25)$$

Следовательно, имеются две частоты  $\omega_1, \omega_2$ , при которых величина  $I_1$  максимальна. Это явление является очень важным свойством индуктивно связанных контуров. Резонансные частоты  $\omega_1, \omega_2$  зависят от коэффициента связи и их обычно называют частотами связи. Расстояние между частотами  $\omega_1, \omega_2$  увеличивается с увеличением коэффициента связи.

Внешний вид резонансных характеристик индуктивно связанных контуров показан на рис. 3.17. На этих резонансных характеристиках отчетливо видны два «горба», соответствующих резонансным частотам.

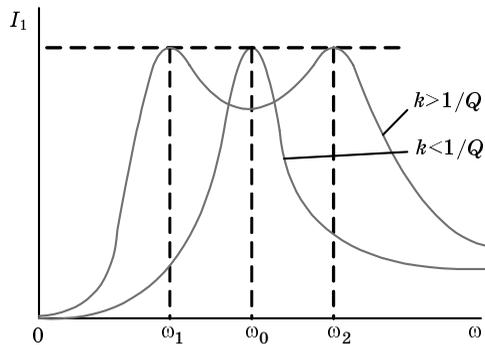


Рис. 3.17

При уменьшении коэффициента связи  $k$  резонансные частоты сближаются и при  $k = 1/Q$  резонансная характеристика контура становится «одногорбой». При этом полоса пропускания связанного резонансного контура в  $\sqrt{2}$  раз шире полосы пропускания одиночного контура при той же добротности.

При сильной связи  $k > 1/Q$  полоса пропускания связанного резонансного контура в 3.1 раз шире полосы пропускания одиночного контура и ближе к прямоугольной форме, т.е. избирательность такого контура лучше, чем у одиночного. Поэтому связанные резонансные контуры используются в цепях с большой полосой пропускания в широкополосных системах.

## 4. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

### 4.1. Взаимная индуктивность. ЭДС взаимоиндукции. Маркировка зажимов

Пусть имеется два контура; первый контур  $1к$  с числом витков  $w_1$ , и второй контур  $2к$  с числом витков  $w_2$ . Условно покажем каждый из контуров в виде одного витка (рис. 4.1).

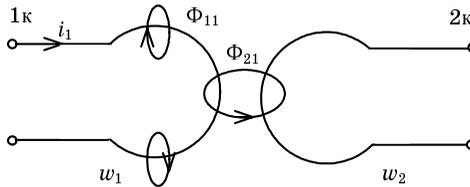


Рис. 4.1

Ток  $i_1$ , протекая в первом контуре, создает магнитное поле. По правилу буравчика находим направление силовых линий. Силовые линии магнитного потока непрерывны и замкнуты. Некоторые из них будут сцепляться со вторым контуром. На рис. 4.1:  $\Phi_{11}$  – поток рассеяния, т.е. поток, образованный током первого контура и сцепляющийся с первым контуром. В свою очередь  $\Phi_{21}$  – это поток взаимной индукции, т.е. поток, образованный током первого контура и сцепляющийся со вторым. В общем случае индексы у магнитного потока записываются так:  $\Phi_{km}$  – поток взаимной индукции, образованный током  $m$ -го контура и сцепляющийся с витками  $k$ -го контура.

Как известно, под индуктивностью понимают отношение потокосцепления  $\Psi$  к току  $i$ , его вызвавшему  $L = \frac{\Psi}{i}$ , Гн, где  $\Psi = w\Phi$  – потокосцепление;  $w$  – число витков;  $\Phi$  – магнитный поток самоиндукции.

*Взаимной индуктивностью* называется отношение потокосцепления взаимной индукции к току, его вызвавшему

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}, \text{ Гн}, \quad (4.1)$$

где  $\Psi_{21} = w_2 \Phi_{21}$ ;  $\Psi_{21}$  – потокосцепление взаимной индукции.

В линейной цепи взаимная индуктивность не зависит ни от потоко-  
сцепления, ни от тока, а определяется

$$M_{21} = \frac{w_1 w_2}{R_M}, \quad (4.2)$$

где  $R_M = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{S}$  – магнитное сопротивление пути замыкания потока  
взаимоиндукции;  $l$  и  $S$  – длина и сечение магнитопровода;  $\mu_r$  – отно-  
сительная магнитная проницаемость сердечника,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ .

Пусть по второй катушке протекает ток  $i_2$ , при этом часть сило-  
вых линий магнитного потока будет сцепляться с витками первого  
контура. Тогда можно ввести потокосцепление взаимной индукции  
первого контура, вызываемое током второго контура.

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}. \quad (4.3)$$

Для линейной цепи выполняется равенство  $M_{12} = M_{21} = M$  – прин-  
цип линейности магнитной цепи.

Всякое изменение магнитного потока во времени порождает ЭДС.  
Найдем ЭДС взаимной индукции

$$e_m = -\frac{d\Psi_m}{dt}. \quad (4.4)$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции

$$e_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{21}i_1) = -M_{21}\frac{di_1}{dt} - i_1\frac{dM_{21}}{dt},$$

но для линейной цепи  $M = \text{const}$  и  $i_1\frac{dM_{21}}{dt} = 0$ , тогда ЭДС взаимной  
индукции

$$e_{21} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}, \quad (4.5)$$

ЭДС взаимной индукции уравновешивается напряжением взаимной  
индукции, например для второго контура

$$e_{21} = -U_{21}, \quad U_{21} = M_{21}\frac{di_1}{dt}. \quad (4.6)$$

В общем случае ЭДС и напряжение взаимной индукции определя-  
ются следующими выражениями:

$$e_M = -M \frac{di}{dt}, \quad (4.7)$$

$$u_M = M \frac{di}{dt}. \quad (4.8)$$

Перейдем от мгновенных значений к комплексным, получим комплексы амплитудных значений ЭДС и напряжения взаимной индукции

$$E_m = -j\omega M \dot{I}_m = -Z_M \dot{I}_m,$$

$$\dot{U}_m = -j\omega M \dot{I}_m = jX_M \dot{I}_m = Z_M \dot{I}_m, \quad (4.9)$$

где  $Z_M = j\omega M = jX_M = X_M e^{j90^\circ}$  – комплексное сопротивление взаимной индукции.

Рассмотрим, как связаны положительные направления тока и напряжения взаимной индукции. Различают так называемые *одноименные (генераторные) зажимы*. Это такая пара зажимов, при втекании тока в которую напряжение взаимной индукции  $u_m$  направлено так же, как и токи, их вызывающие (рис. 4.2). Например, если ток  $i_1$  в первой катушке направлен от зажима в катушку, то во второй катушке он наводит напряжение, направленное от зажима в катушку и, наоборот, если ток  $i_2$  во второй катушке протекает по катушке к зажиму, то напряжение в первой катушке направлено также по катушке к зажиму.

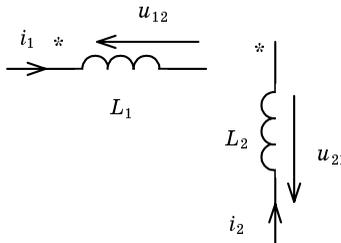


Рис. 4.2

В отличие от индуктивности взаимная индукция  $M$  может быть больше нуля, меньше нуля, равной нулю. Рассмотрим все три случая.

1. *Взаимная индуктивность  $M > 0$ .*

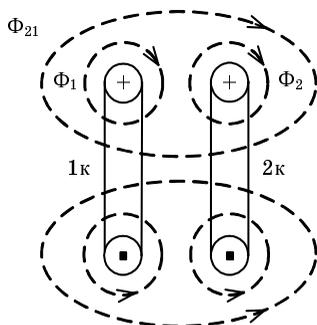


Рис. 4.3

Если поток самоиндукции и взаимной индукции совпадает по направлению, то катушки включены согласо, при этом взаимная индукция  $M > 0$ . Например, на рис. 4.3 поток самоиндукции  $\Phi_2$  совпадает по направлению с потоком взаимной индукции  $\Phi_{21}$ .

2. Взаимная индуктивность  $M < 0$ .

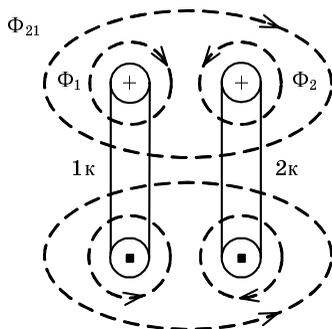


Рис. 4.4

Если потоки самоиндукции и взаимной индукции не совпадают по направлению, имеем встречное включение, при этом  $M < 0$  (рис. 4.4). Поток  $\Phi_2$  не совпадает по направлению с потоком  $\Phi_{21}$ .

3. Взаимная индуктивность  $M = 0$ .

В этом случае оси катушек должны быть взаимно перпендикулярными (рис. 4.5).

Рассмотрим теперь, как определить одноимённые зажимы, т. е. выполнить маркировку зажимов. Для этого необходимо одну из катушек подсоединить к источнику входного напряжения  $u_1$ , а вторую

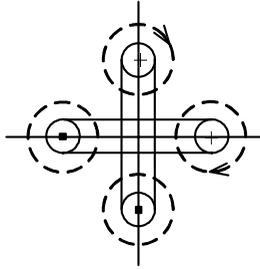


Рис. 4.5

катушку одним из концов подсоединить к первой и измерить три напряжения: входное (напряжение на первой катушке), напряжение на второй катушке и общее (рис. 4.6). При этом в зависимости от того какие зажимы катушек соединены, могут встретиться два случая. Рассмотрим эти случаи.

1. *Предположим, что одноименные зажимы 1 и 4.*

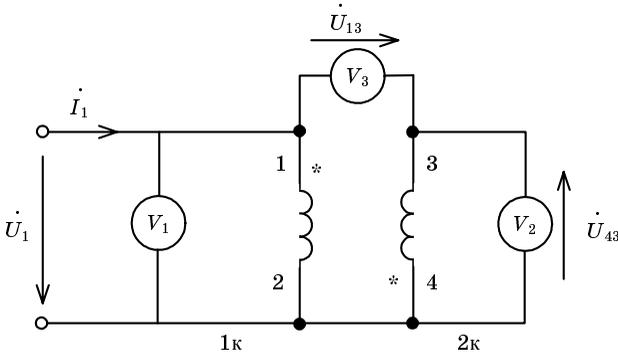


Рис. 4.6

Тогда ток  $I_1$  создает во втором контуре напряжение взаимной индукции  $u_{43}$ . По ЗНК имеем

$$\dot{U}_{13} - \dot{U}_{43} - \dot{U}_1 = 0$$

или

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{43}. \quad (4.10)$$

2. *Теперь пусть одноименными зажимами будут 1–3.*

При этом напряжение  $u_{43}$  на второй катушке поменяло свое направление.

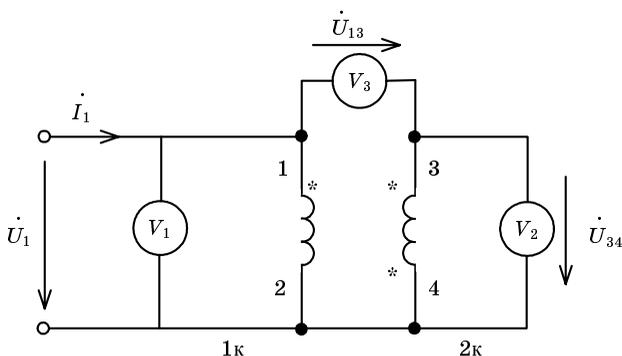


Рис. 4.7

Тогда общее напряжение

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 - \dot{U}_{34}. \quad (4.11)$$

*Вывод.* Если соединяются разноименные зажимы, то общее напряжение на двух катушках  $\dot{U}_{13}$  получается больше входного (первый случай на рис. 4.6). Если соединяются одноименные зажимы, то  $\dot{U}_{13}$  не может быть больше входного (второй случай на рис. 4.7).

#### 4.2. Последовательное включение двух индуктивно связанных катушек

1. Рассмотрим согласное включение (рис. 4.8).

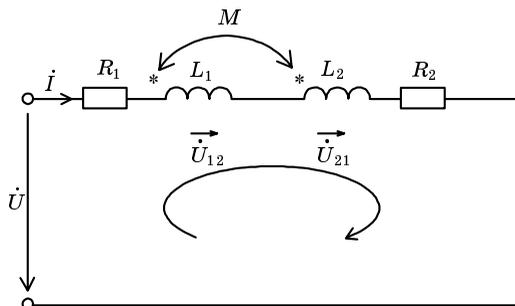


Рис. 4.8

Допустим, что катушки соединены согласно, т.е. конец предыдущей катушки соединен с началом следующей при условии, что они намотаны в одну сторону, ток втекает в одноименные зажимы для первой и второй катушек. Тогда по ЗНК:

$$\dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} + \dot{U}_{12} + \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} + \dot{U}_{21} = \dot{U}, \quad (4.12)$$

где

$$\dot{U}_{12} = j\omega M \dot{I} = \dot{U}_{21} \quad (4.13)$$

– напряжения взаимной индукции на первой и второй катушках.

Подставим (4.13) в (4.12) и получим

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = \dot{U}.$$

Обозначим через

$$L_{1\text{ЭКВ}} = L_1 + L_2 + 2M \quad (4.14)$$

– индуктивность двух, согласованно включенных катушек при их последовательном соединении.

2. *Встречное включение (рис. 4.9).*

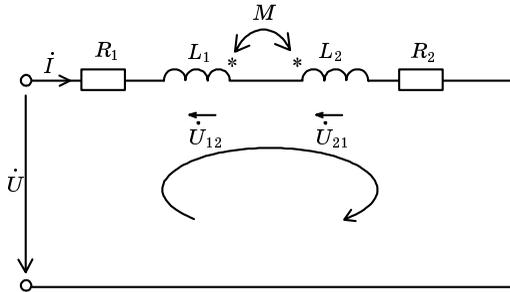


Рис. 4.9

Поменяем у одной из катушек начало и конец. Тогда в соответствии с ЗНК:

$$\dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - \dot{U}_{12} + \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - \dot{U}_{21} = \dot{U}.$$

Аналогично найдем эквивалентную индуктивность при встречном включении

$$L_{2\text{ЭКВ}} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (4.15)$$

Вычитая из (4.14) выражение (4.15), определим взаимную индуктивность через эквивалентные индуктивности в виде

$$M = \frac{L_{1\text{ЭКВ}} - L_{2\text{ЭКВ}}}{4}. \quad (4.16)$$

Рассмотрим, как экспериментально определить случаи согласного и встречного включения. Очевидно, что при встречном включении эквивалентное реактивное сопротивление  $X_{2\text{ЭКВ}} = \omega L_{2\text{ЭКВ}}$  получится меньше, чем при согласном  $X_{1\text{ЭКВ}} = \omega L_{1\text{ЭКВ}}$ , так как  $L_{1\text{ЭКВ}} > L_{2\text{ЭКВ}}$ . Тогда при неизменных параметрах цепи ток при встречном включении окажется больше, чем при согласном. Теперь можно сформулировать правило определения одноименных зажимов: чтобы экспериментально определить одноименные зажимы, нужно включить исследуемые катушки и измерить ток. Где значение тока выше, там случай встречного включения. Величина взаимной индукции может быть найдена экспериментально, исходя из выражения (4.16).

### 4.3. Определение взаимной индукции по методу холостого хода

Для этого необходимо включить первую катушку на источник синусоидального напряжения. Затем измерить ток в первой катушке и напряжение на второй катушке (рис. 4.10).

Напряжение на второй катушке равно ЭДС взаимной индукции и определяется выражением

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 = \dot{E}_2.$$

Измерив ток и напряжение, можно найти взаимную индуктивность  $M$  исходя из выражения

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1}.$$

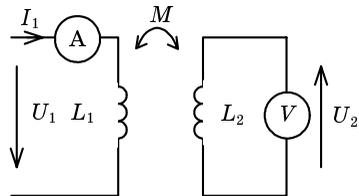


Рис. 4.10

Чем выше сопротивление вольтметра, тем ближе значения напряжения и ЭДС, тем точнее измерение величины взаимной индукции  $M$  по методу холостого хода.

### 4.4. Анализ сложных цепей с взаимной индукцией

При анализе сложных цепей произвольно задаются направления токов. В зависимости от направления токов относительно одноименных зажимов указывают направления напряжений взаимной индукции. Затем составляют уравнения для цепи обычными методами расчета в зависимости от ее сложности. Однако применение метода узловых напряжений для цепи с взаимной индукцией напрямую невозможно. Необходимо ввести понятие инверсной индуктивности либо воспользоваться эквивалентными схемами замещения, в которых индуктивно связанные контуры преобразованы в контуры с электри-

ческой связью (см.  $T$ -образную схему замещения трансформатора).

Например, составим уравнения по ЗНК для контура, положительное направление которого указано по часовой стрелке (рис. 4.11).

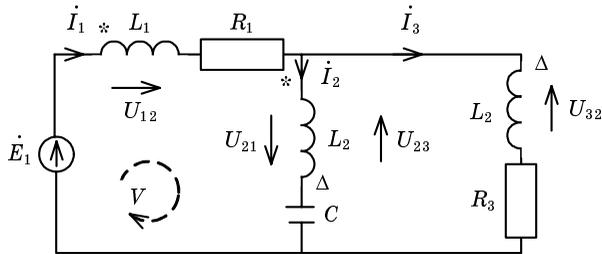


Рис. 4.11

Пусть катушки  $L_1$  и  $L_2$  связаны взаимной индуктивностью  $M_{12} = M_{21}$ . Одноименные зажимы указаны звездочками (\*). Кроме этого, индуктивность  $L_2$  связана с  $L_3$  взаимной индуктивностью  $M_{23}$ , их одноименные зажимы на схеме обозначены  $\Delta$ . Указывая направления напряжений взаимной индукции и составляя ЗНК, получим

$$I R_1 + j\omega L_1 I_1 + U_{12} + U_{21} - U_{23} + j\omega L_2 I_2 - j \frac{1}{\omega C} I_2 = E_1,$$

где

$$\dot{U}_{12} = jM_{12}\dot{I}_2, \quad \dot{U}_{21} = jM_{21}\dot{I}_1, \quad \dot{U}_{23} = jM_{23}\dot{I}_3.$$

#### 4.5. Линейный трансформатор

*Трансформатор* – это статическое устройство, предназначенное для передачи энергии из одной цепи в другую, электрически с ней не связанную, т. е. посредством взаимной индукции (магнитного поля).

Трансформаторы содержат две (может больше) катушки (обмотки) с числом витков  $w_1$  и  $w_2$ , намотанных на общем сердечнике (рис. 4.12). Будем считать, что рабочая точка выбирается на линейном участке кривой намагничивания сердечника, т. е. трансформатор – линейный. Магнитный поток, который частично замыкается по воздуху, носит название потока рассеяния  $\Phi_\delta$  (см. эквивалентную схему замещения трансформатора на рис. 4.13). Поток в сердечнике  $\Phi = \Phi_{12} - \Phi_{21}$ , где  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$  – потоки взаимной индукции, вызванные первичным током  $I_1$  и вторичным током  $I_2$ , соответственно.

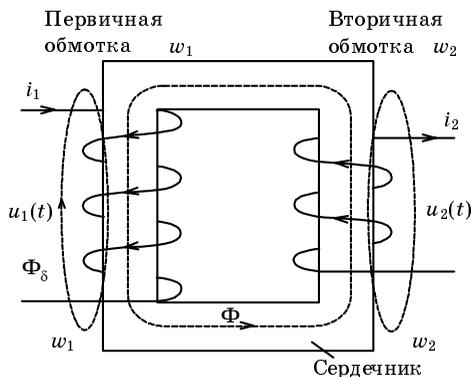


Рис 4.12

Отсутствие сердечника также обеспечивает линейность характеристик. Однако при этом ослабляется электромагнитная связь между катушками, которая характеризуется коэффициентом связи  $K_{св} = M / \sqrt{L_1 L_2}$ . У широко распространенных трансформаторов с ферромагнитными сердечниками  $K_{св} = 0.93 \div 0.98$ , а без сердечника —  $K_{св} < 0.8$ . Кроме того, у трансформатора без сердечника на порядок меньше величины индуктивностей катушек  $L_1$  и  $L_2$ , что приводит к увеличению относительного влияния активных сопротивлений обмоток. Указанные особенности воздушного трансформатора сказываются лишь количественно на его параметрах, не затрагивая существа электромагнитных процессов и характера получаемых зависимостей.

Электромагнитные процессы в трансформаторе описываются уравнениями напряжений Кирхгофа, составленными для электрической схемы, приведенной на рис. 4.13:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= R_1 I_1 + jX_1 I_1 - jX_M I_2, \\
 U_2 &= jX_M I_1 - R_2 I_2 - jX_2 I_2,
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

где  $R_1, X_1 = \omega L_1$  и  $R_2, X_2 = \omega L_2$  — активные и индуктивные сопротивления обмоток;  $X_M = \omega M$  — сопротивление взаимной индукции

Так как у трансформатора обычно  $R_1 \ll \omega L_1$ , то для упрощения некоторых выводов будем пренебрегать  $R_1$ . Физический смысл уравнений (4.17) можно пояснить следующим образом. При подключении первичной катушки к источнику с гармоническим напряжением  $u_1$  возникает переменный ток  $I_1$  и обусловленный им переменный магнитный поток самоиндукции. Этот поток индуди-

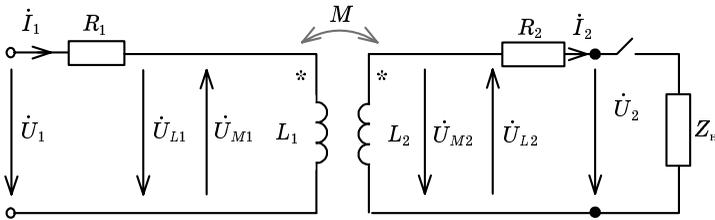


Рис. 4.13

рует в витках первичной катушки ЭДС, которая уравнивается напряжением самоиндукции  $\dot{U}_{L_1} = jX_L \dot{I}_1$ . Часть потока, которая сцепляется с витками второй катушки (поток взаимной индукции), также индуцирует во второй катушке ЭДС, которая учитывается во втором уравнении системы (4.17) как напряжение взаимной индукции  $\dot{U}_{M_2} = jX_M \dot{I}_1$ ; ЭДС взаимной индукции является причиной появления на зажимах второй катушки напряжения  $u_2$ . При отсутствии тока  $I_2$  (вторичная цепь разомкнута,  $Z_H = \infty$ ) режим работы трансформатора называется холостым ходом. Система уравнений (4.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= jX_1 \dot{I}_{10}, \\ \dot{U}_{20} &= jX_M \dot{I}_{10}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $I_{10}$  – ток холостого хода первичной цепи;  $u_{20}$  – вторичное напряжение при холостом ходе.

Из равенства (4.18) получим при пренебрежении  $R_1$  и  $R_2$  соотношение между напряжениями

$$\frac{U_1}{U_{20}} = \frac{X_1}{X_M} = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} \sqrt{\frac{X_1 X_2}{X_M^2}} = \frac{n}{K_{CB}}, \quad (4.19)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} = \frac{w_1}{w_2} \quad (4.20)$$

– коэффициент трансформации;

$$K_{CB} = \frac{X_M}{\sqrt{X_1 X_2}} \quad (4.21)$$

– коэффициент связи.

У трансформаторов с ферромагнитным сердечником  $K_{\text{св}} \cong 1$  и  $\frac{U_1}{U_{20}} \cong n = \frac{w_1}{w_2}$ , а у трансформаторов без сердечника надо учитывать в формуле (4.19) величину  $K_{\text{св}}$ . Отсюда видно, что трансформатор преобразует величину напряжения в зависимости от соотношения числа витков  $w_1$  и  $w_2$ , т. е. коэффициента трансформации  $n$ . При  $n > 1$  напряжение понижается, при  $n < 1$  повышается.

В режиме нагрузки, т. е. при подключении к зажимам второй катушки сопротивления  $Z_{\text{н}}$  (рис. 4.13) возникает ток  $I_2$ , который, в свою очередь, создает свой магнитный поток самоиндукции. Этот поток индуцирует в витках второй катушки ЭДС, которая во втором уравнении системы (4.17) учитывается как напряжение  $\dot{U}_{L2} = jX_2 \dot{I}_2$ , совпадающее по направлению с током  $I_2$ . Часть потока, созданного током  $I_2$ , сцепляется с витками первой катушки (поток взаимной индукции) и индуцирует в них ЭДС. Эта ЭДС в первом уравнении системы (4.17) учитывается как напряжение взаимной индукции  $\dot{U}_{\text{м1}} = jX_{\text{м}} \dot{I}_2$ , которое направлено относительно одноименных зажимов, согласно правилу Ленца, так же, как вызвавший его ток  $\dot{I}_2$ , т. е. навстречу напряжению  $\dot{U}_{L1}$ . Поэтому напряжение взаимной индукции входит в первое уравнение системы (4.17) со знаком минус. Отсюда следует, что ток  $\dot{I}_1$  должен измениться, обычно возрасти в такой степени, чтобы увеличение напряжения  $\dot{U}_{L1} = jX_1 \dot{I}_1$  компенсировало возникшее напряжение взаимной индукции  $\dot{U}_{\text{м1}} = jX_{\text{м}} \dot{I}_2$ . Значение тока  $\dot{I}_1$  при нагрузке, т. е. при появлении тока  $\dot{I}_2$ , может быть получено из первого уравнения системы (4.17) при пренебрежении величиной  $R_1$  следующим образом:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 + jX_{\text{м}} \dot{I}_2}{jX_1} = \frac{\dot{U}_1}{jX_1} + \frac{X_{\text{м}}}{X_1} \dot{I}_2 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1\text{н}}, \quad (4.22)$$

где  $\dot{I}_{1\text{н}} = \frac{X_{\text{м}}}{X_1} \dot{I}_2 = \frac{K_{\text{св}}}{n} \dot{I}_2$  – нагрузочная составляющая первичного тока, вызванная током нагрузки  $I_2$ .

Таким образом, при нагрузке в первичном токе к току холостого хода  $\dot{I}_{10}$  добавляется нагрузочная составляющая  $\dot{I}_{1\text{н}}$ , обеспечивающая передачу энергии во вторичную цепь. Это можно показать следующим образом:

$$S_{1\text{н}} = U_1 I_{1\text{н}} = U_{20} \frac{n}{K_{\text{св}}} \frac{K_{\text{св}}}{n} I_2 = U_{20} I_2 = S_2. \quad (4.23)$$

Выражение для напряжения на зажимах вторичной цепи при нагрузке может быть получено из второго уравнения системы (4.17)

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= jX_M(\dot{I}_{10} + \dot{I}_{1н}) - R_2\dot{I}_2 - jX_2\dot{I}_2 = jX_M\dot{I}_{10} - j\left(X_2 - \frac{X_M}{X_1}\right)\dot{I}_2 - R_2\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_{20} - jX_2(1 - K_{св}^2)\dot{I}_2 - R_2\dot{I}_2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует, что изменение  $U_2$  при нагрузке обусловлено несовершенной связью и падением напряжения на  $R_2$ . На величине напряжения  $U_2$  сказывается также неучтенное падение напряжения  $R_1I_1$ , которое уменьшает  $U_{20}$ .

При исследовании цепей с трансформатором его принято заменять эквивалентной  $T$ -образной схемой замещения. Получим уравнения на основе уравнений трансформатора (4.17). К первому уравнению прибавим и вычтем слагаемое  $\pm jX_M I_1$ , а ко второму  $\pm jX_M I_2$ . Сгруппируем слагаемые и получим уравнения для  $T$ -образной схемы трансформатора в виде

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + j(X_1 - X_M)\dot{I}_1 + jX_M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2), \\ \dot{U}_2 = jX_M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - R_2\dot{I}_2 - j(X_2 - X_M)\dot{I}_2. \end{cases} \quad (4.25)$$

Данной системе уравнений соответствует схема на рис. 4.14.

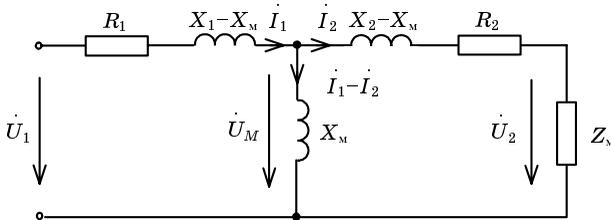


Рис. 4.14

В данной схеме отсутствует связь за счет взаимной индукции вторичной обмотки. Она заменена электрической связью первичного и вторичного контуров за счет сопротивления  $X_M$ . Часто используется приведенная  $T$ -образная схема замещения трансформатора (рис. 4.15). В этой схеме вторичная цепь трансформатора приведена к первичной путем замены числа витков  $w_2$  на  $w'_2 = w_1 = nw_2$ . Это необходимо для того, чтобы избежать появления в эквивалентной схеме отрицательного индуктивного сопротивления  $(X_1 - X_M)$ , если  $X_M > X_1$ , или  $(X_2 - X_M)$ , при  $X_M > X_2$ . Для того чтобы при приведении влияние

вторичной цепи на первичную не изменялось, параметры вторичной цепи приведенного трансформатора надо изменять по формулам

$$X'_M = nX_M, \quad X'_2 = n^2X_2, \quad R'_2 = n^2R_2, \quad Z'_H = n^2Z_H. \quad (4.26)$$

Вторичные токи и напряжения в приведенном трансформаторе также будут

$$I'_2 = \frac{1}{n}I_2, \quad U'_2 = nU_2. \quad (4.27)$$

При замене приведенными величинами параметров в уравнениях (4.25) последние примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= R_1\dot{I}_1 + jX_{S1}\dot{I}_1 + jX'_M(\dot{I}_1 - \dot{I}'_2), \\ \dot{U}'_2 &= jX'_M(\dot{I}_1 - \dot{I}'_2) - R'_2\dot{I}'_2 - jX'_{S2}\dot{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где  $X_{S1} = X_1 - X_M$  и  $X'_{S2} = X_2 - X'_M$  — индуктивные сопротивления рассеяния первичной и приведенной вторичной цепи.

Этим уравнениям соответствует приведенная  $T$ -образная схема замещения трансформатора, изображенная на рис. 4.15. В этой схе-

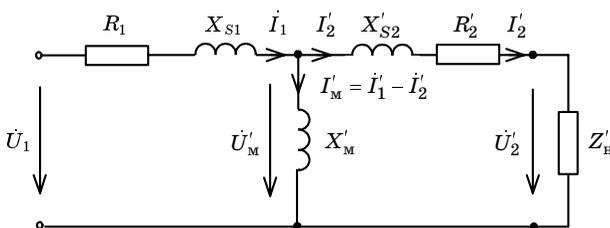


Рис. 4.15

ме замещения первичные ток и напряжение такие же, как и в исходном трансформаторе, а вторичные (приведенные) отличаются в  $n$  раз, согласно формуле (4.27). Пользуясь схемой замещения, очень удобно определять токи и напряжения, трансформатора в том или ином заданном режиме. Например, можно задать вторичный ток и напряжение, и вычислить первичный ток и входное напряжение. При этом все требуемые величины, согласно схеме замещения, вычисляются по следующим формулам:

$$\dot{U}'_{R2} = \dot{R}'_2\dot{I}'_2; \quad \dot{U}'_{S2} = jX'_{S2}\dot{I}'_2; \quad \dot{U}'_M = \dot{U}'_2 + \dot{U}'_{R2} + \dot{U}'_{S2}; \quad \dot{I}'_M = \frac{\dot{U}'_M}{jX'_M},$$

$$\dot{I}' = \dot{I}'_m + \dot{I}'_2; \quad \dot{U}_{R1} = R_1 \dot{I}'_1; \quad \dot{U}_{S1} = jX_{S1} \dot{I}'_1; \quad \dot{U}'_1 = \dot{U}'_m + \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{S1}. \quad (4.29)$$

Построим векторную диаграмму для приведенного трансформатора (рис. 4.16). За исходный вектор примем ток  $\dot{I}'_2$ . Учитывая в зависимости от сопротивления нагрузки угол сдвига  $\varphi_n$  между током и напряжением на нагрузке, строим  $\dot{U}'_2$ , а затем напряжения на активном  $\dot{I}'_2 R'_2$  и реактивном сопротивлении рассеивания  $jX'_{S2} \dot{I}'_2$  вторичной обмотки.

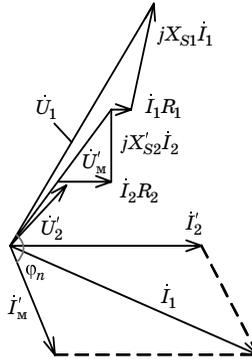


Рис. 4.16

Сумма векторов  $\dot{U}'_2 + \dot{I}'_2 R'_2 + jX'_{S2} \dot{I}'_2 = \dot{U}'_m$  дает напряжение на индуктивном сопротивлении  $X'_m$  контура намагничивания. При этом намагничивающий ток  $\dot{I}'_m = \dot{I}'_1 - \dot{I}'_2$  отстает от напряжения  $\dot{U}'_m$  на  $90^\circ$  (ток в индуктивности отстает от напряжения). Затем строим первичный ток трансформатора в соответствии с выражением  $\dot{I}'_1 = \dot{I}'_m + \dot{I}'_2$ , и откладываем вектор падения напряжения на активном  $\dot{I}'_1 R_1$  и  $jX_{S1} \dot{I}'_1$  реактивном сопротивлениях первичной обмотки. Замыкающий вектор определяет приложенное входное напряжение  $\dot{U}'_1$ .

Ввиду того, что вторичные напряжение  $\dot{U}'_2$  и ток  $\dot{I}'_2$  приведены к первичной обмотке, т. е. изменены пропорционально коэффициенту трансформации  $n$  (4.27), то данная схема приведенного трансформатора (рис 4.15) не эквивалентна исходной схеме трансформатора. Для того чтобы она стала эквивалентной заданной, введем так называемый идеальный трансформатор.

*Идеальный трансформатор* – это такой трансформатор, у которого выполняется следующее условие:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{w_1}{w_2} = n \quad (4.30)$$

– коэффициент трансформации.

Идеальный трансформатор не имеет потерь энергии, и при разомкнутой вторичной обмотке через его первичную обмотку ток не проходит. Реальный трансформатор будет иметь характеристики идеального, если коэффициент связи  $k_{св} = 1$ ,  $R_1 = R_2 = 0$  и  $\omega L \gg 0$  так, что ток холостого хода  $I_{10} = 0$ .

Дополнив схему рис. 4.15 идеальным трансформатором, получим эквивалентную схему трансформатора с идеальным трансформатором (рис. 4.17).

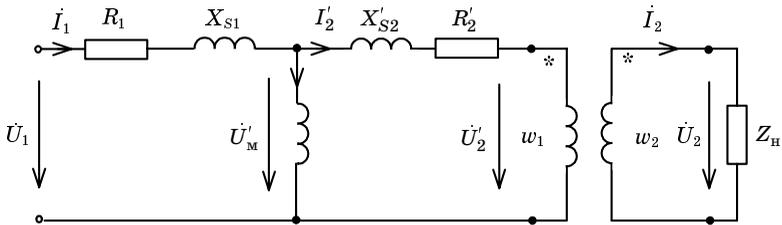


Рис. 4.17

Полученная схема на рис. 4.17 теперь эквивалентна схеме реального трансформатора и может быть использована при расчете цепей.

#### 4.6. Входные сопротивления трансформатора. Одноконтурная схема замещения

Возьмем уравнение трансформатора (4.17) предыдущего раздела

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 R_1 + jX_1 \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= jX_M \dot{I}_1 - \dot{I}_2 R_2 - jX_2 \dot{I}_2, \end{aligned}$$

и выразим напряжение на нагрузке

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H = \dot{I}_2 (R_H + jX_M). \quad (4.31)$$

Подставив (4.31) во второе уравнение системы (4.17), выразим ток  $\dot{I}_2$  в виде

$$\dot{I}_2 = -\frac{jX_M \dot{I}_1}{R_2 + R_H + j(X_2 + X_H)} = -\frac{jX_M \dot{I}_1}{R_{II} + jX_{II}}, \quad (4.32)$$

где  $R_{II} = R_2 + R_H$ ,  $X_{II} = X_2 + X_H$  – активное и реактивное сопротивления входной цепи соответственно.

Подставим (4.32) в первое уравнение системы (4.17) и получим

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 + jX_1 \dot{I}_1 - \frac{X_M^2}{R_{II} + jX_{II}}.$$

Домножив и разделив третье слагаемое на число сопряженное знаменателю, будем иметь

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 [R_1 + \Delta R + j(X_1 + \Delta X)], \quad (4.33)$$

где  $\Delta R = \frac{X_M^2}{R_{II}^2 + jX_{II}^2} R_{II}$ ,  $\Delta X = -\frac{X_M^2}{R_{II}^2 + jX_{II}^2} X_{II}$  – вносимые активное и реактивное сопротивления соответственно.

Исходя из (4.33), входное сопротивление трансформатора

$$Z_{1вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + \Delta R + j(X_1 + \Delta X) = R_1 + jX_1 + Z_{вн} = Z_1 + Z_{вн} \quad (4.34)$$

существенным образом зависит от вносимого сопротивления  $Z_{вн} = \Delta R + j\Delta X$ .

Выражению (4.34) соответствует следующая одноконтурная схема замещения трансформатора (рис. 4.18).

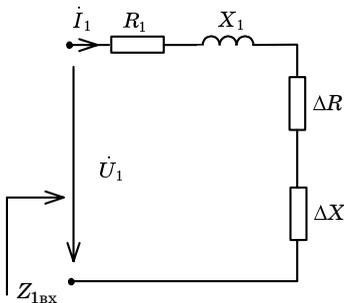


Рис. 4.18

В этой схеме влияние вторичного контура на первичный учитывается вносимым сопротивлением. Причем активное вносимое сопро-

тивление характеризует активную мощность, которая передается из первичной обмотки во вторичную. Реактивное сопротивление  $\Delta X$  учитывает взаимодействие магнитных полей первичной и вторичной обмотки. Если характер нагрузки активно-индуктивный, то  $\Delta X < 0$  и вторичная обмотка действует размагничивающим образом на первичную, с ростом тока нагрузки первичный ток должен возрасти, чтобы скомпенсировать это размагничивающее действие. При емкостном характере контура  $\Delta X > 0$  и вторичная обмотка действует намагничивающим образом на первичную. Следовательно, с ростом тока нагрузки первичный ток падает, чтобы эквивалентный поток остался неизменным.

Найдем входное сопротивление идеального трансформатора. Исходя из (4.30), получим

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2 \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = n^2 Z_{\text{н}}. \quad (4.35)$$

Входное сопротивление  $Z_{1\text{вх}}$  зависит от сопротивления нагрузки и, следовательно, идеальный трансформатора изменяет (преобразует) сопротивление нагрузки.

Поэтому реальные трансформаторы, по свойствам приближающиеся к идеальным, используются как согласующие трансформаторы для согласования сопротивлениями нагрузки с выходным сопротивлением предыдущего устройства, что позволяет передать максимальную мощность. Например, на рис. 4.19 условно показан выходной каскад усилителя низкой частоты, нагруженного динамиком (громкоговоритель –  $\Gamma_{\text{г}}$ ).

Коэффициент трансформации трансформатора определяется на основании

$$n = \frac{w_1}{w_2} = \sqrt{\frac{R_{1\text{вх}}}{R_{\text{н}}}},$$

где  $R_{\text{н}}$  – активное сопротивление нагрузки (громкоговорителя);  $R_{1\text{вх}}$  – входное сопротивление трансформатора, которое должно равняться выходному сопротивлению выходного каскада (транзистора).

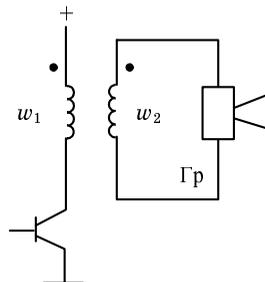


Рис. 4.19

#### 4.7. Автотрансформатор

Автотрансформатор отличается от трансформатора тем, что его

обмотка низшего напряжения является частью обмотки высшего напряжения (см. рис 4.20)

Уравнения для автотрансформатора имеют вид

$$\dot{U}_1 = (R_1 + j(X_1 + X_M))\dot{I}_1 + [R_2 + j(X_2 + X_M)](\dot{I}_1 - \dot{I}_2),$$

$$U = [R_2 + j(X_2 + X_M)]\dot{I}_1 - (R_2 + jX_2)\dot{I}_2.$$

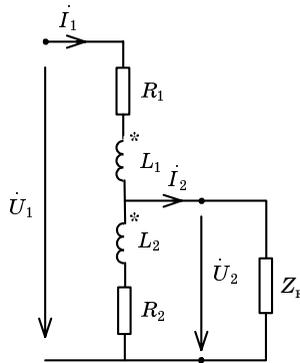


Рис. 4.20

Этим уравнениям соответствует схема замещения автотрансформатора на рис. 4.21.

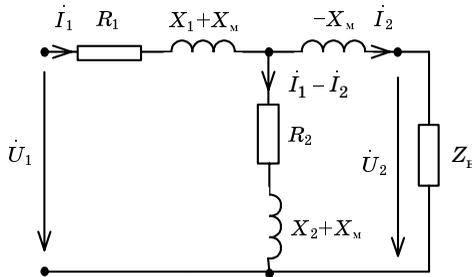


Рис. 4.21

Правая ветвь схемы состоит из отрицательного индуктивного сопротивления  $X_M$ , которое не может быть реализовано на пассивных элементах. Поэтому данная схема может быть использована только при расчетах. Обозначим индуктивность каждого витка через  $L$ , общее число витков  $w = w_1 + w_2$ , где  $w_2$  — число витков обмотки низшего напряжения. Приняв коэффициент связи  $k_{св} = 1$ , т. е. пренебрегая

рассеиванием, получим схему замещения автотрансформатора на рис. 4.22.

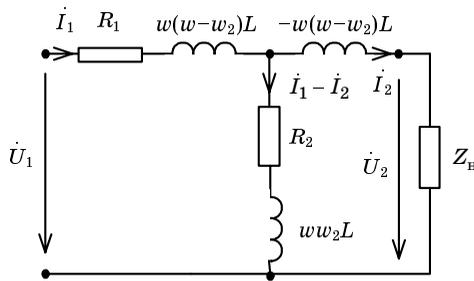


Рис. 4.22

В режиме холостого хода коэффициент трансформации автотрансформатора  $n = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{w}{w_2}$ . При нагрузке подводимая к автотрансформатору мощность передается в нагрузку как посредством взаимной индукции (через магнитное поле), так и непосредственно через электрическую связь.

Применение автотрансформатора вместо обычного трансформатора той же мощности и с таким же коэффициентом трансформации дает экономию в меди, затрачиваемой на обмотку. Экономия достигается за счет сокращения общего числа витков и уменьшения толщины провода вторичной обмотки, через который проходит ток, равный разности первичного и вторичного токов.

## 5. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 5.1. Разложение периодической функции в ряд Фурье

Различные электронные устройства: мультивибраторы, инверторы, триггеры, выпрямители и т. д., вырабатывают периодические несинусоидальные напряжения различной форме. Например, на рис. 5.1, *а* изображена временная диаграмма выходного напряжения триггера, а на рис. 5.1, *б* – напряжение на отклоняющих пластинах кинескопа.

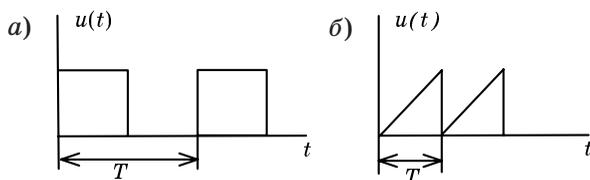


Рис. 5.1

Для расчета цепей при периодических несинусоидальных воздействиях можно воспользоваться принципом наложения. Для этого необходимо представить функцию в виде ряда Фурье.

Как известно из математики функция  $f(t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая на всяком конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть представлена рядом (5.1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (5.1)$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad (5.2)$$

– коэффициенты ряда Фурье;  $n = 0, 1, 2, \dots$  – целое число;  $T$  – период;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – круговая частота, рад/с;  $f = \frac{1}{T}$  – циклическая частота, Гц.

Запишем ряд (5.1) через одну тригонометрическую функцию

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \psi_n), \quad (5.3)$$

где  $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\psi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$ .

Рассмотрим более подробно слагаемые в выражении (5.3). Пусть  $n = 0$ , тогда из (5.2) имеем

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

– среднее значение функции  $f(t)$  за период ее изменения (постоянная составляющая функции).

Если  $n = 1$ , то слагаемое в (5.3)  $C_1 \sin(\omega t + \psi_1)$  представляет собой синусоидальную функцию. Ее называют основной (первой) гармоникой (тока, напряжения, ЭДС).

Для  $n=2$  из (5.3) имеем  $C_2 \sin(2\omega t + \psi_2)$  – вторая гармоника (тока, напряжения, ЭДС). Для произвольного  $n=k$  по аналогии с предыдущим,  $C_k \sin(k\omega t + \psi_k)$  –  $k$ -я гармоника, частота которой в  $k$  раз больше частоты основной гармоники.

Условимся порядковый номер гармоники обозначать сверху символа в круглых скобках, например, если ток  $i(t)$  разложен в ряд Фурье, то его слагаемые следует записать следующим образом:  $i(t) = i^{(0)} + i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) + \dots + i^{(n)}(t) + \dots$

В зависимости от вида функции некоторые составляющие ряда могут отсутствовать.

Если функция симметрична относительно оси абсцисс со сдвигом в  $T/2$ , то отсутствуют четные гармоники с номерами  $n = 2, 4, 6, \dots$ . Если площадь, ограниченная положительной полуволной, равна площади, ограниченной отрицательной полуволной, то нет постоянной составляющей  $\frac{a_0}{2}$ .

На рис. 5.2 представлена диаграмма разложения прямоугольных разнополярных импульсов в ряд Фурье, согласно выражению

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u^{(1)}(t) + u^{(3)}(t) + u^{(5)}(t) + \dots = \\
 &= \frac{4}{\pi} U_0 \sin \omega_0 t + \frac{4}{3\pi} U_0 \sin 3\omega_0 t + \frac{4}{5\pi} U_0 \sin 5\omega_0 t + \dots
 \end{aligned}$$

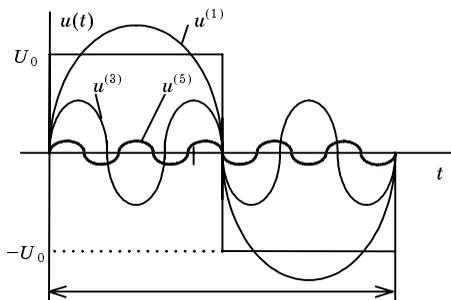


Рис. 5.2

При анализе цепей несинусоидального тока удобно гармонический состав тока (напряжения, ЭДС) представлять в виде амплитудного и фазового дискретных (линейчатых) спектров.

*Под амплитудным линейчатым спектром* понимают зависимость амплитуды тока (напряжения, ЭДС) от частоты (порядкового номера гармоники).

*Под фазовым линейчатым спектром* понимают зависимость фазы тока (напряжения) от частоты (порядкового номера). На рис. 5.3

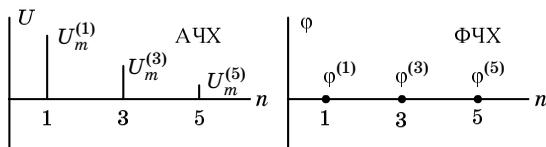


Рис. 5.3

показаны амплитудный (АЧХ) и фазовый (ФЧХ) дискретные спектры для сигнала, изображенного на рис. 5.2.

Амплитудные значения  $1, 3, 5$  гармоник и их начальные фазы при этом равны соответственно

$$\frac{4}{\pi} U_0 = U_m^{(1)}, \quad \frac{4}{3\pi} U_0 = U_m^{(3)}, \quad \frac{4}{5\pi} U_0 = U_m^{(5)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(3)} = \varphi^{(5)} = 0.$$

## 5.2. Расчет цепей при периодическом воздействии

Рассмотрим двухполюсник, на входе которого действует источник несинусоидальной периодической ЭДС, представленной рядом Фурье (рис. 5.4)

$$e(t) = e^{(0)} + e^{(1)}(t) + e^{(2)}(t) + \dots + e^{(n)}(t) + \dots$$

Поскольку цепь линейная, то при расчете тока можем воспользоваться принципом наложения, из которого следует, что если в электрической цепи несколько источников ЭДС (токов), то ток в цепи равен соответствующей сумме частичных токов, вызванных каждым из источников в отдельности

$$i(t) = i^{(0)} + i^{(1)}(t) + \dots + i^{(n)}(t) + \dots$$

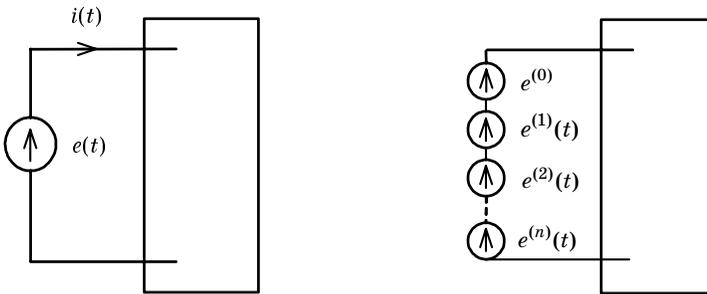


Рис. 5.4

В соответствии с принципом наложения рассмотрим один источник (например  $e^{(0)}$ , т. е. постоянную составляющую), а все остальные источники закоротим и рассчитаем ток постоянной составляющей  $i^{(0)}$ . В схеме при этом индуктивности закорачиваются, а емкости размыкаются, так как постоянный ток не проходит через емкость и не создает напряжение на индуктивности.

Далее рассчитываем цепь при действии 1-й гармоники (выполняется методом комплексных амплитуд). Аналогичен расчет  $k$ -й гармоники, при этом сопротивление реактивных элементов схемы отличается в  $k$  раз, т. е. сопротивление индуктивности возрастает, а сопротивление емкости уменьшается в  $k$  раз по сравнению с сопротивлением для 1-й гармоники

$$Z_L^{(k)} = kZ_L^{(1)} = k\omega L; \quad Z_C^{(k)} = \frac{Z_C^{(1)}}{k} = \frac{1}{k\omega C}.$$

Рассмотрим более подробно влияние характера цепи на форму токов и напряжений, т. е. рассмотрим отношение действующих значений  $k$ -й гармоники тока к основной

$$\dot{i}^{(k)} / \dot{i}^{(1)} = \frac{\dot{U}^{(k)}}{Z^{(k)}} / \frac{\dot{U}^{(1)}}{Z^{(1)}} = \dot{U}^{(k)} Z^{(1)} / \dot{U}^{(1)} Z^{(k)}.$$

1-й случай. Сопротивлением цепи равно  $R$ . Тогда

$$\begin{aligned} Z^{(1)} = Z^{(k)} &= R, \\ \dot{i}^{(k)} / \dot{i}^{(1)} &= \dot{U}^{(k)} R / \dot{U}^{(1)} R = \dot{U}^{(k)} / \dot{U}^{(1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в цепи с активным сопротивлением формы кривых тока и напряжения одинаковы.

2-й случай. В качестве нагрузки возьмем индуктивность

$$\begin{aligned} Z^{(1)} = \omega L, \quad Z^{(k)} &= k\omega L; \\ \dot{i}^{(k)} / \dot{i}^{(1)} &= \dot{U}^{(k)} \cdot \omega L / \dot{U}^{(1)} k\omega L = \dot{U}^{(k)} / k\dot{U}^{(1)}. \end{aligned}$$

Так как относительная величина  $k$ -й гармоники тока в  $k$  раз меньше относительной величины напряжения  $k$ -й гармоники, т. е. говорят, что индуктивность сглаживает ток (широко используется в фильтрах).

3-й случай. В качестве нагрузки используется емкость

$$\begin{aligned} Z^{(1)} = \frac{1}{\omega C}, \quad Z^{(k)} &= \frac{1}{k\omega C}; \\ \frac{\dot{i}^{(k)}}{\dot{i}^{(1)}} &= \frac{\dot{U}^{(k)} k\omega C}{U^{(1)} \omega C} = \frac{U^{(k)}}{U^{(1)}} k. \end{aligned}$$

4-й случай. Нагрузка – последовательный контур  $L, C$

$$Z^{(1)} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega L \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = \omega L \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right),$$

где  $\frac{1}{\omega C} = \omega_0^2$  – квадрат резонансной частоты;

$$Z^{(k)} = \left( k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) = k\omega L \left( 1 - \frac{1}{k^2 \omega^2 LC} \right) = k\omega L \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{k^2 \omega^2} \right);$$

$$\frac{I^{(k)}}{I^{(1)}} = \frac{U^{(k)}}{U^{(1)}} \frac{\omega L \left( 1 - \omega_0^2 / \omega^2 \right)}{k\omega L \left( 1 - \omega_0^2 / (k\omega)^2 \right)} = \frac{U^{(k)}}{U^{(1)}} \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_0^2}{(k\omega)^2}} \frac{1}{k}.$$

Если на частоте  $k$ -й гармоники выполняется условие резонанса ( $k\omega = \omega_0$ ), то  $k$ -я гармоника тока стремится к бесконечности. Это используется для выделения гармоники в полосовом фильтре.

*5-й случай.* Нагрузка – параллельный контур  $L, C$

$$Z^{(1)} = \frac{Z_L^{(1)} Z_C^{(1)}}{Z_L^{(1)} + Z_C^{(1)}} = \frac{\omega L \left( -\frac{1}{\omega C} \right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{\frac{L}{C}}{\omega L (1 - \omega_0^2 / \omega^2)} = \frac{1}{\omega C (1 - \omega_0^2 / \omega^2)},$$

$$Z^{(k)} = \frac{k\omega L \left( -\frac{1}{k\omega C} \right)}{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}} = \frac{\frac{L}{C}}{k\omega L (1 - \omega_0^2 / \omega^2)} = \frac{1}{k\omega C (1 - \omega_0^2 / k^2 \omega^2)},$$

$$\frac{I^{(k)}}{I^{(1)}} = \frac{U^{(k)} k\omega C \left( 1 - \omega_0^2 / (k^2 \omega^2) \right)}{U^{(1)} \omega C \left( 1 - \omega_0^2 / \omega^2 \right)} = \frac{U^{(k)} k \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{(k\omega)^2} \right)}{U^{(1)} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}.$$

На частоте  $k$ -й гармоники, равной резонансной частоте ( $k\omega = \omega_0$ ), данное отношение стремится к нулю. Поэтому  $k$ -я гармоника тока не пропускается, задерживается двухполюсником (используется в загорающих фильтрах-пробках).

### 5.3. Действующее значение и мощность в цепи несинусоидального тока

Рассмотрим действующее (среднеквадратическое) значение тока, напряжения и ЭДС на примере действующего значения тока, которое будем обозначать символом  $I$ .

Пусть ток разложен в ряд Фурье:

$$i(t) = i^{(0)} + i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) + \dots + i^{(n)}(t) + \dots$$

Как известно, действующее значение периодического тока (синусоидального и несинусоидального) определяется его среднеквадратичным значением

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt},$$

где  $T$  – период периодического тока.

Для определения действующего значения необходимо ряд возвести во вторую степень. При возведении ряда во вторую степень результат может быть представлен в виде двух сумм. Например, для трех слагаемых  $a_1, a_2, a_3$  имеем

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 + \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^3 a_p a_q.$$

С учетом последнего будем иметь для действующего значения тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{n=0}^{\infty} i^{(n)}(t) \right]^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i^{(p)} i^{(q)} dt}.$$

Поменяем местами порядок суммирования и интегрирования, получим

$$I = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [i^{(n)}(t)]^2 dt + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i^{(p)} i^{(q)} dt}.$$

Рассмотрим произведение  $p$ -й гармоники на  $q$ -ю гармонику. В силу ортогональности функций синуса и косинуса  $\int_0^T i^{(p)} i^{(q)} dt = 0$ . Поэтому вторая сумма под радикалом обращается в нуль. При этом первая сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [i^{(n)}]^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} [I^{(n)}]^2,$$

где  $[I^{(n)}]^2$  – квадрат действующего значения  $n$ -й гармоники.

Из вышеперечисленного следует, что действующее значение несинусоидального периодического тока равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений всех гармоник и постоянной составляющей, т. е.

$$I = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} [I^n]^2} = \sqrt{[I^{(0)}]^2 + [I^{(1)}]^2 + \dots + [I^{(n)}]^{(2)} + \dots} \quad (5.4)$$

Аналогично выражается действующее значение напряжения и ЭДС, которые обозначаются символами  $u$  и  $E$  соответственно.

**Пример**

Пусть ток задан следующим выражением:

$$i(t) = \frac{4}{\pi} I_m \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t \right).$$

Тогда его действующее значение

$$I = \sqrt{\left(\frac{4I_m}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right)} = \frac{4 \cdot 1,07}{\pi\sqrt{2}} I_m = 1,07 I^{(1)}.$$

Часто, как и в приведенном примере, в действующем значении тока удельный вес высших гармоник незначителен. В этом случае для приближенных расчетов используется расчет по основной (первой гармонике). Этот метод известен как метод эквивалентных синусоид и применяется при расчетах нелинейных цепей.

Рассмотрим мощность в цепи несинусоидального тока. Пусть напряжение и ток разложены в ряд Фурье

$$i(t) = i^{(0)} + i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) + \dots + i^{(n)}(t) + \dots$$

$$u(t) = u^{(0)} + u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) + \dots + u^{(n)}(t) + \dots$$

Тогда мгновенная мощность будет

$$p(t) = i(t)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{(n)}(t)u^{(n)}(t) + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i_{(t)}^{(p)} u^{(q)}(t).$$

Пользоваться понятием мгновенной мощности неудобно, так как она зависит от времени. Найдем среднюю мощность за период, т. е. активную мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} i^{(n)}(t)u^{(n)}(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i_{(t)}^{(p)} u^{(q)}(t) dt,$$

где в силу ортогональности гармонических функций

$$\frac{1}{T_0} \int_0^T \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} i_{(t)}^{(p)} u^{(q)}(t) dt = 0.$$

Поменяем местами операции интегрирования и суммирования:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (i^{(n)}(t)u^{(n)}(t))dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p^{(n)}(t)dt,$$

где  $p^{(n)}(t)$  – мгновенное значение мощности  $n$ -й гармони-

ки;  $\frac{1}{T} \int_0^T i^{(n)}(t)u^{(n)}(t)dt = P^{(n)}$  – активная мощность  $n$ -й гармоники.

С учетом последнего после преобразований можно получить, Вт

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} = U^{(0)}I^{(0)} + U^{(1)}I^{(1)} \cos\varphi^{(1)} + U^{(2)}I^{(2)} \cos\varphi^{(2)} + \dots, \text{ Вт} \quad (5.5)$$

Таким образом, активная мощность в цепи несинусоидального тока равна сумме активных мощностей каждой из гармоник в отдельности.

Кроме понятия активной мощности, используется понятие полной мощности

$$S = UI = \sqrt{[U^{(1)}]^2 + [U^{(2)}]^2 + \dots} \cdot \sqrt{[I^{(1)}]^2 + [I^{(2)}]^2 + \dots}, \text{ ВА}$$

и реактивной мощности, которая равна алгебраической сумме реактивных мощностей всех гармоник

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{(i)} = U^{(1)}I^{(1)} \sin\varphi^{(1)} + U^{(2)}I^{(2)} \sin\varphi^{(2)} + \dots, [\text{вар}].$$

Отношение активной мощности к полной называется *коэффициентом мощности*  $\alpha = \frac{P}{S}$ . Можно показать, что коэффициент мощности  $\alpha$  всегда меньше  $\cos\varphi$  для основной гармоники, т. е.  $\alpha < \cos\varphi^{(1)}$ .

Активная мощность в цепи несинусоидального тока больше активной мощности в цепи синусоидального тока за счет наличия высших гармоник.

В цепи несинусоидального тока различают также *мощность искажений*

$$T = \sqrt{(S^2 - P^2 - Q^2)},$$

которая возникает из-за разного гармонического состава кривых тока и напряжения. Для оценки формы кривых напряжения и тока ис-

пользуется ряд коэффициентов, при этом рассматриваются кривые, в которых отсутствует постоянная составляющая.

Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения к среднему за период

$$K_{\Phi} = \frac{U}{U_{\text{cp}}}. \quad (5.6)$$

Для синусоиды:

$$K_{\Phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения к действующему

$$K_a = \frac{U_m}{U}. \quad (5.7)$$

Для синусоиды  $K_a = \sqrt{2} = 1,41$ .

Коэффициент гармоник характеризует совокупную величину высших гармоник и равен отношению действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники

$$K_r = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} (U^{(n)})^2}}{U^{(1)}} = \frac{\sqrt{(U^{(2)})^2 + (U^{(3)})^2 + \dots}}{U^{(1)}} \quad (5.8)$$

По стандарту для промышленной сети коэффициент гармоник не должен превышать 5%.

## Библиографический список

1. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. *К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин*. СПб.: Питер, 2004. 483 с.
2. *Новгородцев А. Б.* Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей: Учеб. пособие. СПб.: Питер, 2005. 576 с.
3. *Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышов Э. П.* Основы теории электрических цепей: Учебник для вузов. СПб.: Лань, 2002.
4. *Прянишников В. А.* Теоретические основы электротехники: Курс лекций. СПб.: КОРОНА-принт, 2000. 368 с.
5. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. М.: Гардарики, 2000. 523 с.
6. Линейные электрические цепи. Установившиеся режимы. : Учеб. пособие / *Б. А. Артемьев, С. И. Бардинский, В. В. Колесников и др.*; ГУАП. СПб., 1999. 108 с.
7. Системный анализ и синтез многополюсников радиотехнических и приборных комплексов.: Учеб. пособие / *С. И. Бардинский, В. В. Колесников и др.*; ГУАП. СПб., 2001. 88 с.
8. Линейные резистивные цепи и цепи в гармоническом режиме.: Методические указания к домашним заданиям № 1, 2. / *М. Е. Куцко, Г. Г. Рогачева, Л. Б. Свинолобова*; ГУАП. СПб., 1999. 57 с.

## Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
1. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....	4
1.1. Основные понятия и величины электрической цепи .....	4
1.2. Сопротивление $R$ .....	7
1.3. Активные элементы электрической цепи .....	8
1.4. Основные топологические понятия. Законы Кирхгофа ....	11
1.5. Понятие эквивалентности электрических цепей .....	15
1.6. Обобщенная ветвь и ее уравнение. Законы Кирхгофа для токов и напряжений ветвей .....	15
1.7. Анализ сложных цепей по законам Кирхгофа .....	17
1.8. Метод токов связи .Метод контурных токов .....	19
1.9. Метод напряжений дерева .....	20
1.10. Метод узловых напряжений .....	21
1.11. Уравнения цепей с зависимыми источниками .....	22
2. Анализ цепей переменного тока .....	25
2.1. Переменные тока, напряжения, ЭДС. Основные понятия, определения .....	25
2.2. Действующее и среднее значения гармонического тока ..	26
2.3. Изображение синусоидальных величин с помощью вращаю- щихся векторов. Метод комплексных амплитуд .....	28
2.4. Параметры цепей гармонического тока .....	32
2.5. Сопротивление в цепи гармонического тока .....	35
2.6. Индуктивность в цепи гармонического тока .....	36
2.7. Емкость в цепи гармонического тока .....	38
2.8. Анализ сложных цепей по законам Кирхгофа .....	39
2.9. Комплексное сопротивление и проводимость. Схема замеще- ния двухполюсника на заданной частоте .....	43
2.10. Анализ сложных цепей гармонического тока по законам Кирхгофа и методам токов связей .....	44
2.11. Анализ сложных цепей в гармоническом режиме методом узловых напряжений .....	46
2.12. Мощность в цепи гармонического тока .....	48
2.13. Согласование сопротивления нагрузки и сопротивления источника. Условие передачи максимальной мощности .	51
3. Резонансные явления в электрической цепи .....	54
3.1. Резонанс напряжений в последовательном контуре .....	54
3.2. Частотные характеристики последовательного контура ...	57
3.3. Резонанс токов в параллельном контуре .....	61
3.4. Частотные характеристики параллельного контура .....	62
3.5. Резонанс в индуктивно связанных цепях .....	64
4. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ .....	68
4.1. Взаимная индуктивность. ЭДС взаимоиндукции. Маркировка зажимов .....	68

4.2. Последовательное включение двух индуктивно связанных катушек .....	73
4.3. Определение взаимной индукции по методу холостого хода .....	75
4.4. Анализ сложных цепей с взаимной индукцией .....	75
4.5. Линейный трансформатор .....	76
4.6. Входные сопротивления трансформатора. Одноконтурная схема замещения .....	83
4.7. Автотрансформатор .....	85
5. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....	88
5.1. Разложение периодической функции в ряд Фурье .....	88
5.2. Расчет цепей при периодическом воздействии .....	91
5.3. Действующее значение и мощность в цепи несинусоидального тока .....	93
Библиографический список .....	98