

ЛЕКЦИИ 12

Тема. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Современная инженерная практика требует ответов на многие вопросы, возникающие в связи с исследованием взаимодействия ударных волн с различными конструкциями высокоскоростных технологических процессов. Экспериментальные методы имеют ограниченную применимость, поэтому математическое моделирование нестационарных механических процессов является важной практической проблемой.

Математическое моделирование позволяет сочетать физический эксперимент с экономически более выгодным численным экспериментом и дает ответы на интересующие инженеров вопросы с наименьшими затратами средств и сил. Для осуществления этой возможности необходимо, с одной стороны, исследовать вопросы, связанные с построением математических моделей сред, учитывающих те сложные особенности поведения материалов, которые проявляются в условиях конечных деформаций, высокой скорости деформирования, высоких температур, сложных траекторий нагружения и т.д. С другой стороны, необходима разработка надежных и экономичных схем численного решения задач волновой динамики, которые позволили бы проводить численное экспериментирование при различных исходных данных.

Для решения возникающих при этом краевых задач необходимо пользоваться методами динамической теории упругости, которые особенно интенсивно развиваются в последнее время. Решение многих важных задач теории упругости, непрерывно выдвигаемых практикой, вносит существенный вклад в развитие математического моделирования в целом. Поэтому разработка достаточно универсальных методов решения краевых задач теории упругости является актуальной проблемой.

Точные аналитические методы, позволяющие получить решение в явном виде, имеются лишь для некоторых частных и простых случаев задач. Для большинства же математических задач теории упругости получить точные решения весьма сложно или невозможно. Поэтому приближенные методы математической физики приобретают исключительно важное значение. Применение методов математической физики позволяет заменить сложный, трудоемкий и дорогостоящий физический эксперимент на значительно более экономичное математическое (численное) решение.

С развитием вычислительной технологии актуальным становится разработка общих и достаточно универсальных методов решения краевых задач математической физики, в том числе поставленной нами задачи. Недостаточная изученность вышеизложенных вопросов для сложных задач нестационарной теории упругости, в том числе задач о набегании плоской упругой волны в неограниченной среде на полость обуславливает актуальность диссертационной работы.

Многие актуальные научные задачи динамической теории упругости, гидро - и газодинамики, технические проблемы в строительстве, энергетике, машиностроении связаны с исследованиями явлений распространения волн в сплошных средах, с расчетом ударных воздействий на тела, с исследованием явлений проникания, разрушения.

Возникающие при этом краевые задачи необходимо решать методами математической физики, а во многих случаях – методами динамической теории упругости, которые особенно интенсивно развиваются в последнее время. Экспериментальные методы имеют ограниченную применимость, поэтому математическое моделирование нестационарных механических процессов является важной практической проблемой.

Применение методов математической физики позволяет заменить сложный, трудоемкий и дорогостоящий физический эксперимент на значительно более простое математическое (численное) решение. Достаточно полно проведенный математический эксперимент является основой для выбора параметров сложных физических установок, определения условий проявления новых физических эффектов и т.д. Таким образом,

методы математической физики необычайно расширяют область эффективного использования математических моделей физических явлений.

За последние двадцать-тридцать лет характерной особенностью развития теории упругости является глубокое проникновение в нее классических методов математического анализа и использование новейших математических достижений. В свою очередь получаемые решения многих важных задач теории упругости, непрерывно выдвигаемых практикой, внесли существенный вклад в развитие науки в целом. Если раньше исследования сводились к построению частных решений, то с развитием мощных компьютеров актуальным становится разработка общих, достаточно универсальных методов решения начальных и краевых задач.

В ряде случаев формулы, описывающие решения динамических задач, переходят в формулы для решения соответствующих статических задач. В случае ограниченного тела такой предельный переход возможен, если заданные граничные условия являются самоуравновешенными в любой момент времени. При этом в полученные статические решения время войдет как параметр (квазистатическое решение).

Под стационарной динамической задачей обычно понимаются два типа задач. К первому типу относятся задачи, в которых рассматриваются гармонические колебания. Исследования стационарных динамических задач теории упругости с помощью метода потенциала и теории сингулярных интегральных уравнений подробно изложено в известной книге [9]. Применение метода разделения переменных и интегральных преобразований к решению стационарных динамических задач можно найти в учебном пособии [42]. Необходимо также отметить, что задачи гармонических колебаний занимают в динамической теории упругости значительно более скромное место по сравнению с нестационарными задачами. Это объясняется тем, что в большинстве случаев источниками возбуждения волновых процессов в упругих средах оказываются воздействия ударного или взрывного характера. Поэтому в практических приложениях динамической теории упругости приходится иметь дело, как правило, с нестационарными задачами.

К второму типу стационарных задач относятся такие, которые соответствуют установившимся процессам, вызванным движущимися с постоянной скоростью нагрузками, штампами и т.д. Эти задачи с физической точки зрения можно рассматривать как предельные по времени от соответствующих нестационарных задач. В системе отсчета, связанной с движущейся нагрузкой (штампом, краем трещины) решение задачи не зависит от времени, что существенно облегчает получение решения. В частности, в плоском случае, он позволяет использовать мощный метод теории функций комплексного переменного, развитый в монографии [41] для решения краевых задач математической физики. Решению стационарных динамических задач такого типа посвящено много работ, среди которых прежде всего необходимо отметить монографию [63], а также работу [67].

Задача о соприкосновении двух упругих тел в трехмерном случае была впервые поставлена и решена Г. Герцем. При этом функция, выражающая давление на участке контакта, была найдена в виде электростатического потенциала некоторого эллипсоида. В плоском случае задача Герца приводится к уравнению Фредгольма первого рода, эта же задача приводится к разрешимому сингулярному интегральному уравнению в замкнутом виде. В общем случае математическая теория упругости представляет собой пространственную задачу, решение которой трудно осуществимо. Точные аналитические методы, позволяющие получить решение в явном виде, имеются лишь для некоторых частных случаев задач. При решении плоской задачи широкое применение находят методы теории функций комплексного переменного [34].

Исторически одним из первых методов, нашедших применение при решении краевых задач для уравнений с частными производными, является метод разделения переменных или, как его еще называют, методом Фурье. Этот метод заключается в построении набора частных решений, каждое из которых разыскивается в виде произведения функций меньшего числа от независимых переменных. Рассмотрение

краевых задач методом разделения переменных целесообразно только тогда, когда в соответствующей координатной системе рассматриваемая область представляет собой параллелепипед соответствующей размерности. Некоторые задачи теории упругости эффективно решены методом разделения переменных [47, 52, 76]. Асимптотическим методом решения задач дифракции коротких волн посвящена фундаментальная работа [4].

Строгим аналитическим методам линейной динамической теории упругости посвящена монография [78]. В ней систематически излагаются метод функционально-инвариантных решений, метод интегральных преобразований, метод Винера-Хопфа. Эти классические методы для решения нестационарных динамических задач теории упругости получили новое глубокое развитие в последние десятилетия. Метод функционально-инвариантных решений был разработан в тридцатых годах В.И. Смирновым и С.Л. Соболевым [69] в связи с усовершенствованием математического аппарата теоретической сейсмологии. Дальнейшие исследования по развитию этого метода проводились в основном авторами И.Н. Векуа, Л.М. Флитманом, Л. Милсом, Дж. Виллисом. Метод функционально-инвариантных решений заключается в применении аппарата теории функций комплексного переменного к построению специального класса решений задач динамической теории упругости. Этот класс решений может быть получен с помощью так называемых функционально-инвариантных решений волнового уравнения. Метод Винера-Хопфа или метод факторизации находит широкое применение при решении некоторых интегральных уравнений и краевых задач математической физики с помощью интегральных преобразований Лапласа, Фурье, Меллина и других. В дальнейшем плоские и пространственные нестационарные задачи для упругой среды исследовались в работах [52, 61, 62, 65]. Широкое применение интегральных преобразований для решения динамических задач началось в 1950-х годах. Применение преобразований Лапласа, Фурье, Бесселя, Меллина и прочих позволяет привести в ряде случаев исходную краевую или начально-краевую задачу к более простому виду. Таким путем удастся снизить порядок исходного дифференциального уравнения, получать иногда решение преобразованной начально-краевой задачи аналитически. Примерами применения метода интегральных преобразований к задачам динамической теории упругости могут быть [25, 26, 31, 53-55].

Согласно подходу [77], для решения динамической теории упругости с использованием преобразования Лапласа по времени производится переход к эллиптическим дифференциальным уравнениям для трансформант смещений. Построение этих уравнений осуществляется с применением методов статической теории упругости [51].

Недостатком решений, представляемых посредством интегральных преобразований, является громоздкость структуры - они выражаются через двукратный интеграл, поскольку сначала нужно вычислить трансформанту от заданных функций, а потом, определив трансформанту искомой функции, перейти к оригиналу. При этом процессе необходимо будет решать интегральное уравнение первого рода, представляющее некорректную задачу. При другом подходе может быть трудно реализуемым из-за того, что ядра ряда интегральных преобразований (Лапласа, Фурье) являются осциллирующими функциями. При решении задач выбор нужного интегрального преобразования во многом зависит не только от геометрической формы рассматриваемой граничной поверхности, но и от заданных граничных условий.

В связи с тем, что предлагаемый нами комбинированный метод применяется для решения задач об ударе твердыми телами по поверхности упругой среды и приложения к ней давления, то целесообразно указать наиболее характерные работы, посвященные этой проблеме. В работах [5, 63, 64, 86] эти задачи решались аналитическими и численно-аналитическими методами.

Анализ численных методов решения задач теории упругости

Быстро развивающимся методом решения для начально-краевых задач деформируемого твердого тела является метод граничных элементов. Это – метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, появившийся в результате сочетания идей метода теории потенциала с методами теории аппроксимации.

Метод граничных элементов (МГЭ) с точки зрения теории аппроксимации имеет много общих черт с упомянутым выше методом конечных элементов, но отличается от него существенным преимуществом: дискретизация осуществляется, как правило, не внутри области, в которой ищется решение, а на ее границе. Такое упрощение достигается путем точного удовлетворения исходным дифференциальным уравнениям с помощью представления решения в виде, характерном для теории потенциала.

Указанные представления могут быть использованы в рамках МГЭ лишь в случае, когда известны в явном виде (точное или приближенное) фундаментальные решения (или функции Грина) для рассматриваемых дифференциальных уравнений и исследованы граничные свойства соответствующих потенциалов. Путем предельного перехода на границу в формулах представления решения получаются граничные интегральные уравнения, которые являются основным объектом аппроксимации в МГЭ.

Этим объясняется еще одно название МГЭ - метод граничных интегральных уравнений. Изложение МГЭ и применение его к различным задачам содержится в работах [77, 86, 49]. Примерами применения МГЭ к динамическим задачам линейной теории упругости могут быть [58, 77, 78].

Прогресс науки и техники на современном этапе выдвигает математические задачи, точные решения которых получить весьма сложно или невозможно. Поэтому приближенные методы математической физики приобретают исключительно важное значение. Наибольшее распространение получили методы, основанные на сеточной аппроксимации. Их универсальность позволяет с помощью вычислительных комплексов реализовать на ЭВМ системный подход к анализу поведения конструкций в различных режимах эксплуатации. Однако в сложных задачах, требующих детального расчета напряженно-деформируемых состояний ответственных несущих элементов, необходимость дискретизации всей рассматриваемой области приводит к значительному увеличению трудоемкости вычислительного процесса. Одним из универсальных методов решения краевых задач является метод конечных разностей. Примерами применения разностного метода к нестационарным задачам линейной динамической теории упругости могут быть работы [77, 64, 65]. Общие методы построения и исследования устойчивости разностных схем для решения дифференциальных уравнений в частных производных освещены в работах [86, 87].

Эффективным вариантом разностного метода при исследовании динамических задач теории упругости является метод сеток. Сущность его заключается в следующем. Область непрерывных изменений аргументов заменяется конечной совокупностью точек, называемых сеткой, сами же функции, рассматриваемые в этих точках, называются сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальные уравнения и краевые условия, заменяются разностными соотношениями. Описания этого метода содержатся в работах [35, 49, 50, 55, 57], При использовании метода сеток можно производить сквозной счет [34, 35].

В настоящее время чуть ли не самым популярным численным методом для решения задач динамической теории упругости является метод конечных элементов. Этот метод получил наиболее широкое применение при решении статических задач со сложной геометрией. Однако, при этом возникают большие сложности вычислительного характера. Разностная схема, получаемая при непосредственном применении метода конечных элементов к динамическим задачам, относится к неявному типу, что существенно ограничивает область применения этого метода. В работах [58, 59, 62, 63] приближенный метод конечных элементов успешно применен к решению динамических задач твердого тела.

Наиболее широкое применение при решении нестационарных задач механики сплошных сред нашел метод характеристик. Для одномерного случая он изложен в ряде монографий и учебных пособий, например, в [64]. Примером его применения может быть работа [65]. В ряде работ [30, 34] для решения динамических задач теории упругости применяется метод пространственных характеристик. В указанных работах излагается общая схема этого метода. Сочетание метода характеристик с конечно-разностной аппроксимацией было предложено в работе [68]. Но недостатком метода характеристик является то, что производится расчет задачи с небольшим числом разрывов, так как при скоплении особенностей вычисления затруднены.