

ЛЕКЦИЯ 15

Тема. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА MATLAB

Н: Математическое моделирование задач о набегании плоской упругой волны в неограниченной среде на полость

Предположим, что в неограниченном пространстве распространяется плоская одномерная упругая волна, которая в момент времени $t = 0$ набегаёт на полость в среде и в последующие моменты времени взаимодействует с ней. Задача заключается в том, чтобы определить *параметры среды* в области, расположенной вне полости для различных моментов времени. Будем считать, что граница полости S представляет собой бесконечно длинную цилиндрическую поверхность с замкнутым контуром поперечного сечения. Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ фронт упругой волны касается границы полости вдоль ее образующей.

Начало \bar{O} прямоугольной декартовой системы координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ совместим с какой-нибудь точкой образующей границы полости, вдоль которой в момент $t=0$ фронт упругой волны касается ее. Ось $\bar{O}\bar{x}$ направим вдоль касательной к контуру поперечного сечения полости, ось $\bar{O}\bar{y}$ - вдоль образующей полости, а ось $\bar{O}\bar{z}$ - перпендикулярно к осям $\bar{O}\bar{x}$ и $\bar{O}\bar{y}$ в глубь среды.

Контур поперечного сечения границы полости обозначим через L . Кроме системы координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, введем в рассмотрение так же локальные системы координат $Oxyz$ для каждой точки O линии L . Ось Ox направим вдоль касательной к линии L , ось $\bar{O}\bar{y}$ - вдоль образующей границы полости, а ось Oz - перпендикулярно к осям $\bar{O}\bar{x}$ и $\bar{O}\bar{y}$ в глубь среды (рис. 1.).

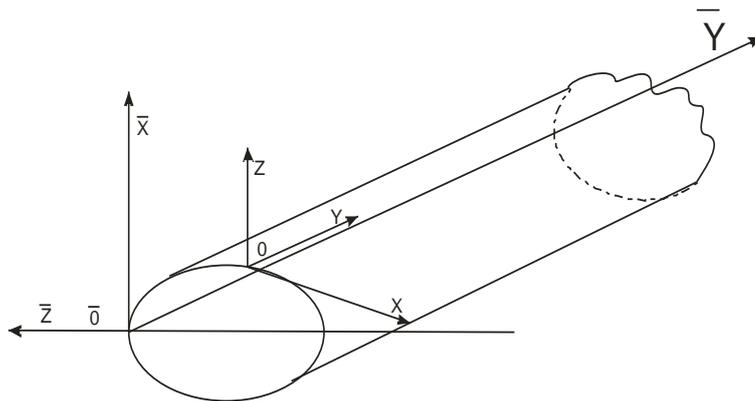


Рис. 1.

Тогда, как известно из [1], уравнение среды при отсутствии массовых сил имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

где \vec{v} - вектор перемещения, ρ_0 - начальная плотность среды, λ, μ - константы Ламэ, Δ - оператор Лапласа.

Уравнению (1) удовлетворяет, как показано в [1], векторная функция вида $\vec{v} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi}$, при условии, что $\varphi, \vec{\psi}$ - потенциал смещений, являются решениями волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = b^2 \Delta \vec{\psi}, \quad (3.1.3)$$

соответственно. Причем $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$ - скорость распространения продольных волн, $b = \sqrt{\mu/\rho_0}$ - скорость распространения поперечных волн, а функция $\vec{\psi}$ должна удовлетворять еще условию:

$$\operatorname{div} \vec{\psi} = 0 \quad (4)$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом плоском случае вектор $\vec{\psi}$ параллелен оси y и не зависит от y . Поэтому соотношение (3.1.4) выполняется тождественно, а вместо векторного уравнения (3.1.3) достаточно рассматривать скалярное уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \psi, \quad (5)$$

где ψ - проекция вектора $\vec{\psi}$ на ось Oy , взятая, применительно к рис. 1, с обратным знаком.

Учитывая специфику рассматриваемой плоской задачи, граничные условия достаточно задавать на контуре C , по которому плоскость Oxy пересекает границу плоскости, а параметры среды определять в сечении рассматриваемой пространственной области указанной плоскостью.

Краевые условия состоят в том, что нагрузка на границе полости отсутствует. Следовательно, нормальные σ_{nn} и касательные σ_{ne} компоненты напряжения в произвольной точке M^1 упомянутого выше контура C обращаются в нуль в любой момент времени t :

$$\sigma_{nn}(M^1, t) = 0, \quad \sigma_{ne}(M^1, t) = 0 \quad (M^1 \in C) \quad (6)$$

Для определенности примем, что упругая волна, набегающая на полость, является продольной.

Пусть $\varphi_1(M, t)$, - потенциал смещений для упругой среды, обусловленный в безграничном пространстве исключительно указанной волной, причем M - точка среды. Функцию $\varphi(M, t)$, которая должна удовлетворять волновому уравнению (2) и, совместно с функцией $\psi(M, t)$, также граничным условиям (6), целесообразно отыскивать в виде

$$\varphi(M, t) = \varphi_1(M, t) + \varphi_2(M, t), \quad (7)$$

где функция $\varphi_2(M, t)$ подлежит непосредственному определению.

Тогда, граничные условия (6) можно представить в виде:

$$\sigma_{nn}^{(1)}(M^1, t) + \sigma_{nn}^{(2)}(M^1, t) = 0, \quad \sigma_{ne}^{(1)}(M^1, t) + \sigma_{ne}^{(2)}(M^1, t) = 0 \quad (M^1 \in C), \quad (8)$$

где величины $\sigma_{nn}^{(1)}(M^1, t)$, $\sigma_{ne}^{(1)}(M^1, t)$ обусловлены потенциалом смещений $\varphi_1(M, t)$, а $\sigma_{nn}^{(2)}(M^1, t)$, $\sigma_{ne}^{(2)}(M^1, t)$ - потенциалами смещений $\varphi_2(M, t)$ и $\psi(M, t)$.

Введем обозначения:

$$g_1(M^1, t) = -\sigma_{nn}^{(1)}(M^1, t), \quad g_2(M^1, t) = -\sigma_{ne}^{(1)}(M^1, t).$$

С учетом их граничные условия (3.1.8) представляются следующим образом:

$$\sigma_{nn}^{(2)}(M^1, t) = g_1(M^1, t), \quad \sigma_{ne}^{(2)}(M^1, t) = g_2(M^1, t) \quad (M^1 \in C) \quad (9)$$

Подставив (7) в выражение для вектора смещения

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}, \quad (10)$$

получаем

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi_1 + \operatorname{grad} \varphi_2 + \operatorname{rot} \vec{\psi}. \quad (11)$$

Положим

$$\vec{v}_1 = \text{grad}\varphi_1, \quad \vec{v}_2 = \text{grad}\varphi_2 + \text{rot}\vec{\psi}. \quad (12)$$

На основании (11) и (12) имеем

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (13)$$

Вектор \vec{v}_1 - это, очевидно, вектор смещения, обусловленный потенциалом $\varphi_1(M, t)$, введенным выше рассмотрения, а \vec{v}_2 - вектор смещения, обусловленный потенциалами смещений $\varphi_2(M, t)$ и $\vec{\psi}(M, t)$. Вектор \vec{v}_1 и тем самым, функция $\varphi_1(M, t)$, согласно приведенной выше постановке задачи, являются известными величинами. Проекция вектора \vec{v}_2 на оси Ox , Oy , Oz обозначим через u , v , w соответственно. Причем, очевидно, в рассматриваемом плоском случае $v \equiv 0$. Согласно закону Гука компоненты напряжения $\sigma_{zz}^{(2)}$, $\sigma_{xz}^{(2)}$, обусловленные слагаемым \vec{v}_2 в (13), представляются в виде:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (15)$$

Для u , v , согласно второму из соотношений (12), принимая во внимание, что, как установлено выше, $\vec{\psi} = -\psi_{0j}$, где \vec{j} - единичный вектор, направленный вдоль оси Oy , имеем:

$$u = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16)$$

Подставляя формулы (16) в (14) и (15), получаем:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad (17)$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]. \quad (18)$$

В указанной выше локальной системе координат $Oxyz$ при совпадении точки M^1 контура C с началом координат O , очевидно, имеем

$$\sigma_{nn}^{(2)}(0, t) = \sigma_{zz}^{(2)}(0, t), \quad \sigma_{ne}^{(2)}(0, t) = \sigma_{xz}^{(2)}(0, t).$$

Поэтому в этой системе координат граничные условия (3.1.9) на основании (3.1.17), (3.1.18) можно представить в виде:

$$\lambda \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \varphi_2(M, t)}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \varphi_2(M, t)}{\partial z^2} - 2\mu \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial x \partial z} = g_1(0, t), \quad (19)$$

$$\mu \left[2 \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \varphi_2(M, t)}{\partial x \partial z} + \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial z^2} - \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial x^2} \right] = g_2(0, t). \quad (20)$$

Таким образом, рассматриваемая краевая задача сводится к определению решений волновых уравнений (2), (5), соответственно, удовлетворяющих совместно граничным условиям (19), (20) во всех локальных системах координат, введенных выше в рассмотрение.

Программная реализация на Matlab решения задач о набегании плоской упругой волны в неограниченной среде на полость

По разработанной схеме в параграфе алгоритма в §3.4. для численного решения плоской задачи о набегании упругой волны в грунте на цилиндрические полости и

последующие взаимодействие с ней разработана программа в интерактивной среде MATLAB (рис. 2).

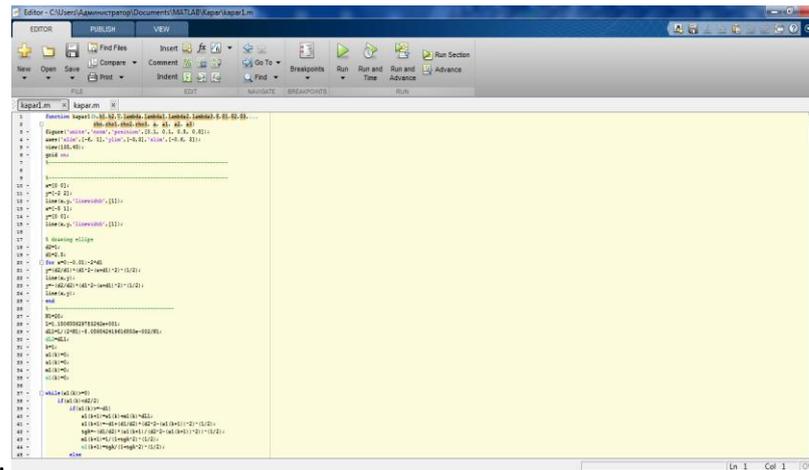


Рис. 2. Фрагмент программы в интерактивной среде MATLAB

Запуск Главного окна программы осуществляется с помощью кнопки **Выполнить** на панели инструментов (рис. 3).



Рис. 3. Кнопка **Выполнить**

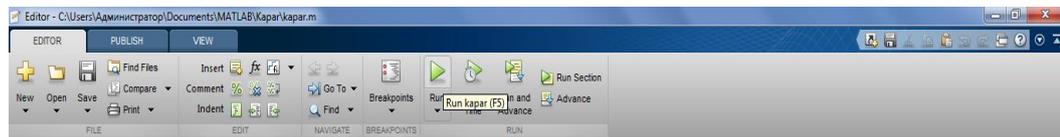


Рис. 4. Панель инструментов интерактивной среды MATLAB

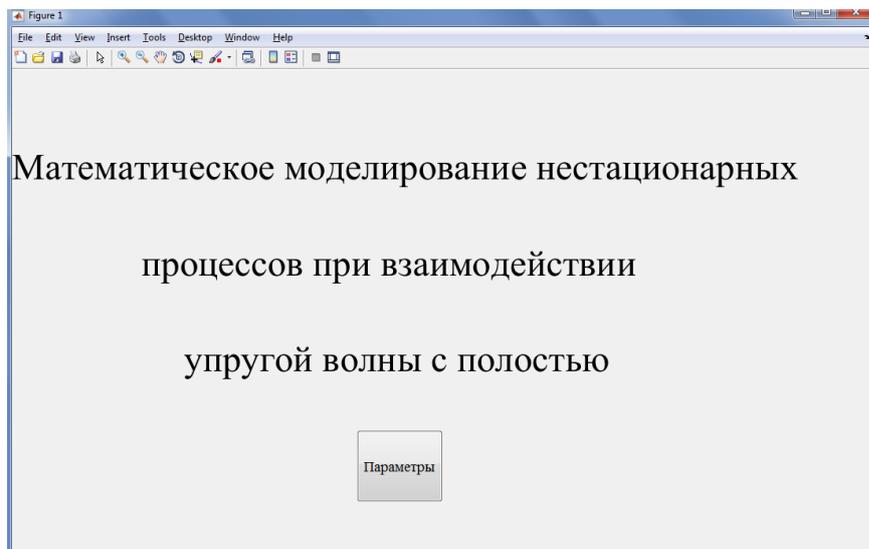


Рис. 5. Главное окно программы

В главном окне программы содержится кнопка **Параметры**, с помощью которой открывается окно ввода данных

Параметры

Рис. 6. Кнопка **Параметры**.

Константы Ламе λ
0.115*10¹¹

Константы Ламе G
0.769*10¹⁰

Плотность ρ
765

Скорость волн a
5927

Рис7. Окно ввода данных

С помощью окна ввода данных (рис. 7) вводим плотность, константы Ламе, соответственно, для среды, в которой распространялась волна нагрузки до столкновения со слоистой преградой.

С использованием алгоритма, разработанного в 3.4, численно решаем задачу о взаимодействии упругой волны с полостью в среде.

Для решения используем разработанный пакет программ «ППП для решения задачи взаимодействие упругой волны с полостью в среде методом предельных соотношений на Matlab» в интерактивной среде MATLAB.

Окно параметров в рис. 7. заполняем следующими значениями исходных данных в технической системе единиц:

$$\lambda_1 = 0.152 \cdot 10^{10} \text{ КГ/М}^2; \quad G_1 = 0.152 \cdot 10^{10} \text{ КГ/М}^2;$$
$$\rho_1 = 250 \text{ КГ} \cdot \text{СЕК}^2 / \text{М}^2; \quad a_1 = 4270 \text{ М/СЕК};$$

Результаты расчетов для различных моментов времени представлены в графическом виде.

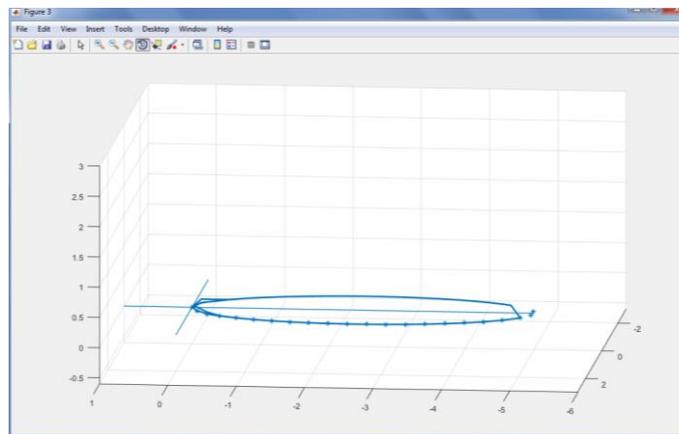


Рис. 8. График поведения производных функций в начальный момент времени

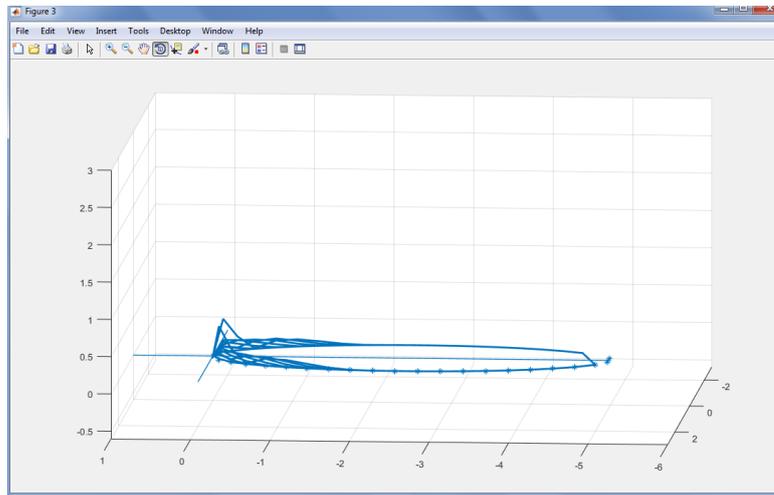


Рис. 9. График поведения производных функции u_{11} на 10 шаге итерации

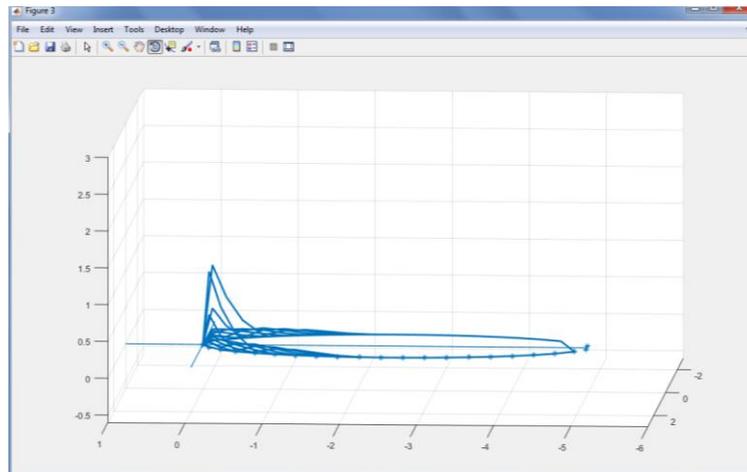


Рис. 10. График поведения производных функции w_{11} на 10 шаге итерации

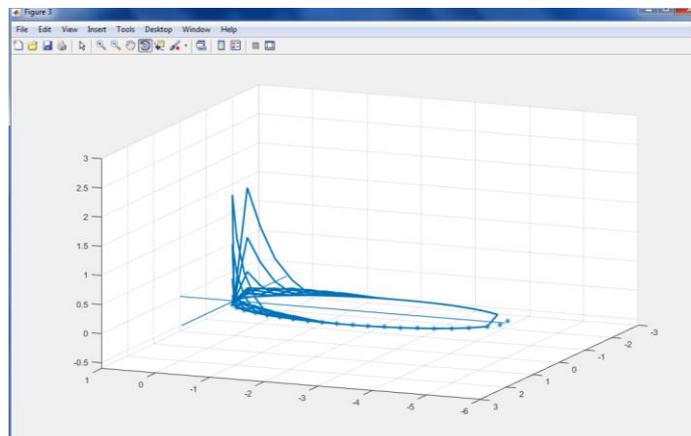


Рис. 11. График поведения производных функции u_{11} на 10 шаге итерации и w_{11} на 7 шаге итерации

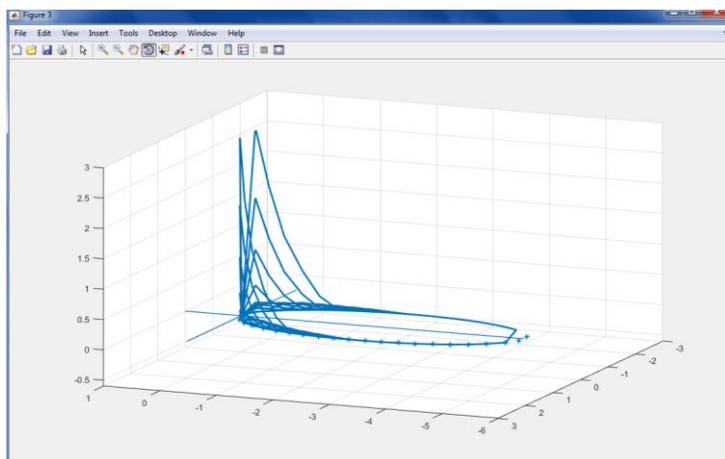


Рис. 12. График поведения производных функции u_{11} на 11 шаге итерации и w_{11} на 8 шаге итерации

Разработана общая модифицированная схема сведения краевых задач динамической теории упругости к системам интегро-дифференциальных уравнений. Схема основана на представлении потенциалов смещений в упругой среде посредством волновых потенциалов простого слоя.

На основе алгоритма численного решения задачи о набегании плоской упругой волны в неограниченной среде на полость разработана программа для компьютера. В целях апробации изложенного алгоритма и программы моделирована задача о набегании волны нагрузки на слоистую преграду.