

ЛЕКЦИИ 8

Тема. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

Классификация математических моделей

Компьютерные модели физических процессов, которые будут рассмотрены в следующей главе, построены на основе математических моделей, поэтому рассмотрим подробнее этот класс моделей.

Из определения математической модели следует, что по сущности — это информационная знаковая модель, она является одной из самых значимых знаковых моделей, а *метод математического моделирования является одним из самых универсальных методов исследования в самых различных науках.*

При математическом моделировании абстрагируют, то есть, отвлекаются, от конкретной физической природы объекта — оригинала и происходящих в нем процессов и рассматривают только *преобразования входных величин в выходные, записанные на языке математики.* Исследователи в различных областях науки считают, что если удастся сформулировать «хорошую» математическую модель, то для ее исследования можно применить весь арсенал науки, накопленный за тысячелетия, и приводят цитату *«Область знания становится наукой, когда она выражает свои законы в виде математических соотношений»*

Математические модели использовались учеными довольно давно, но только назывались они формулами, принципами, законами, уравнениями и т.п. Самое широкое применение математические модели нашли в физике. Все уравнения механики, электродинамики, законы сохранения энергии и вещества являются математическими моделями соответствующих явлений природы. Законы эти носят эмпирический характер и являются отражением многовекового опыта человечества.

Математические модели описывают целый класс процессов или явлений, которые обладают сходными свойствами, то есть, являются *изоморфными*. Наука конца 20 века о законах самоорганизации сложных развивающихся систем. — *синергетика*, показала, что сходными уравнениями описываются процессы самоорганизации самой разной природы: от образования скоплений галактик до образования пятен планктона в океане.

Рассмотрим классификацию математических моделей по различным признакам (Рис. 40).

1. По *принципам построения* модели делятся на аналитические и имитационные.

Аналитическими называются математические модели, в которой процессы функционирования реальных объектов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей.

Однако получить эти зависимости (дифференциальные и интегральные уравнения, системы уравнений) удастся только для сравнительно простых систем и явлений. Когда явления сложны и многообразны исследователю приходится идти на их упрощение. В результате аналитическая матмодель становится слишком грубым приближением реальной системы или процесса. Если все же для сложных систем удастся построить аналитическую модель, то зачастую ее исследование превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден строить имитационные модели.

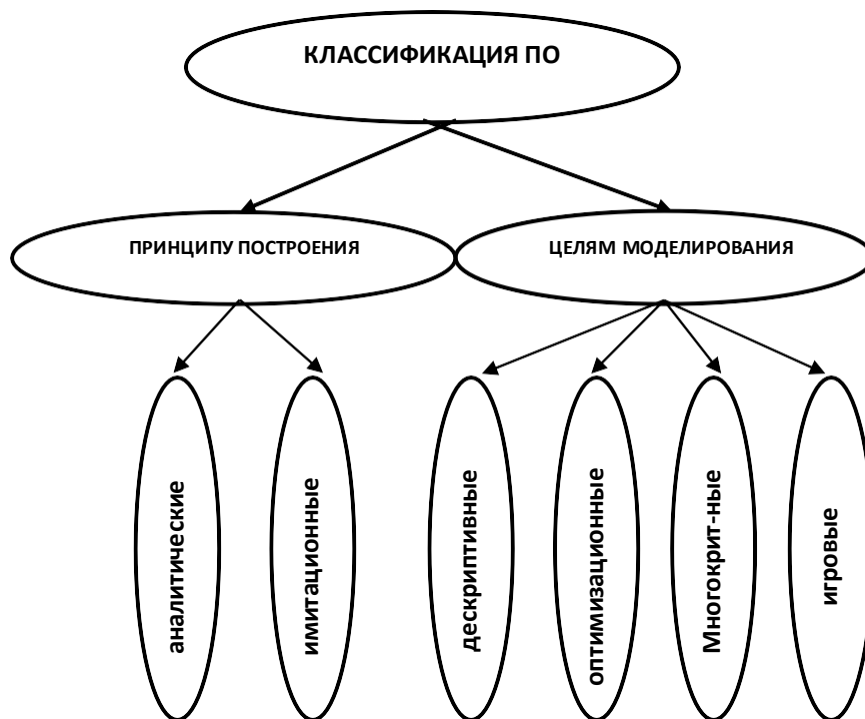


Рис. 40 - Схема классификации математических моделей

Имитационными называются математические модели, имитирующие поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течение заданного периода, причем имитируются элементарные явления, которые составляют процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационные модели не позволяют заранее вычислить или предсказать поведение системы, а требуют для такого предсказания проведения вычислительного эксперимента на математической модели при заданных исходных данных. Поэтому в информатике имеет место еще и такое определение.

Имитационные модели — это проводимые на компьютере вычислительные эксперименты с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем во времени в течение заданного периода.

2. По **целям моделирования** математические модели делятся на описательные, оптимизационные, многокритериальные и игровые.

Описательными (описательными) называются модели, которые только описывают объекты и явления и как бы фиксируют сведения о них. Например, модель Солнечной системы определяет расположение планет в ней и их орбиты, модель движения кометы, вторгшейся в Солнечную систему, позволяет предсказать траекторию ее полета, расстояние, на котором она пройдет от Земли, и т.д. В обоих случаях цели моделирования носят описательный характер, поскольку нет никаких возможностей повлиять на расположение планет или движение кометы.

Оптимизационными называются модели, имеющие параметры, изменение которых влияет на результат моделирования. Они служат для поиска оптимального (наилучшего в каком-либо смысле) решения задачи при соблюдении определенных условий. Например, модель перевозок продукции от производителей к потребителям позволяет подобрать (оптимизировать) маршрут перевозок таким образом, чтобы их стоимость была минимальной.

Многокритериальными называются модели, которые позволяют оптимизировать процесс по нескольким параметрам сразу, причем, цели оптимизации могут быть весьма противоречивы, например, модель организации питания семьи должна удовлетворять таким критериям, как полезность, калорийность пищи и минимальность затрат на ее закупку;

Игровыми называются модели, которые определяют стратегию противников в конфликтной ситуации, называемой в математической теории игр *игрой*. Модели карточных, спортивных игр, военных сражений относятся к игровым моделям. Они позволяют моделировать тактику и стратегию игроков.

Математическая модель равноускоренного движения тела

Постановка задачи. Пусть тело, имеющее начальную скорость V_0 , движется с постоянным ускорением a . Определить путь S , который пройдет тело за время T .

Чтобы ответить на вопрос задачи, построим математическую модель равноускоренного движения, в нем V_0 , a , T – исходные данные процесса движения, S – выходное данное или результат.

Цель моделирования – получить математическое соотношение, связывающее исходные данные и результат. Это соотношение и будет математической моделью такого физического процесса, как равноускоренное движение тела.

Разобьем все время движения тела T на n равных частей, будем считать, что на каждом промежутке времени тело движется *равномерно*, то есть, с постоянной скоростью, а в конце промежутка скорость меняется скачком (это допущение сделано для построения математической, то есть, абстрактной модели движения, такое изменение скорости не имеет места в физическом мире). На Рис.41 представлена модель такого движения в виде рисунка, движущееся тело изображено в виде человека.

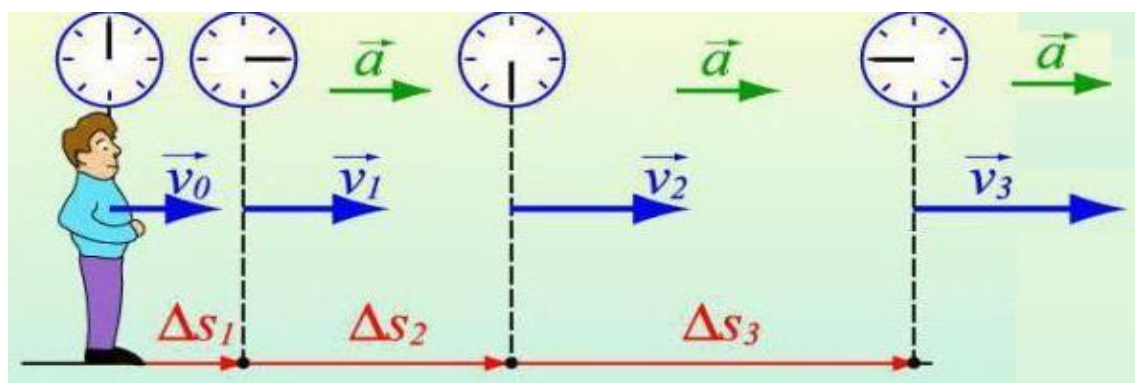


Рис. 41 - Графическая модель равномерного движения

Обозначим промежутки через

$t = \frac{T}{n}$, тогда на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, где $i = 1, 2, \dots, n-1$, значение скорости можно вычислить следующим образом:

на промежутке $[t_1, t_2]$ $V_1 = V_0$ м/сек;
 на промежутке $[t_2, t_3]$ $V_2 = (V_1 + a \cdot t)$ м/сек;
 на промежутке $[t_3, t_4]$ $V_3 = (V_2 + a \cdot t)$ м/сек;

 на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ $V_k = (V_{k-1} + a \cdot t)$ м/сек;

Учитывая, что движение на каждом промежутке является равномерным, всю длину пути, пройденного телом, вычислим следующим образом:

$$S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t + V_3 \cdot t + \dots + V_n \cdot t = (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n) \cdot t \quad (1)$$

Последовательность скоростей $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ является арифметической прогрессией с начальным членом V_1 и разностью $d = a \cdot t$. Из алгебры известно, что сумма первых n членов такой арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S = \frac{2 \cdot V_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n,$$

а значит сумму скоростей в формуле (1) можно представить так:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n &= \frac{2 \cdot V_0 + a \cdot t \cdot (n-1)}{2} \cdot n \quad (2) \end{aligned}$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), выполним ряд преобразований

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \cdot V_0 + a \cdot t \cdot (n-1)}{2} \cdot n \cdot t = \frac{2 \cdot V_0 + a \cdot t \cdot (n-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{T}{n} = \\ &= \frac{2 \cdot V_0 \cdot T + a \cdot t \cdot T \cdot (n-1)}{2} = \frac{2 \cdot V_0 \cdot T + a \cdot \frac{T}{n} \cdot T \cdot (n-1)}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot V_0 \cdot T \cdot n + a \cdot T \cdot T \cdot (n-1)}{2 \cdot n} = V_0 \cdot T + \frac{a \cdot T^2}{2} - \frac{a \cdot T^2}{2 \cdot n} \end{aligned}$$

И получим пройденный телом путь:

$$S = V_0 \cdot T + \frac{a \cdot T^2}{2}$$

$$- a \cdot T^2$$

$$2 \cdot n$$

Последняя формула - **приближенная математическая модель** равноускоренного движения тела. Если взять число разбиений n достаточно большим, то последнее слагаемое будет бесконечно малой величиной и им можно пренебречь, тогда

$$S = V_0 \cdot T + \frac{a \cdot T^2}{2} \quad (3)$$

Формула (3) и есть **математическая модель равноускоренного движения тела**. Она позволяет определить путь S , который пройдет тело, имеющее начальную скорость V_0 и постоянное ускорение a , за время T . Эта модель по принципам построения является **аналитической**, так как явным образом связывает входные и выходные данные процесса

движения, а по целям моделирования является **дескриптивной**, так как только описывает процесс движения с исходными данными.

Поставленная цель достигнута – получена **модель - формула**, связывающая входные и выходные данные процесса равномерного движения.

Теоретическое исследование аналитической математической модели полета

Исследуем построенную аналитическую матмодель теоретически, а именно, найдем характеристики полета тела.

1) Выразим из 5-го уравнения системы (5) время полета t , подставим полученное выражение в 6-тое уравнение этой системы и получим формулу, связывающую величины x и y :

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (4)$$

Формула (6) – это уравнение траектории полета тела. Из нее следует, что **тело движется по параболе**.

2) Определим скорость движения по этой траектории способом проекций

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - g t)^2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 v_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 t^2} \quad (5)$$

Из последней формулы следует, что *движение, полученное сложением равномерного горизонтального и равнопеременного вертикального, не является ни равномерным, ни равнопеременным.*

3) Положим в 6-ом уравнении системы (5) $y=0$, в этот момент полет заканчивается и тело падает на землю:

$$v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \Leftrightarrow t(v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{gt}{2}) = 0, \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}} \quad (6)$$

Формула (8) определяет время продолжительности полета.

4) Подставим T , определенное формулой (8) в 5-тое уравнение системы (5), получим:

$$S = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha g}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \Rightarrow \boxed{S = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}} \quad (7)$$

Формула (9) определяет дальность полета, то есть расстояние, которое пролетит тело по горизонтали за время T .

5) Положим в 4-том уравнении матмодели (5) $v_y = 0$, получим:

$$v_0 \cdot \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

Очевидно, что в этот момент времени тело поднимется на наибольшую высоту. Сравнивая это время t со временем всего полета T , определенного формулой (8), видим, что максимальная высота полета H достигается в момент времени $t = T/2$, то есть, в середине полета. Подставим t в 6-тое уравнение системы (5) и получим:

$$H = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha g}{g} - \frac{g \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g^2}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2}$$

(8)

Формула (10) определяет максимальную высоту подъема тела в процессе полета.