

## ЛЕКЦИИ 9

### Тема. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

#### Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением

##### Алгоритм построения компьютерной модели падения тела

Рассмотрим алгоритм, который положим в основу программы, моделирующей падение тела в среде с сопротивлением.

1. Время падения тела  $T$  разбить на равные, достаточно малые промежутки  $dt$ .
2. Движение на каждом промежутке  $dt$  считать **равноускоренным** и использовать на

нем математическую модель равноускоренного движения для вычисления пройденного расстояния и скорости:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a(dt)^2}{2} \quad \text{и} \quad V = V_0 + a \cdot dt$$

3. Считать, что скорость  $V(t)$  и ускорение  $a(t)$  **меняются скачком** в конце каждого промежутка  $dt$ .

4. Задать начальные условия процесса падения, то есть, данные процесса в начальный момент времени:

$$t_0 = 0; \quad S_0 = 0; \quad V_0 = 0; \quad a_0 = g.$$

5. Далее, на каждом из промежутков времени использовать формулы, указанные в таблице №3:

Таблица №3

| Время                 | Расстояние                                       | Скорость                     | Ускорение                              |
|-----------------------|--------------------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|
| $t_1 = t_0 + dt,$     | $S_1 = S_0 + V_0 t + a_0 (dt)^2 / 2$             | $V_1 = V_0 + a_0 dt$         | $a_1 = (mg - k_1 V_1 - k_2 V_1^2) / m$ |
| $t_2 = t_1 + dt,$     | $S_2 = S_1 + V_1 t + a_1 (dt)^2 / 2$             | $V_2 = V_1 + a_1 dt$         | $a_2 = (mg - k_1 V_2 - k_2 V_2^2) / m$ |
| ...                   | ...                                              | ...                          | ...                                    |
| $t_i = t_{i-1} + dt,$ | $S_i = S_{i-1} + V_{i-1} t + a_{i-1} (dt)^2 / 2$ | $V_i = V_{i-1} + a_{i-1} dt$ | $a_i = (mg - k_1 V_i - k_2 V_i^2) / m$ |
| ...                   | ...                                              | ...                          | ...                                    |

6. Закончить процесс, когда расстояние  $S_i$ , которое пролетело падающее тело, будет не меньше высоты  $H$ , с которой тело начало падение.

Из этих формул следует, что переменные – время  $t_i$ , путь  $S_i$ , скорость  $V_i$ , в дискретные моменты времени  $i dt$  определяются через  $S_{i-1}$ ,  $V_{i-1}$ ,  $t_{i-1}$ , то есть эти формулы являются рекуррентными.

При исследовании модели свободного падения тела, была получена формула для расчета времени падения  $t$ , величину промежутка  $dt$  можно положить равной одной

сотой части этого времени, то есть,  $dt = t/100 = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$

### Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением

Детализируем постановку задачи о падении тела в среде с сопротивлением, приведенную выше в пункте 1.1.

**Постановка задачи.** Пусть тело – деревянный шарик с радиусом  $r = 0.1\text{м}$  падает на Землю с высоты  $H = 1500\text{м}$  в воздухе, коэффициент вязкости которого  $\mu = 0.0182\text{ Н}\cdot\text{сек}/\text{м}^2$ . Известно, что коэффициент лобового сечения шарика  $c = 0.4$ , плотность шарика  $\rho_{\text{ш}} = 800\text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность воздуха  $\rho_{\text{в}} = 1.29\text{ кг}/\text{м}^3$ . Определить (смоделировать), как изменяются скорость и ускорение тела в процессе падения.

Рассмотрим данные модели.

#### **Статические входные данные модели:**

$H$  – высота, с которой падает тело;  $r$  –

радиус тела -шарика;

$\mu$  – коэффициент вязкости среды (в программе  $k_v$ );  $c$  –

коэффициент лобового сечения шарика;

$\rho_{\text{ш}}$  – плотность шарика (в программе  $p_{\text{sh}}$ );  $\rho_{\text{в}}$

– плотность воздуха (в программе  $p_v$ );  $g$  –

ускорение свободного падения.

#### **Динамические выходные данные модели:**

$t_1$  – время;

$S_1$  – пройденное расстояние;

$V_1$  – скорость;

$a_1$  – ускорение.

Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением «Pad\_telR» построена на основе рассмотренного алгоритма и указанных выше входных данных.

**program** Pad\_telR;

**uses** Crt, Graph;

**const**  $H=1500$ ;  $r=0.1$ ;  $k_v=0.0182$ ;  $c=0.4$ ;  $p_{\text{sh}}=800$ ;  $p_v=1.29$ ;  $g=9.8$ ;

**var**  $gD, gM, t0m, v0m, tm, vm, am, ym, k, j, z, bt, bv, ba$ : **integer**;

$m, v0, v1, a0, a1, s0, s1, t0, t1, dt, k1, k2, at, av, aa, kt, ky, ka, kv$ : **real**;  $mast$ ,

$masv, mass, masa$ : **array**[1..2000] **of real**;  $ats, avs, aas$ : **string**;

**BEGIN**

$m:=4/3*\pi*\exp(3*\ln(r))*p_{\text{sh}}$ ; {масса шарика}

$dt:=\sqrt{(2*H/g)}/100$ ; {1/100 часть времени падения}

$k1:=6*\pi*k_v*r$ ;  $k2:=0.5*c*\pi*\sqrt{r}*p_v$ ; {коэффициенты сопротивления}  $j:=0$ ;

$t0:=0$ ;  $s0:=0$ ;  $v0:=0$ ;  $a0:=g$ ; {начальные данные процесса падения} **repeat** {цикл, моделирующий падение тела}

$j:=j + 1$ ; {счетчик шагов цикла}  $t1:=$

$t0+dt$ ;

$s1 := s0 + v0*dt + a0*\sqrt{dt}/2$ ;  $v1$

$:= v0 + a0*dt$ ;

$a1:= (m*g - k1*v1 - k2* \sqrt{v1})/m$ ;

```

    mast[j]:=t1; mass[j]:=s1; masv[j]:=v1; masa[j]:=a1;
    t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H; { условие «приземления» тела }
if j < 25 then k:=1 else if j<40 then k:=2 else k:= round(j/20);
clrscr;
writeln(' Шаг z      Время t      Путь S      Скорость V      Ускорение a');
for z:= 1 to j do if (z mod k) =0 then writeln('      ', z:5,'      ', mast[z]:10:4,'
      ', mass[z]:10:4, '      ', masv[z]:10:4, '      ', masa[z]:6:4);
writeln(' ', j:5,'      ', mast[j]:10:4,'      ', mass[j]:10:4,"
      masv[j]:6:4, '      ', masa[j]:4:4);
readln;
gD:=Detect; Initgraph(gD,gM,'      ');
{ построение на экране системы координат (V/a)Ot }
t0m:= 40; v0m:=420; { координаты начала координат системы (V/a)Ot }
bt:= 50; bv:= 50; ba:= 50; { число пикселей в одном делении на осях V,a ,t } at:=3;
av:=10; aa:=2; { масштаб на осях V, a, t }
setbkcolor(15); setcolor(1);
{ рисование осей координат и их масштабирование }
line(10, v0m, 620, v0m); line(615, v0m - 5, 620, v0m);
line(615, v0m + 5, 620, v0m); outtextxy(630, v0m, 't');
line(t0m, 15, t0m, 460); line(t0m - 10, 25, t0m, 15);
line(t0m + 10, 25, t0m, 15); outtextxy(t0m, 5, 'V/a');
for i := 1 to 10 do line(t0m + i*bt, v0m - 5, t0m + i*bt, v0m + 5); for i :=
1 to 10 do line(t0m- 5, v0m - i*bv, t0m + 5, v0m - i*bv); outtextxy(t0m
- 8, v0m + 8, 'O');
str(at : 1 : 0, ats); outtextxy(t0m + bt, v0m + 8, ats);
str(av : 1 : 0, avs); str(aa : 1 : 0, aas);
outtextxy(t0m - 35, v0m - bv, avs + '/' + aas); kt:=
bt / at ; kv:= bv / av ; ka:= ba / aa ;
for z:=1 to j do
    begin
        tm:= round(t0m + kt*mast[z]);
        vm:= round(v0m - kv*masv[z]);
        setcolor(2); circle(tm,vm,1); am:=
        round(v0m - ka*masa[z]);
        setcolor(4); circle(tm,am,1);
    end;
readkey;
cleardevice;
setcolor(1); circle(300,50,5); setfillstyle(5,2);
bar(200,420,400,430); readkey;
        setcolor(0); circle(300,50,5);

```

```

t0:=0; s0:=0; v0:=0; a0:=g;
repeat {цикл, моделирующий падение тела на экране }
    t1:= t0+dt;
    s1:= s0+v0*dt+a0*sqr(dt)/2;
    v1:= v0+a0*dt;
    a1:= (m*g - k1*v1 - k2* sqr (v1))/m;ky
    := (420 - 50)/H;
    ym:= round(50 + ky*s1);
    setcolor(1); circle(300,yk,5); delay(450);
    setcolor(0); circle(300,ym,5);
    t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H;
setcolor(1); circle(300,415,5); { упавшее тело}
readkey; closegraph;
END.

```

В этой программе строятся три модели процесса падения тела:

1) Сначала в текстовом режиме строится *модель – таблица*, содержащая значения пройденного пути, скорости и ускорения тела в фиксированные моменты времени;

| Номер шага | Время t | Путь S | Скорость V | Ускорение a |
|------------|---------|--------|------------|-------------|
| 8          | 1       | 10     | 13.5       | 9.2         |
| 16         | 3       | 37     | 25.7       | 8.0         |
| 24         | 4       | 81     | 35.9       | 6.4         |
| 32         | 6       | 137    | 43.9       | 4.8         |
| 40         | 7       | 202    | 49.7       | 3.4         |
| 48         | 8       | 275    | 53.8       | 2.4         |
| .....      |         |        |            |             |
| 128        | 22      | 1118   | 62.0       | 0.0         |
| 136        | 24      | 1204   | 62.1       | 0.0         |
| 144        | 25      | 1291   | 62.1       | 0.0         |
| 152        | 27      | 1378   | 62.1       | 0.0         |
| 160        | 28      | 1465   | 62.1       | 0.0         |
| 164        | 29      | 1509   | 62.1       | 0.0         |

Рис.48 - Модель – таблица процесса падения тела

Из таблицы - модели Рис.48 следует, что:

- Цикл, моделирующий падение тела, выполнялся 164 раза, на экран выводятся значение всех шагов, кратных 8, и последний 164 шаг.
- Время падения тела составляет примерно 29 сек.
- В первые 24 секунды падения скорость тела возрастает, затем становится постоянной, равной  $\approx 62,1$  м/с, то есть падение тела становится равномерным.

- Ускорение, наоборот, убывает и через 24 секунды практически становится равным нулю.

2) Затем в графическом режиме модель падения представляется в *виде графиков* зависимости скорости падения  $V$  и ускорения  $a$  от времени падения  $t$ . На графиках (Рис.49) более наглядно, чем в таблице, видно, как скорость падения резко возрастает до 61,5 м/сек, а затем становится постоянной, ускорение  $a$  в это же время убывает до практически до нуля.

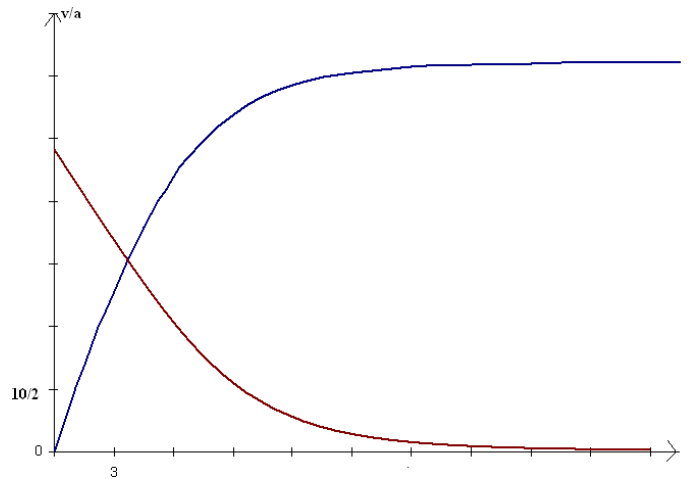


Рис.49 - Модель процесса падения в виде графиков

3) После этого опять в графическом режиме модель представлена в *виде демонстрации* падения тела на экране.

Все три модели по сущности являются знаковыми, по фактору времени – динамическими, так прослеживают процесс во времени, по характеру процесса – детерминированными.

#### Компьютерный эксперимент с моделью падения тела

*Компьютерный эксперимент всегда проводится с входными данными модели.* С помощью программы Pad\_telR можно проводить *простые компьютерные эксперименты, не изменяя кода программы, а изменяя только ее входные данные*, например, значение радиуса шарика или коэффициента вязкости среды. В табличной и графической модели при этом можно будет проследить, как изменятся при этом выходные данные процесса падения.

*Но компьютерный эксперимент можно организовать и программным путем.*

Рассмотрим пример задачи, для решения которой проводится такой эксперимент.

**Постановка задачи для эксперимента.** Определить, каким должен быть радиус  $r$  деревянного шарика, который падает на Землю с высоты  $H = 1500$  м в воздухе, коэффициент вязкости которого  $\mu = 0.0182$  Н·сек/м<sup>2</sup>, чтобы шарик приземлился со скоростью  $v = (100 \pm 1)$  м/сек. Известно, что коэффициент лобового сечения для шарика  $c = 0.4$ , плотность шарика  $\rho_{ш} = 800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воздуха  $\rho_{в} = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>. Результаты моделирования вывести:

- 1) в текстовом режиме в виде таблицы, содержащей номер попытки в эксперименте, значения радиуса  $r$ , времени  $t$ , скорости  $V$  и ускорения  $a$ , соответствующие этой попытке;
- 2) в виде графика зависимости  $V$  от  $r$ ;
- 3) в виде демонстрации на экране процесса падения тела при найденном в эксперименте значении  $r$ .

#### **Указания к составлению «экспериментальной» программы**

В программах, которые проводят эксперименты, назовем их «экспериментальными», **эксперимент всегда проводится с входной величиной, а условием его окончания всегда является заданное значение выходной величины.**

В данном случае эксперимент является вычислительным, он проводится с **входной величиной  $r$**  – радиусом падающего шарика, именно его значение является искомым. Условием (критерием) окончания эксперимента (поиска) является **значение выходной величины  $V$**  – скорости приземления тела, равное  $(100 \pm 1)$  м/с.

Для проведения **такого** эксперимента нужно:

- Составить программу, ядром которой будет рассмотренная выше программа Pad\_telR.
- Организовать в ней цикл, в котором меняется значение искомой величины  $r$  с каким-либо шагом. Этот цикл должен быть внешним по отношению к циклу, моделирующему падение.
- Внешний цикл должен заканчиваться тогда, когда скорость приземления  $V$  будет отличаться от заданного значения 100 на  $\pm 1$  м, то есть,  $V$  должна попасть в промежуток  $[99;101]$ , с точки зрения математики это равносильно неравенству

$|V - 100| \leq 1$ . Программа, выполняющая этот компьютерный эксперимент, в данном случае – вычислительный, представлена ниже:

```

program Eks_Pad;
uses Crt, Graph;
const H=1500; kvz =0.0182; c=0.4; psh=800; pv=1.29; g=9.8;
var gD, gM, r0m, v0m, rm, vm, ym, k, j, z, br, bv: integer;
    r, m, v0, v1, a0, a1, s0, s1, t0, t1, dt, k1, k2, ar, av, kr, ky, kv : real; mast,
    masv, masr, masa, mask1, mask2, masm: array[1..2000] of real; ars, avs:
    string;
BEGIN
    dt := sqrt (2*H/g)/100; r:= 0; j:=0;
    repeat {внешний цикл для подбора значения радиуса}
        r:=r+0.005; m:= 4/3*pi*exp(3*ln(r))*psh;
        k1:= 6*pi*k vz*r; k2:= 0.5*c*pi*sqr(r)*pv;
        t0:=0; s0:=0; v0:=0; a0:=g;
        repeat {цикл, моделирующий падение для заданного радиуса} t1:=
            t0+dt;
```

```

s1 := s0 + v0*dt + a0*sqr(dt)/2;v1
:= v0 +a0*dt;
a1:=(m*g - k1*v1 - k2* sqr (v1))/m;
t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H;
j:=j + 1; masr[j]:=r; mast[j]:=t1; masv[j]:=v1; masa[j]:=a1;
mask1[j]:= k1; mask2[j]:= k2;
until abs(v1-100) <=1;
if j < 25 then k:=1 else if j<40 then k:=2 else i:= round(k/20);
clrscr;
writeln(" z      R      m      k1      k2      t      V      a');
for z:= 1 to j do if (z mod k)=0 then writeln(z:5,'      ',masr[z]:5:3,
'      ',masm[z]:7:4,'      ',mask1[z]:5:4,'      ',mask2[z]:5:4,
'      ',mast[z]:5:3,'      ',masv[z]:5:4,'      ',masa[z]:5:4);
writeln(j:5,'      ',masr[j]:5:3,'      ',masm[j]:7:4,'      ',mask1[j]:5:4,
'      ',mask2[j]:5:4,'      ',mast[j]:5:3,'      ',masv[j]:5:4,'
      ',masa[j]:5:4);
writeln ('Требуемая скорость = ',v1:5:4, 'достигается при радиусе =', r:5:3);
readln;
gD:=Detect; Initgraph(gD,gM,'      ');
r0m:= 40; v0m:=420; br:= 50; ar:=0.025; bv:= 50; av:=15;
setbkcolor(15); setcolor(1);
line(10, v0m, 620, v0m); line(615, v0m - 5, 620, v0m); line(615,
v0m + 5, 620, v0m); outtextxy(630, v0m, 'R');line(r0m, 15, r0m,
460); line(r0m - 10, 25, r0m, 15);
line(r0m + 10, 25, r0m, 15); outtextxy(r0m, 5, 'V');
for i := 1 to 10 do line(r0m + i*br, v0m - 5, r0m + i*br, v0m + 5);for i :=
1 to 13 do line(r0m- 5, v0m - i*bv, r0m + 5, v0m - i*bv); outtextxy(r0m -
8, v0m + 8, 'O');
str(ar : 3 : 3, ars); outtextxy(r0m + br, v0m + 8, ars);str(av :
2: 0, avs); outtextxy(r0m - 20, v0m - bv, avs);kr:= br / ar ;
kv:= bv / av ; setcolor(2);
for z:=1 to j do
begin
rm:= round(r0m + kr*masr[z]);
vm:= round(v0k - kv*masv[z]);
circle(rm,vm,1);
end;
readkey;
cleardevice;
setcolor(1); circle(300,50,5);
setfillstyle(5,2); bar(200,420,400,430); readkey;

```

```

setcolor(0); circle(300,50,5);
t0:=0; s0:=0; v0:=0; a0:=g;
repeat
  t1:=t0+dt;
  s1:= s0+v0*dt+a0*sqr(dt)/2;
  v1:= v0+a0*dt;
  a1:= (m*g - k1*v1 - k2*sqr (v1))/m;
  km:=(420 - 50)/H; ym:= round(50 + ky*s1);
  setcolor(1); circle(300,yk,5); delay(450);
  setcolor(0); circle(300,ym,5);
  t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H;
setcolor(1); circle(300,415,5);
readkey; closegraph;}

```

**END.**

Сам эксперимент, в котором ищется значение радиуса  $r$ , проводится в программе в текстовом режиме с шагом 0.005. В этом же режиме на экран выводится таблица с результатами эксперимента, приведенная на Рис. 50.

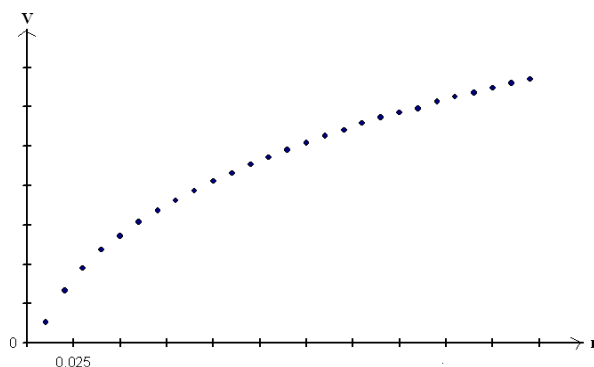
| <b>z</b> | <b>R</b> | <b>m</b> | <b>k1</b> | <b>k2</b> | <b>t</b> | <b>v</b> | <b>a</b> |
|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| 5        | 0.015    | 0.0113   | 0.0051    | 0.0002    | 106.202  | 14.2957  | 0.0000   |
| 10       | 0.030    | 0.0905   | 0.0103    | 0.0007    | 54.939   | 28.5163  | 0.0000   |
| 15       | 0.045    | 0.3054   | 0.0154    | 0.0016    | 42.166   | 38.2550  | 0.0000   |
| 20       | 0.060    | 0.7238   | 0.0206    | 0.0029    | 36.042   | 45.9041  | 0.0000   |
| 25       | 0.075    | 1.4137   | 0.0257    | 0.0046    | 32.543   | 52.3747  | 0.0002   |
| 30       | 0.090    | 2.4429   | 0.0309    | 0.0066    | 30.094   | 58.0757  | 0.0016   |
| 35       | 0.105    | 3.8792   | 0.0360    | 0.0089    | 28.344   | 63.2203  | 0.0060   |
| 40       | 0.120    | 5.7906   | 0.0412    | 0.0117    | 26.944   | 67.9289  | 0.0163   |
| 45       | 0.135    | 8.2448   | 0.0463    | 0.0148    | 25.895   | 72.2771  | 0.0344   |
| 50       | 0.150    | 11.3097  | 0.0515    | 0.0182    | 25.020   | 76.3117  | 0.0624   |
| 55       | 0.165    | 15.0533  | 0.0566    | 0.0221    | 24.320   | 80.0695  | 0.1008   |
| 60       | 0.180    | 19.5432  | 0.0618    | 0.0263    | 23.795   | 83.5856  | 0.1477   |
| 65       | 0.195    | 24.8475  | 0.0669    | 0.0308    | 23.270   | 86.8616  | 0.2075   |
| 70       | 0.210    | 31.0339  | 0.0720    | 0.0357    | 22.920   | 89.9537  | 0.2713   |
| 75       | 0.225    | 38.1704  | 0.0772    | 0.0410    | 22.570   | 92.8448  | 0.3456   |
| 80       | 0.240    | 46.3247  | 0.0823    | 0.0467    | 22.220   | 95.5423  | 0.4305   |
| 85       | 0.255    | 55.5647  | 0.0875    | 0.0527    | 21.870   | 98.0517  | 0.5263   |
| 87       | 0.261    | 63.5543  | 0.0925    | 0.0579    | 22.220   | 99.0835  | 0.5529   |

Требуемая скорость = 99.0835 достигается при радиусе = 0.261

Рис.50 - Табличная модель проведения эксперимента

Из таблицы следует, что программа выводит на экран каждую пятую попытку эксперимента, на 87 попытке она нашла искомое значение радиуса  $r$ , при котором значение скорости  $v$  попадает в промежуток  $[99, 101]$ . Очевидно, что движение шарика с таким радиусом до конца падения остается равноускоренным, так как значение ускорения при приземлении равно 0.5529. В графическом режиме программа строит график, приведенный на Рис.51. На нем наглядно видно, что при увеличении радиуса падающего шарика скорость его приземления увеличивается.

Рис.51 - Модель – график зависимости скорости приземления  $V$  от радиуса  $r$



Компьютерное моделирование экологических процессов

#### Самые страшные эпидемии в истории человечества

Эпидемия в переводе с греческого означает «повальная болезнь среди народа». Такс давних времён называют заболевания, которые прогрессировали во времени и в пространстве и превышали обычный уровень заболеваемости на данной территории. Эпидемии «истребляли» человечество много веков. Они уничтожали целые нации, забирали такое количество жизней, которое не забирала даже война, более того, чаще всего эпидемии играли решающую роль в ходе истории. Рассмотрим самые страшные эпидемии в истории человечества.

1) **480 г. до н.э. Эпидемия оспы** поразила Средиземноморье. Больше всех пострадала Персия, где болезнь выкосила всю армию, включая и правящего там царя Ксеркса.

2) **431 г. до н.э. Эпидемия «Чума Фукидида»**, эта неизвестная болезнь, погубила в течение года практически треть населения Древней Греции. Названа в честь историка Фукидида, оставившего потомкам описание этой загадочной болезни, убивавшей человека после недели мучительной агонии.

3) **551г. Эпидемия «Юстинианова чума»**, эта эпидемия бушевала в Восточной Римской империи почти три десятка лет, и за это время от болезни погибло более 20 млн. человек — почти половина всего населения империи.

4) **736г. Первая эпидемия оспы в Японии**, которая едва не уничтожила всех предков японцев. Как считают ученые, именно под влиянием моря в Японии получил распространение буддизм.

5) **1090г. «Киевский мор»** — это эпидемия чумы, привезенная купцами с Востока, убила за две недели свыше 10 тысяч человек — столица Киевской Руси тогда опустела.

6) **1348г. - «Черная смерть»**, это эпидемия бубонной чумы, занесенная в Европу Китая. Только в течение года от нее погибло почти 15 млн. человек, что составляло четверть всего населения Европы.

7) **1486г. «Английская потливая горячка»**. Эпидемия вспыхнула в Лондоне и всего за несколько дней охватила всю страну, вызвав огромные опустошения в городах —

неизвестная зараза расправлялась с человеком в течение одного дня. Всего за XV — XVI века по Европе прошло пять эпидемий этой болезни, а затем «потливая горячка» внезапно исчезла.

8) **1494г. Первая эпидемия сифилиса**, завезена в Европу из только что открытой Америки. Сифилис поразил всю Европу, дошел до Руси и уничтожил миллионы людей в Индии.

9) **1518г. Эпидемия «Пляски Святого Витта»**. Больные были охвачены многодневным припадком безумия, заставлявшим их без устали танцевать. Умерли десятки тысяч людей.

10) **1521г. Эпидемия оспы в Америке**. Последствия этой болезни опустошительны — вымерли целые племена. В Центральной Мексике, по разным оценкам, умерло от 40 до 60 процентов населения за один год.

11) **1664г. «Лондонская чума»** — это эпидемия бубонной чумы, унесла жизнь каждого пятого англичанина.

12) **1771г. Эпидемия «Чумный бунт в Москве»**. Это самая сильная эпидемия чумы в России, вызвавшая панику и восстания среди населения. Всего за месяц эпидемии в Москве и ее окрестностях погибло около 200 тысяч человек.

13) **1817г. Начало первой пандемии холеры**. Сперва началась эпидемия в Индии, вызвав неисчислимые жертвы среди населения и британских колониальных войск. В следующем году холера проникла в Китай, а через год — в Иран, Турцию, Аравию, Закавказье. Во многих городах погибла половина населения.

14) **1918г. Эпидемия «Испанки»**, вируса гриппа, убившего в течение двух лет свыше 50 млн. человек. Сегодня медики говорят, что «испанка» была тем же птичьим гриппом, которому удалось мутировать в человеческую форму.

15) **1974г. Эпидемия оспы в Индии**. В период с января по май того же года от оспы умерло более 15 000 человек. Многие остались калеками на всю жизнь. Были предприняты попытки сдержать болезнь и предотвратить её дальнейшее распространение. Последний случай оспы в стране был зарегистрирован 24 мая 1975 года. Пять лет спустя болезнь была полностью искоренена.

16) **В феврале 2014 года** мир всколыхнула новая угроза пандемии – **вирус Эбола**. Первые случаи заболевания были зафиксированы в Гвинее, после чего лихорадка быстро распространилась на соседние государства – Либерию, Нигерию, Сьерра-Леоне и Сенегал. Эта вспышка названа сильнейшей в истории вируса Эбола. Уровень смертности от этой лихорадки, по данным ВОЗ, достигает 90%, и врачи не имеют действенного лекарства против вируса. В Западной Африке погибли от этой болезни более 2700 человек, при этом эпидемия продолжает распространяться по миру, охватывая государства ранее не тронутые этим вирусом.

### **История появления моделей эпидемии**

Медиков всегда интересовало, как можно бороться с эпидемиями, погубившими миллионы людей. Когда этим заинтересовались математики, появились первые математические модели, которые служили целям прогноза и относились к области медицины. Начало применению математических методов при изучении эпидемий было положено Даниилом Бернулли в середине XVII века. Он впервые применил простейший математический аппарат для оценки эффективности профилактических прививок против натуральной оспы. Затем уже в середине XIX века английский ученый Уильям Фара изучал и моделировал статистические показатели смертности населения Англии от эпидемии натуральной оспы. Этот ученый впервые получил математические модели показателей «движения» эпидемии натуральной оспы в 1837 – 1939 годах в виде статистических закономерностей, что позволило ему в итоге составить прогностическую модель этой эпидемии.

В начале XX века сначала в России, а затем в Англии были сформулированы основы современной теории математического моделирования эпидемий, разработаны первые прогностические модели эпидемий (корь, ветрянка, малярия и др.), изучены их основные свойства, получены аналитические формулы для прогнозирования эпидемий.

С появлением в середине 50-х годов XX века первых электронно-вычислительных машин оформился следующий этап в развитии моделей эпидемий, число научных работ и публикаций по математическому и компьютерному моделированию эпидемий стало быстро увеличиваться. В работах того времени стали появляться все более сложные математические модели, в которых существенную роль играли *случайные факторы эпидемического процесса*, поэтому большинство моделей этого периода имели стохастический (вероятностный) характер, а рабочим аппаратом была теория вероятностей и случайных процессов.

### **Простейшая модель процесса развития эпидемии**

В третьей и четвертой главах данного пособия были рассмотрены математические и компьютерные модели трех физических процессов. В этом параграфе рассмотрим простейшую модель процесса развития эпидемии, этот процесс уже относится к области экологии и медицины. За многие годы существования человечества огромное число людей погибло от различных эпидемий, и медиков всегда интересовало, как развивается эпидемия, какие факторы влияют на ее развитие, как с ней бороться. Поэтому модель развития процесса эпидемии, или проще, модель эпидемии нужна, чтобы служить целям прогноза. В такой модели можно учесть влияние самых различных факторов:

- вероятность встречи инфицированных и здоровых людей;
- степень восприимчивости к инфекции различных людей;
- законы, управляющие деятельностью клеток и т.д.

Но это будет очень сложная модель, ее построение и изучение потребует много времени и средств. Для учебных целей построим простую модель естественного развития эпидемии, предполагая, что никакие противоэпидемические мероприятия не проводятся.

**Постановка задачи:** имеется группа из  $N$  здоровых людей. В момент  $t = 0$  в нее попадает один заболевший, т.е. источник инфекции, и в группе начинается эпидемия. Будем считать, что человек становится источником инфекции сразу после заражения, что удаление людей из группы не происходит, т.е. в ней нет умерших, выздоровевших и изолированных, и процесс развития эпидемии заканчивается, когда все люди в группе заболеют. Определить, через какое время эпидемия закончится, и в какой момент ее скорость достигнет максимума.

### **Математическая модель эпидемии**

Для ответа на вопрос задачи построим математическую модель развития эпидемии, для этого «переведем» на язык математики, условия задачи. Обозначим через

$x(t)$  – число заболевших людей в момент времени  $t$ ;  $y(t)$

– число здоровых людей в момент времени  $t$ .

Из условий задачи следует, что

$$x(t) + y(t) = N + 1 \quad (1)$$

$$x(0) = 1, \quad (2)$$

а через какое-то время  $T$  заболеют все люди в группе. Разобьем отрезок времени  $[0, T]$  на  $n$  частей и обозначим

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

Выясним, какой прирост больных  $\Delta x$  появится за время  $\Delta t$ . Очевидно, что

1)  $\Delta x \sim \Delta t$ , то есть,  $\Delta x$  пропорционально  $\Delta t$ ,

2)  $\Delta x \sim x(t) \cdot y(t)$ , то есть,  $\Delta x$  пропорционально числу встреч здоровых ( $y(t)$ ) и больных ( $x(t)$ ) людей.

На языке математики это запишется так:

$$\Delta x(t) = \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) \Delta t \quad (3),$$

где  $\alpha$  – это коэффициент пропорциональности, для каждой эпидемии он свой и определяется опытным путем.

Выразим из формулы (1) число здоровых людей  $y(t)$

$$y(t) = N + 1 - x(t),$$

подставим полученное выражение в формулу (3), и проведем ряд преобразований

$$\Delta x = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \cdot \Delta t \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \rightarrow$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)]) = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)].$$

Из последнего выражения имеем

$$x(t)' = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \quad (4)$$

Уравнение (4) – это *простейшая математическая модель развития эпидемии*, она связывает исходные данные эпидемии, т.е. число людей в опытной группе -  $N$ , коэффициент пропорциональности -  $\alpha$  с выходными данными, то есть числом заболевших в момент времени  $t$  -  $x(t)$  и скоростью развития эпидемии в этот момент -  $x'(t)$ . Эта модель по принципам построения является *детерминированной*, по целям моделирования является *дескриптивной*, так как лишь описывает развитие эпидемии.

### Использование метода Эйлера – Коши для решения математической модели эпидемии

Для построенной матмодели развития эпидемии найдено точное решение. Но, как правило, для большинства моделей, представленных дифференциальными уравнениями, не удастся найти точное решение, поэтому для их решения используют приближенные методы решения. К ним, в частности, относится метод Эйлера-Коши, который позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения в численном виде. Рассмотрим, как можно использовать этот метод применительно к матмодели (4).

Рассмотрим прежде идею метода. Пусть дано дифференциальное уравнение  $y' = f(x, y)$  (12)

где  $y'$  - производная функции  $y(x)$ ,  $f(x, y)$  - некоторая функция. Требуется найти его решение, то есть функцию  $y(x)$ , удовлетворяющую начальному условию  $y(x_0) = y_0$  (13)

Для нахождения решения строится система равноудаленных друг от друга точек  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$  где  $x_i = x_0 + i \cdot h$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), а  $h$  – достаточно малый шаг. В этих точках *поочередно* вычисляется значение искомой функции по формулам, предложенным Эйлером и Коши:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^* &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k); \\ y_{k+1} &= y_k + h ( f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}^*) ) / 2; \end{aligned} \quad (14)$$

Для использования этого метода математическую модель эпидемии (4) представим

в виде  $x'(t) = f(x)$ , где  $f(x) = \alpha x(t) [ N+1 - x(t) ]$ , (15)

здесь искомая функция -  $x(t)$ , она является решением модели эпидемии. Для

у

равнения

(15) формулы Эйлера-Коши приобретают более простой по сравнению с формулой (14) вид

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* &= x_k + h \cdot f(x_k); \\ x_{k+1} &= x_k + h (f(x_k) + f(x_{k+1}^*)) / 2; \\ t_{k+1} &= t_k + h; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

### Компьютерная модель развития эпидемии

В компьютерной модели развития эпидемии решение задачи находится методом Эйлера – Коши, то есть, в ее основе лежит алгоритм, определенной формулами (16). **program** Epidemia;

**uses** Crt, Graph;

**var** gD, gM, i, j, k, bg, bv, g0k, v0k, tk, xk, vk: **integer**;

a, t0, t1, tt, x0, xp, x1, dt, b, x2, ag, av, kg, kv, v: **real**;

ags, avs, ts: **string**; N : **longint**; t, x, z: **array** [1..2000]

**of real**; **function** f (x: **real**): **real**;

**begin**

f:=a\*x\*(N+1-x); **end**;

**BEGIN**

**clrscr**;

**write** ('Введите число людей в группе N '); **readln** (N);

**write** ('Введите коэффициент пропорциональности a '); **readln** (a);

**write** ('Введите шаг времени dt '); **readln** (dt);

**write** ('Введите время начала эпидемии t0 '); **readln**

(t0); **write** ('Введите число источников инфекции x0 ');

**readln** (x0); i:=0; v:=0;

**repeat**

i:=i+1; t[i]:=t0; x[i]:=x0; z[i]:=v;

xp:=x0+dt\*f(x0); x1:=x0+dt\*(f(x0)+f(xp))/2; v:=f(x0); t0:=t0+dt; x0:=x1;

**until** **round** (x0 +1) >= N +1;

**clrscr**;

**writeln** (' Шаг i      Время t      Число заболевших x      Скорость v');

**if** i < 25 **then** k:=1 **else if** i<40 **then** k:=2 **else** k:=

**round**(i/20); **for** j:=1 **to** i **do if** (j **mod** k = 0) **then**

**writeln** ('      'j:3,'      't[j]:5:2,'      'x[j]:5:0,'

'z[j]:5:0);

**writeln** ('      'i:3,'      't[i]:5:2,'      'x[i]:5:0,'      'z[i]:5:0);

**readln**;

gD:=**Detect**; **Initgraph**(gD, gM, ' '); g0k:=20; v0k:=420;

**setbkcolor**(15); **setcolor**(1);

bg:=30; bv:=100; ag:=1.5; av:=260; kg:=bg/ag;

kv:=bv/av; **line**(10,v0k,620,v0k); **line**(615,v0k-

5,620,v0k); **line**(615,v0k+5,620,v0k);

**outtextxy**(625,v0k-10,t'); **line**(g0k,10,g0k,450);

**line**(g0m-5,15,g0k,10);

**line**(g0k+5,15,g0k,10);

```

outtextxy(5,5,'X/V');
outtextxy(5,v0k+10,'O');
for j:=1 to 25 do line(g0k+j*bg, v0k+5, g0k+j*bg,
v0k-5);for j:=1 to 4 do line(g0k-5, v0k-j*bv,
g0k+5, v0k-j*bv); str(ag:2:1,ags);outtextxy(g0k-
10+bg,v0k+10,ags); str(av:3:0,avs);
outtextxy(g0k+10,v0k-bv,avs);
for j:=1 to i dobegin
    tk:=round(g0k + kg*t[j]);
    xk:=round(v0k - kv*x[j]);
    vk:=round(v0k -
kv*z[j]);
    setcolor(2);
    circle(tk,xk,1);
    setcolor(5);
    circle(tk,vk,1);
end;
str(N:6,ags); str (a:6:3,avs);
str(t0:6:2,ts);setcolor(1);
outtextxy(50,450, 'N=' + ags+ ' a=' +avs+ ' Заразный период
T=' +ts);tt:= 2*ln(N)/(a*(N + 1)); str(tt:6,ts);
outtextxy(50, 460, 'Теоретический заразный период T=' +ts);
readkey;
closegraph;END.

```

Результаты работы программы выводятся:

- 1) Сначала в виде таблицы, в который  
выведены: а) дискретные моменты  
времени  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ;

б) число заболевших в эти моменты времени  $x(t_1), \dots, x(t_n)$ ; в) скорость эпидемии в эти моменты времени  $v(t_1), \dots, v(t_n)$ .

- 2) Затем в виде графиков зависимости  $x(t)$  и  $v(t)$  от  $t$ , построенных по данным, взятым из соответствующих массивов.

Таблица и графики являются соответственно табличными и графическими моделями развития эпидемии.

Если в программу ввести данные  $N=1000$ ,  $a=0.001$ ,  $dt=0.001$ ,  $t_0=0$ ,  $x_0=1$ , то итогом работы программы будет таблица, приведенная ниже на Рис. 56, и графики, изображенные на Рис.57.

| Шаг i | Время t | Число заболевших x | Скорость эпидемии v |
|-------|---------|--------------------|---------------------|
| 100   | 0.99    | 3                  | 2                   |
| 200   | 1.99    | 7                  | 7                   |
| 300   | 2.99    | 20                 | 19                  |
| 400   | 3.99    | 52                 | 48                  |
| 500   | 4.99    | 130                | 112                 |
| 600   | 5.99    | 289                | 204                 |
| 700   | 6.99    | 525                | 250                 |

| Шаг i | Время t | Число заболевших x | Скорость эпидемии v |
|-------|---------|--------------------|---------------------|
| 100   | 0.99    | 3                  | 2                   |
| 200   | 1.99    | 7                  | 7                   |
| 300   | 2.99    | 20                 | 19                  |
| 400   | 3.99    | 52                 | 48                  |
| 500   | 4.99    | 130                | 112                 |
| 600   | 5.99    | 289                | 204                 |
| 700   | 6.99    | 525                | 250                 |

|      |       |      |     |
|------|-------|------|-----|
| 800  | 7.99  | 751  | 188 |
| 900  | 8.99  | 892  | 98  |
| 1000 | 9.99  | 958  | 41  |
| 1100 | 10.99 | 985  | 16  |
| 1200 | 11.99 | 995  | 6   |
| 1300 | 12.99 | 999  | 2   |
| 1400 | 13.99 | 1000 | 0   |

Рис.56 - Модель – таблица развития эпидемии

Из таблицы-модели следует, что цикл, моделирующий процесс эпидемии, выполнится 1400 раз, на экран выводится данные, полученные на каждом шаге, кратном

100. «Заразный» период эпидемии составляет 13.99 ед. времени, это могут быть часы, дни, недели, месяцы, за это время заболеют все люди в группе. Максимальное значение скорости = 250 чел./ед.вр. приходится на середину заразного периода.

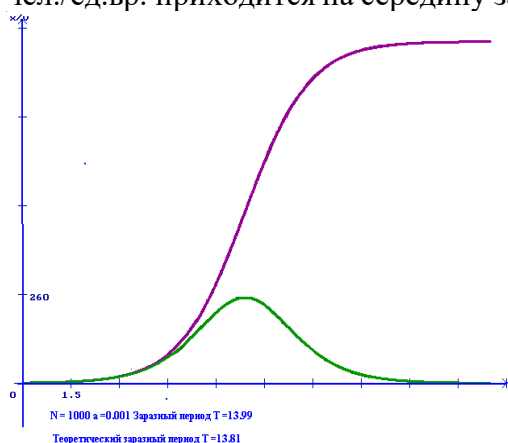


Рис. 57 - Модель – график развития эпидемии

Как следует из модели – графика число заболевших сначала резко возрастает и примерно через 10 единиц времени практически уже не меняется.