

М. Е. Е В С Е Е В

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

**АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ РАБОТЫ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2006**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего и профессионального образования

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М. Е. Е В С Е Е В

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ РАБОТЫ

РЕКОМЕНДОВАНО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ
ПО УНИВЕРСИТЕТСКОМУ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Санкт-Петербург
2006

Евсеев М.Е. Теоретические основы электротехники. Анализ линейных электрических цепей при установившихся режимах работы: Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений. –СПб.: СЗТУ, 2006. – 244 с.

Пособие разработано на основании государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования для студентов высших учебных заведений по направлениям подготовки 553000 – «Системный анализ и управление» и 553100 – «Техническая физика».

В учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с методами расчета линейных электрических цепей постоянного и синусоидального тока при установившихся режимах их работы, что соответствует первой части дисциплин "Теоретические основы электротехники" и "Электротехника и электроника". Оно составлено с учетом особенностей восприятия учебного материала студентами заочной и очно-заочной форм обучения, сочетающими учебные занятия с трудовой деятельностью, и может быть с успехом использовано для самостоятельного изучения основ теории цепей. Пособие содержит большое количество примеров с развернутыми решениями (50% общего объема) и обширный видеоряд из схем электрических цепей, векторных диаграмм, графиков и таблиц, подробно поясняющих предлагаемый теоретический и практический материал. Каждая глава пособия снабжена дополнительными расчетными заданиями и вопросами для самоконтроля.

Данное учебное пособие предназначено главным образом для студентов электроэнергетических, электромеханических и электротехнологических специальностей. Оно будет полезным также и для студентов других специальностей, изучающих электротехнику, в той ее части, которая связана с теорией цепей.

Р е ц е н з е н т ы: **В.Н. Прокофьев**, канд. техн. наук, доц. кафедры электротехники и электромеханики СЗТУ;
А.Н. Горский, д-р техн. наук, проф. кафедры теоретических основ электротехники Петербургского государственного университета путей сообщения;
В.Я. Соколов, канд. техн. наук, доц. кафедры Э и АПС Санкт-Петербургского института машиностроения.

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплины "Теоретические основы электротехники", "Электротехника и электроника". Они относятся к группе общетехнических инженерных дисциплин, базирующихся на курсах физики и математики. Поэтому их успешное освоение во многом определяется уровнем подготовки студентов по этим фундаментальным предметам.

Основная задача предлагаемых к изучению дисциплин состоит в приобретении студентами электротехнического образования, заключающегося не только в знании теории, но и в выработке навыков выполнения практических расчетов электротехнических устройств.

В свою очередь, электротехническая подготовка студентов является основой для последующего успешного освоения специальных дисциплин, связанных с электроснабжением, электромашиностроением, электроаппаратостроением, электротехнологией, промышленной электроникой, автоматизацией технологических процессов.

Изучение учебных материалов, представленных в данном пособии, производится (в соответствии с действующими учебными планами) в следующие сроки:

1. Для студентов, изучающих дисциплину "Теоретические основы электротехники" – *в течение трех семестров*; для заочной и очно-заочной форм обучения в 5-м, 6-м и 7-м семестрах, а для очно-заочной ускоренной формы обучения в 3-м, 4-м и 5-м семестрах.
2. Для студентов, изучающих дисциплину "Электротехника и электроника" – *в течение двух семестров*; для заочной и очно-заочной форм обучения в 5-м и 6-м семестрах, а для очно-заочной ускоренной формы обучения в 3-м и 4-м семестрах.

Введение

В учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с методами расчета линейных электрических цепей постоянного и синусоидального тока при установившихся режимах их работы. Это соответствует материалу первой части дисциплин "Теоретические основы электротехники" и "Электротехника и электроника ч.1 и 2".

Содержание учебного пособия полностью отвечает требованиям государственных стандартов по высшему профессиональному образованию. При его разработке учтены особенности получения образования без отрыва от трудовой деятельности при ограниченном бюджете времени для очных форм занятий.

Отобранный для пособия учебный материал, дает студенту возможность в дальнейшем успешно осваивать специальные электротехнические дисциплины. Общий его объем составляет около 15 печатных листов и позволяет изучить весь материал в течение одного семестра. Все теоретические выкладки имеют подробные пояснения, что помогает студенту самостоятельно разобраться в их последовательности и оценить полученный результат. Много внимания уделяется в пособии в выработке навыков практических расчетов электрических цепей. Все примеры имеют развернутые численные решения и составляют более 50 % общего объема пособия.

Большое количество схем электрических цепей, векторных диаграмм, графиков и таблиц обеспечивают хорошую наглядность учебного материала и способствуют его усвоению. Каждая глава пособия снабжена дополнительными задачами для самостоятельного решения и вопросами для самопроверки.

Учебное пособие состоит из девяти глав, расположенных в последовательности, соответствующей возрастающей сложности учебного материала и в определенной степени повторяющей историю развития электротехники. Не все из этих глав обязательны к изучению в полном объеме. В зависимости от номера специальности и формы обучения некоторые из них можно изучать частично или исключать совсем из рассмотрения по указанию преподавателя, ведущего данную дисциплину.

Автор приносит глубокую благодарность д.т.н., заслуженному деятелю науки РФ, профессору С.М.Аполлонскому, д.т.н., профессору М.А.Шакирову и к.т.н., доценту Б.Е.Синдаловскому за внимательное прочтение рукописи и за ряд полезных замечаний, способствовавших ее улучшению.

Все отзывы, замечания и предложения направляйте по адресу: 191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная 5, СЗТУ, кафедра электротехники и электромеханики.

Глава 1

Электрическая цепь, ее элементы и параметры

1.1. Определение цепи

Электрической цепью называется совокупность электротехнических устройств, создающих замкнутый путь электрическому току. Она состоит из источников (генераторов) энергии, приемников энергии (нагрузки) и соединительных проводов. В цепи могут быть также различные преобразователи (играют роль как роль источников, так и приемников), защитная и коммутационная аппаратура.

В источниках неэлектрические виды энергии преобразуются (в соответствии с законом сохранения энергии) в энергию электромагнитного поля. Так, например, на гидроэлектростанциях энергия падающей воды (энергия гравитационного поля) преобразуется в энергию электромагнитного поля. В приемниках энергия электромагнитного поля преобразуется в тепловую и другие виды энергии. Кроме того, некоторая часть энергии запасается в электрических и магнитных полях цепи.

Электромагнитные процессы в электрической цепи описываются с помощью понятий о токе, напряжении, электродвижущей силе (ЭДС), сопротивлении, индуктивности и емкости. Буквенные обозначения этих, а также других величин, используемых в этом учебном пособии представлены в табл.1.1. Там же дана их русская транскрипция и единицы измерений. Заметим здесь, что ЭДС, токи и напряжения, изменяющиеся во времени, обозначаются строчными латинскими буквами *e*, *i*, *u*, а ЭДС, токи и напряжения, неизменные во времени, обозначаются заглавными латинскими буквами *E*, *I*, *U*.

1.2. Графическое изображение электрической цепи и ее элементов

Графическое изображение электрической цепи называется ее *схемой*. В схеме различают ветви, узлы и контуры. *Ветвь* – это часть схемы, состоящая только из последовательно соединенных источников и приемников. *Узел* – точка схемы, в которой сходятся не менее трех ветвей (ветви начинаются и заканчиваются на узлах цепи). *Контур* – часть схемы, образованная ветвями; число контуров определяется числом вариантов обходов по ветвям цепи. На рис.1.1 даны структурные схемы трех электрических цепей и указано количество ветвей узлов и контуров в каждой из них *.

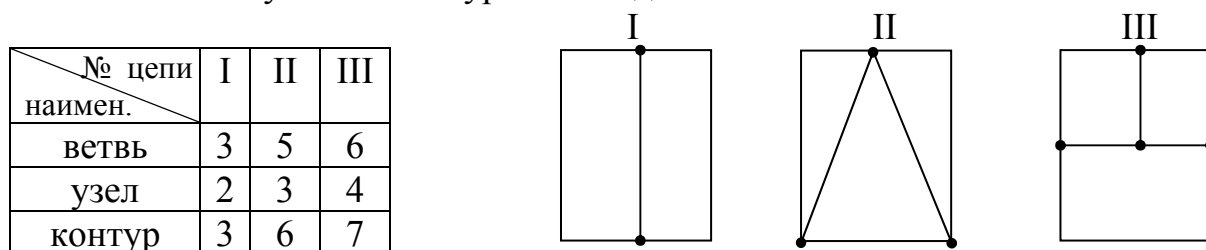


Рис.1.1

* В учебной литературе такие схемы называют топологическими.

Принятые в настоящем учебном пособии графические обозначения основных элементов цепи, показаны на рис.1.2.

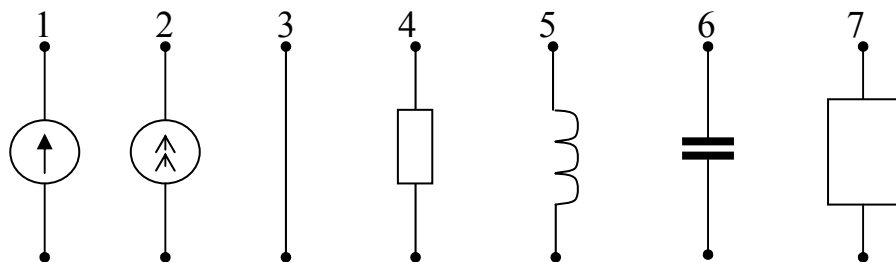


Рис.1.2

На этом рисунке : 1 - источник ЭДС; 2 - источник тока; 3 - соединительный провод; 4 - сопротивление R цепи; 5 - индуктивность L цепи; 6 - емкость C цепи; 7 - двухполюсник (цепь с неизвестной структурой, имеющая два входных зажима).

1.3. О направлениях действия ЭДС токов и напряжений

В электрических цепях токи напряжения и ЭДС действуют в определенных направлениях. Это обстоятельство указывают на схемах стрелками (рис.1.3).

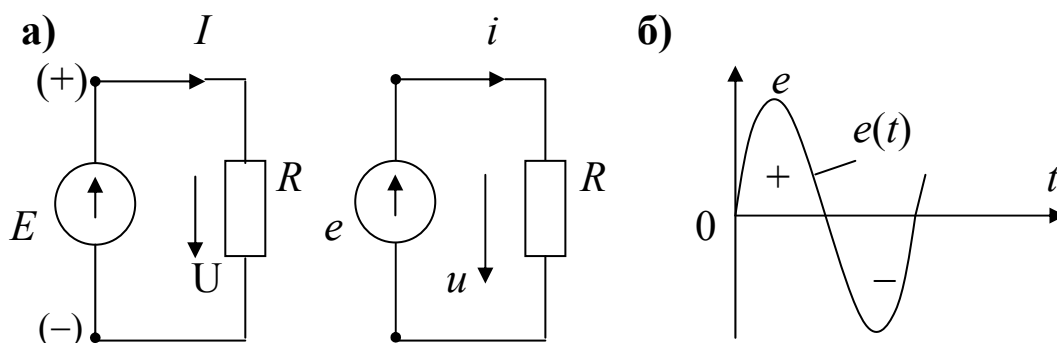


Рис.1.3

В цепях постоянного тока (рис.1.3,а) направление действия ЭДС источника принято указывать в сторону того зажима, на котором образуются положительные заряды. Направление тока во внешней цепи принято указывать от положительно заряженного полюса (зажима) источника к отрицательно заряженному. Направление действия напряжения в приемнике всегда указывают в ту же сторону, что и направление действия тока.

В цепях синусоидального тока (рис.1.3,б) принято обозначать направления ЭДС тока и напряжения, используя положительный полупериод тока, при котором ток не изменяет своего направления. При этом картина этих направлений получается аналогичной с цепью постоянного тока.

Т а б л и ц а 1.1

**Основные электрические и магнитные величины, используемые
в данном учебном пособии**

№ п/п	Буквен- ное обоз- начение	Русская транск- рипция	Наименование величин	Единица измерения	
				название	обоз- нач.
1	2	3	4	5	6
1	i	и	мгновенные значения тока, напряжения, ЭДС	ампер	А
2	u	у		вольт	В
3	e	е		вольт	В
4	I	и	постоянные ток, напряжение, ЭДС или действующие значения синусоидального тока, напряжения, ЭДС	ампер	А
5	U	у		вольт	В
6	E	е		вольт	В
7	f	эф	частота , угловая частота	герц	Гц
8	ω	омега		единица (радиан) в секунду	1/с (рад/с)
9	ψ_i	пси и	начальные фазы синусоидального тока, напряжения и ЭДС	градус	°
10	ψ_u	пси у		или	или
11	ψ_e	пси е		радиан	рад
12	φ	фи	угол сдвига фаз между синусоидальными напряжением и током цепи	градус или радиан	° или рад
13	t	тэ	время, прошедшее от начала отсчета;	секунда	с
14	T	тэ	период любой периоди- ческой функции времени	секунда	с
15	I_m	и эм	амплитуда синусои- дального тока, напряжения, ЭДС	ампер	А
16	U_m	у эм		вольт	В
17	E_m	е эм		вольт	В
18	q	ку	электрический заряд	кулон	К
19	L	эль	индуктивность	генри	Гн
20	C	це	емкость	фарада	Ф
21	R	эр	сопротивление цепи постоянного тока или активное сопротивление цепи синусоид. тока	ом	Ом

О к о н ч а н и е т а б л . 1.1

1	2	3	4	5	6
22	X_L	икс эль	реактивное индуктивное, реактивное емкостное и полное сопротивление цепи синусоид. тока;	ом	Ом
23	X_C	икс це		ом	Ом
24	z	зет		ом	Ом
25	G	же	проводимость цепи постоянного тока или активная проводимость цепи синусоид. тока, реактивная индуктивная, реактивная емкостная и полная проводимости цепи синусоид тока	сименс	См
26	b_L	бэ эль		сименс	См
27	b_C	бэ цэ		сименс	См
28	y	игрек		сименс	См
29	Φ	фи	магнитный поток число витков катушки потокосцепление .	вебер	Вб
30	w	дубль вэ		витки	-
31	Ψ	пси		вебер	Вб
32	P	пэ	мощность цепи постоянного тока или активная мощность цепи синусоидального тока	ватт	Вт
33	Q	ку	реактивная мощность цепи синусоидального тока	вольт- ампер реактивный	вар
34	S	эс	полная мощность цепи синусоидального тока	вольт-ампер	ВА
35	$\dot{I}$	и	комплексные ток, напряжение, ЭДС	ампер	А
36	$\dot{U}$	у		вольт	В
37	$\dot{E}$	е		вольт	В
38	$\underline{Z}$	зэт	комплексные сопротив- ление, проводимость и мощность	ом	Ом
39	$\underline{Y}$	игрек		сименс	См
40	$\underline{\tilde{S}}$	эс		вольт-ампер	ВА
41	$\underline{A}$	а	коэффициенты пассив- ного четырехполюсника А-формы записи	безразмерн.	-
42	$\underline{B}$	бэ		ом	Ом
43	$\underline{C}$	цэ		сименс	См
44	$\underline{D}$	дэ		безразмерн.	-
45	γ	гамма	коэффициент распространения линии	единица на метр	1/м
46	λ	лямбда	длина волны в линии	метр	м
47	ϑ_ϕ	вэ эф	фазовая скорость волны	метр в сек.	м/с
48	$\underline{Z}_B$	зет вэ	волновое сопротивление характеристическое соп- ротивление четыхпол.	ом	Ом
	$\underline{Z}_C$	зет цэ		ом	Ом

1.4. Законы электрических цепей

Ими являются первый и второй законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа относится к узлам цепи: в любой момент времени алгебраическая сумма токов в узле равна нулю

$$\sum_{k=1}^K i_k = 0, \quad (1.1)$$

где K – число ветвей, подходящих к узлу (три и более).

Токи, подходящие к узлу, и токи, отходящие от узла, имеют противоположные знаки. Будем считать подходящие к узлу токи положительными и брать их в уравнениях первого закона Кирхгофа со знаком (+), а отходящие от узла, – отрицательными и брать их со знаком (–).

Первый закон Кирхгофа фактически является следствием известного из курса физики принципа непрерывности электрического тока, согласно которому линии тока всегда замкнуты и не имеют ни начала, ни конца.

Пример 1.1. На рис.1.4,а показан узел цепи с пятью подходящими к нему ветвями. Требуется составить для этого узла уравнение по первому закону Кирхгофа.

Решение. На основании формулы (1.1) имеем

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 + i_5 = 0 \quad \text{или} \quad i_1 + i_3 + i_5 = i_2 + i_4.$$

Таким образом, всегда сумма токов, подходящих к узлу, равна сумме токов, отходящих от узла.

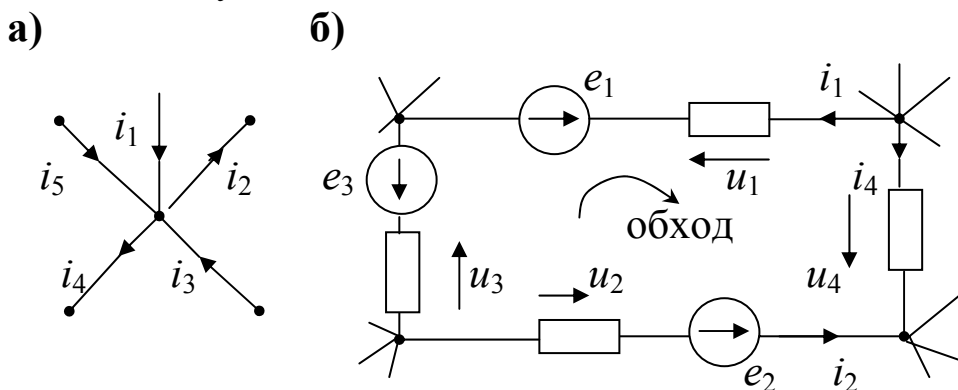


Рис.1.4

Второй закон Кирхгофа относится к контурам цепи: в любой момент времени алгебраическая сумма ЭДС всех источников энергии контура равна алгебраической сумме напряжений на всех приемниках этого контура.

$$\sum_{q=1}^Q e_q = \sum_{n=1}^N u_n, \quad (1.2)$$

где Q – число источников ЭДС в контуре; N – число приемников контура.

Для составления уравнения по второму закону Кирхгофа необходимо предварительно (произвольно) выбрать направление обхода этого контура. Те ЭДС и напряжения, направления которых совпадают с выбранным

направлением обхода, считаются положительными и берутся в уравнении со знаком (+), а остальные – со знаком (–).

Пример 1.2. На рис.1.4,б показан один из контуров сложной электрической цепи. Направления действия ЭДС источников и напряжений на приемниках известны. Требуется составить для этого контура уравнение по второму закону Кирхгофа.

Решение. Для этого предварительно выбираем (произвольно) направление обхода контура и в соответствии с формулой (1.2) составляем следующее уравнение:

$$e_1 - e_2 - e_3 = -u_1 + u_4 - u_2 + u_3.$$

Здесь e_2 и e_3 , u_1 и u_2 взяты со знаком (–), так как их направление действия не совпадает с направлением обхода контура; e_1 , u_4 и u_3 взяты со знаком (+), так как их направление действия совпадает с направлением обхода контура.

1.5. Параметры электрических цепей

Любая электрическая цепь и каждый ее элемент в отдельности обладают тремя параметрами: сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C .

Сопротивление R характеризует способность цепи преобразовывать электромагнитную энергию в тепловую. Количество тепловой энергии W_T , выделяющееся в сопротивлении R при протекании тока i в течение времени t , определяется соотношением (1.3) и измеряется в джоулях (Дж):

$$W_T = \int_0^t i^2 R dt. \quad (1.3)$$

Величина сопротивления любого элемента цепи определяется как отношение постоянного напряжения на этом элементе к постоянному току в нем и измеряется в омах (Ом):

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1.4)$$

Индуктивность L характеризует способность цепи накапливать энергию магнитного поля. Такой способностью обладает любой проводник с током или система проводов. Количество этой энергии W_M , накопленной в цепи, зависит от величины тока i и измеряется в джоулях (Дж):

$$W_M = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.5)$$

Эта энергия не преобразуется в тепло, а существует в цепи в виде некоторого запаса. Когда ток в цепи равен нулю, запаса энергии магнитного поля в ней нет.

Величина индуктивности определяется как отношение потокосцепления цепи Ψ к току i и измеряется в генри (Гн)

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (1.6)$$

Потокосцеплением называется сумма магнитных потоков всех витков катушки. В простейшем случае для катушки на замкнутом стальном сердечнике

можно считать, что ее потокосцепление есть магнитный поток Φ , умноженный на число витков w : $\Psi = \Phi w$.

Емкость C характеризует способность цепи накапливать энергию электрического поля. Такой способностью обладают любые два проводника, разделенные диэлектриком, например провод, висящий над землей, любые два проводника линии передачи.

Количество энергии электрического поля $W_{\text{э}}$, накопленной в цепи с емкостью C , зависит от величины напряжения между проводниками и измеряется в джоулях (Дж):

$$W_{\text{э}} = \frac{Cu^2}{2}. \quad (1.7)$$

Эта энергия не может преобразовываться в тепловую, а существует в цепи в виде некоторого запаса. Если напряжение между проводниками отсутствует, то и запаса энергии электрического поля в цепи нет.

Величина емкости C определяется как отношение электрического заряда q одного из проводников к напряжению u между ними и измеряется в фарадах (Ф):

$$C = \frac{q}{u}. \quad (1.8)$$

В табл.1.2 представлены конструкции некоторых простейших электротехнических устройств и формулы для расчета их параметров. В этой табл.: γ – удельная электрическая проводимость проводника (1/Ом·м); μ_a – абсолютная магнитная проницаемость стали (Гн/м); ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика (Ф/м); ℓ – длина проводника, средняя длина стального сердечника, расстояние между пластинами конденсатора (м); S – площадь поперечного сечения проводника, площадь поперечного сечения стального сердечника, площадь пластины конденсатора (м²); w – число витков обмотки; Φ – магнитный поток в сердечнике, измеряемый в веберах (Вб).

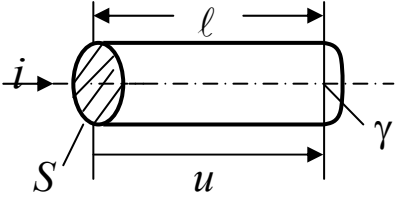
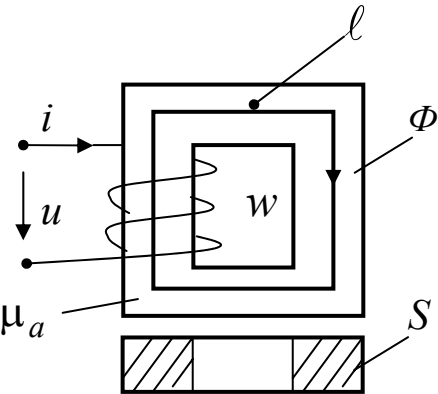
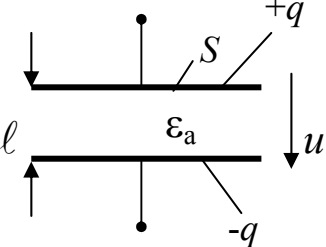
1.6. Понятие о линейных и нелинейных электрических цепях

Если γ , μ_a и ϵ_a (и следовательно R , L и C) являются постоянными величинами и не зависят от тока (или напряжения), то такие устройства называются *линейными*, а цепи, их содержащие, называются *линейными цепями*. Именно такие цепи рассматриваются в данном учебном пособии.

Существует, однако, целый ряд устройств, у которых γ , μ_a и ϵ_a зависят от величин токов (или напряжений). Таковыми, в частности, являются все полупроводниковые приборы, катушки на насыщенных стальных сердечниках, нагревательные устройства с большим диапазоном изменения температур (электрическая дуга, лампы накаливания), конденсаторы с сегнетоэлектриками. Цепи, содержащие такие устройства, называются *нелинейными*.

Т а б л и ц а 1.2

**Формулы для расчета параметров простейших
электротехнических устройств**

№ п/п	Наименование устройства	Эскиз устройства	Формула для определения параметра
1	Прямолинейный проводник с постоянным поперечным сечением		$R = \frac{\ell}{\gamma S}$
2	Катушка на замкнутом стальном сердечнике постоянного сечения		$L = \frac{\mu_a w^2 S}{\ell}$
3	Плоский конденсатор		$C = \frac{\epsilon_a S}{\ell}$

Свойства нелинейного элемента электрической цепи не могут быть выражены одним постоянным числом и поэтому описываются его характеристикой. Для сопротивлений это зависимости напряжения от тока (вольтамперные характеристики); для индуктивностей это зависимости потокосцепления от тока (веберамперные характеристики); для емкостей это зависимости электрического заряда от напряжения (кулонвольтные характеристики). На рис.1.5 показаны примеры характеристик некоторых линейных (ЛЭ) и нелинейных (НЭ) элементов цепи.

Заметим, что характеристики всех линейных элементов цепи являются прямыми линиями, а нелинейных элементов – кривыми.

1.7. Идеальные элементы электрической цепи

Любое электротехническое устройство содержит все три параметра: сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Рассмотрим (рис.1.6),

катушку, выполненную из провода с конечной проводимостью (это может быть и нить лампы накаливания, и обмотка трансформатора или электродвигателя).

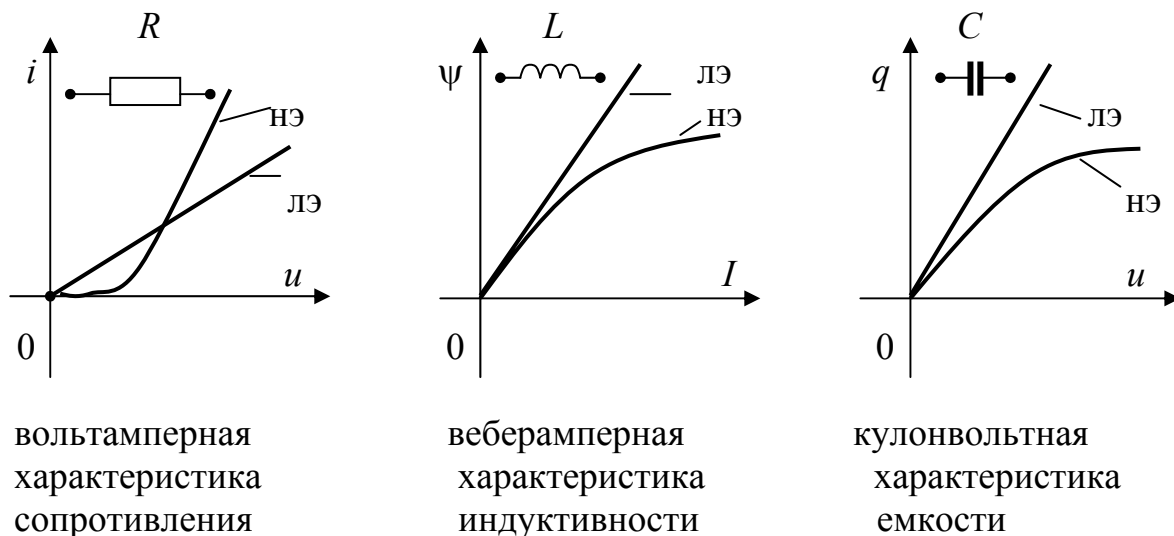


Рис.1.5

При подаче на ее зажимы напряжения u на концах катушки появляются разноименные заряды $(+)q$ и $(-)q$ и в обмотке начинает протекать ток i . При этом вокруг витков обмотки возникает магнитное поле, характеризуемое потокоцеплением ψ^* . Таким образом, в соответствии с формулами (1.4), (1.6) и (1.8) рассматриваемая катушка обладает всеми тремя вышеуказанными параметрами.

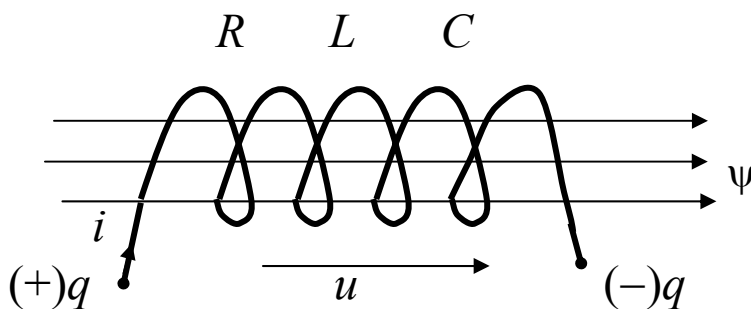


Рис.1.6

Для удобства анализа и расчета электрических цепей вводят в рассмотрение такие элементы, которые при всех условиях обладают только одним параметром: только сопротивлением, только индуктивностью, только емкостью. Они называются *идеальными*.

Графическое изображение идеальных элементов электрической цепи показано на рис.1.2 позициями 4, 5 и 6. В природе таких элементов не существует, но есть устройства, по своим свойствам близкие к идеальным. Реостат (резистор) при низких частотах обладает практически только сопротивлением R , а индуктивностью L и емкостью C этого устройства можно пренебречь. Катушка индуктивности на замкнутом ферромагнитном

* На рис.1.6 потокоцепление условно показано отрезками линий магнитного поля.

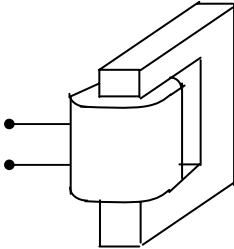
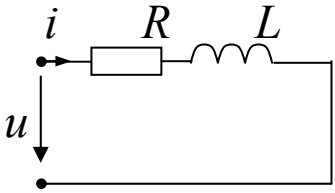
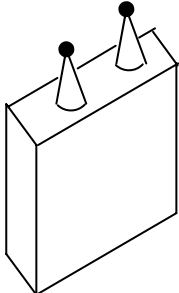
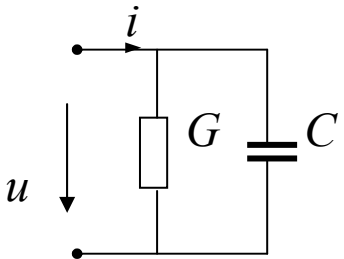
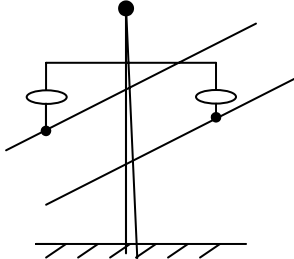
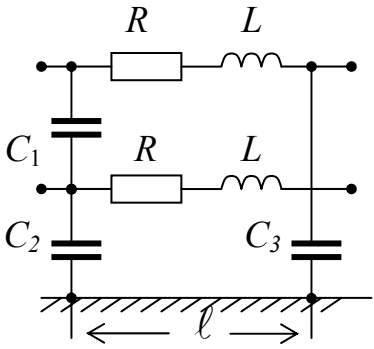
сердечнике с малыми тепловыми потерями в нем обладает на низких частотах практически только индуктивностью L , а сопротивлением R и емкостью C такой катушки можно пренебречь. Конденсатор с малыми внутренними тепловыми потерями обладает практически только емкостью C , а его активной проводимостью G и индуктивностью L можно пренебречь.

Заметим, что реостат, катушку индуктивности и конденсатор широко используют для имитации (моделирования) идеальных элементов при проведении лабораторного практикума по теории цепей.

Любое реальное электротехническое устройство можно изобразить в виде электрической схемы, состоящей из комбинации идеальных элементов и, следовательно, произвести его электрический расчет. В табл.1.3 приведено несколько примеров изображения реальных устройств в виде электрических схем.

Т а б л и ц а 1.3

Примеры изображения электротехнических устройств в виде схем

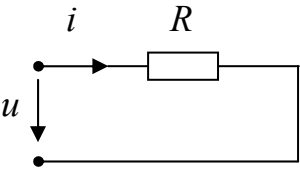
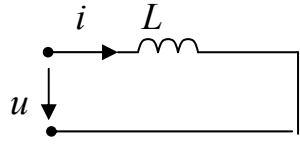
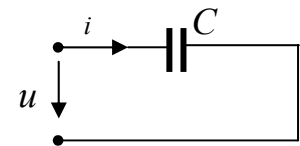
№ п/п	Наименование устройства	Внешний вид	Электрическая схема
1	Катушка индуктивности с конечным сопротивлением обмотки на стальном сердечнике		
2	Конденсатор с конечной внутренней проводимостью		
3	Участок двухпроводной линии электропередачи		

1.8. Соотношение между током и напряжением в идеальных элементах цепи

Прежде чем приступить к расчету сколько-нибудь сложных электрических цепей, следует выяснить, каким образом связаны между собой ток и напряжение в каждом из идеальных элементов цепи. Эти соотношения, известные из курса физики, приведены в табл.1.4. Они имеют всеобщий характер и справедливы для цепей, у которых ток и напряжение изменяются во времени по любому закону. Это важнейшие формулы теории цепей, которые встретятся нам много раз в этом учебном пособии *. Заметим здесь, что формулы позиции 1 соответствуют закону Ома, формулы позиции 2 вытекают из закона электромагнитной индукции, а формулы позиции 3 следуют из определения электрической емкости.

Т а б л и ц а 1.4

Формулы для определения тока и напряжения в идеальных элементах

№ п/п	Идеальный элемент	Ток	Напряжение
1		$i = \frac{u}{R}$	$u = iR$
2		$i = \frac{1}{L} \int u dt$	$u = L \frac{di}{dt}$
3		$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int i dt$

Из табл.1.4 видно, что только в сопротивлении R ток и напряжение связаны между собой алгебраическим соотношением. Между током и напряжением в индуктивности и емкости имеют место интегро-дифференциальные соотношения.

Пример 1.3. В цепи с идеальной индуктивностью (рис.1.7,а) действует пилообразный периодический ток (рис.1.7,б). Требуется определить форму приложенного напряжения.

* Теоретический вывод этих соотношений имеется в [1-4].

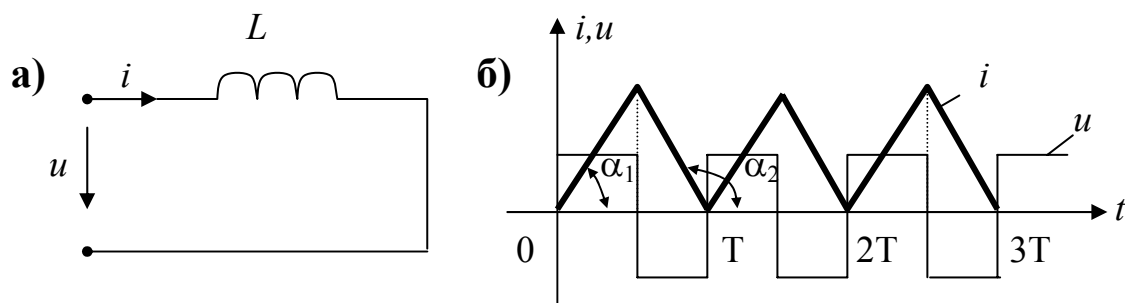


Рис.1.7

Решение. Для нахождения графика напряжения используем соотношение $u = L di/dt$ (поз.2 табл.1.4), из которого следует, что форма кривой напряжения соответствует производной от тока по времени. Из курса математики известно, что графически производная di/dt определяется в каждой точке кривой тока, как тангенс угла наклона касательной к этой кривой относительно оси t .

В нашем примере на участке от 0 до $T/2$ кривая тока представляет собой прямую, проходящую через начало координат под острым углом $\alpha_1 < 90^\circ$ к оси t , и поэтому производная di/dt на этом участке есть постоянная и положительная конечная величина.

На участке от $T/2$ до T ток представляет собой прямую, составляющую тупой угол с осью t $\alpha_2 > 90^\circ$, и поэтому производная di/dt на этом участке есть постоянная и отрицательная величина. При этом $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(180 - \alpha_1) = -\operatorname{tg} \alpha_1$.

Таким образом, график искомого напряжения представляет собой отрезки прямых, меняющих каждую половину периода свой знак, как это показано на рис.1.7,б.

1.9. Основная задача анализа электрической цепи

Анализ электрических цепей осуществляется с помощью законов Кирхгофа. При этом можно преследовать различные цели. Например, определять напряжения во всех ветвях цепи по их известным параметрам. Можно также определять необходимые ЭДС всех источников энергии по известным токам и параметрам приемников и источников. Для придания нашему курсу логической стройности основной задачей анализа (расчета) будем считать *определение токов во всех ветвях цепи* по известным параметрам всех источников и известным параметрам всех приемников. Научившись решать эту задачу, мы сможем решать и другие задачи, связанные с анализом и расчетом электрических цепей.

1.10. Дополнительные задания к главе 1. Вопросы и примеры для самотестирования

1. К цепи с идеальной емкостью C приложено синусоидальное напряжение: $u = 20 \sin \omega t$, где $\omega = \text{const}$. Определить закон изменения тока i во времени в этой цепи.

Ответ: $i = 20\omega C \sin(\omega t + 90^\circ)$.

2. К цепи с идеальной индуктивностью L приложено синусоидальное напряжение $u = 20\sin \omega t$, где $\omega = \text{const}$. Определить закон изменения тока во времени в данной цепи.

Ответ: $i = \frac{20}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ)$.

3. К цепи с идеальным сопротивлением R приложено синусоидальное напряжение $u = 20\sin \omega t$, $\omega = \text{const}$. Определить закон изменения тока в этой цепи.

Ответ: $i = \frac{20}{R} \sin \omega t$.

4. Катушка индуктивности на замкнутом сердечнике имеет следующие параметры: число витков $w = 100$; средняя длина сердечника $\ell = 10$ см; поперечное сечение сердечника $S = 1$ см², абсолютная магнитная проницаемость стали сердечника $\mu_a = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн/м. Определить индуктивность этой катушки.

Ответ: $L = 20$ мГн.

5. Плоский конденсатор имеет следующие параметры: площадь одной из его пластин $S = 1$ м²; расстояние между пластинами 0,25 мм, абсолютная диэлектрическая проницаемость изолятора $\epsilon_a = 25 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Определить емкость этого конденсатора.

Ответ: 100 мкФ.

6. Прямолинейный провод длиной 1000 м и поперечным сечением 2,5 мм² выполнен из меди с удельной проводимостью $\gamma = 57 \cdot 10^6$ 1/Ом·м. Определить сопротивление R такого провода.

Ответ: $R = 7$ Ом.

7. Магнитный поток катушки на замкнутом стальном сердечнике $\Phi = 20 \cdot 10^{-6}$ Вб при токе в катушке $I = 0,5$ А. Определить индуктивность этой катушки, если число витков $w = 1000$.

Ответ: $L = 40$ мГн.

8. Одна из пластин плоского конденсатора имеет положительный заряд $q = 5 \cdot 10^{-3}$ К. Напряжение между обкладками конденсатора $U = 500$ В. Определить емкость этого конденсатора.

Ответ: $C = 10$ мкФ.

9. В цепи с катушкой индуктивности протекает постоянный ток $I = 1$ А. Определить величину энергии магнитного поля этой катушки, если ее индуктивность $L = 1$ мГн.

Ответ: $W_M = 0,5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

10. Энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе, $W_E = 0,05$ Дж. Определить емкость этого конденсатора, если он включен в цепь с постоянным напряжением $U = 100$ В.

Ответ: $C = 10$ мкФ.

11. Ответить на вопросы 1, 2, 3, 4, 5, 6 любого из шести вариантов раздела 1 сборника тестовых карт [6].

Глава 2

Цепи постоянного тока

2.1. Некоторые особенности цепей постоянного тока

Цепи, у которых ЭДС источников, а также токи и напряжения на всех ее элементах остаются неизменными во времени, называются *цепями постоянного тока*. Цепи постоянного тока содержат все три параметра: сопротивление, индуктивность и емкость. Однако, при неизменных ЭДС, напряжения на индуктивностях и токи в емкостях равны нулю. В самом деле, при $I_L = \text{const}$ и $U_C = \text{const}$ напряжение $U_L = dI_L/dt = 0$ и ток $I_C = dU_C/dt = 0$.

Получается так (рис.2.1), что в цепи постоянного тока все индуктивности закорочены ($U_L = 0$), а ветви с емкостями разомкнуты ($I_C = 0$) и в работе цепи участия не принимают. Поэтому расчетным параметром цепи постоянного тока является только сопротивление R её элементов.

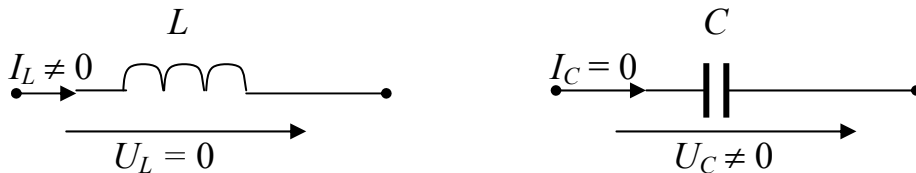


Рис.2.1

2.2. Закон Ома и законы Кирхгофа для цепей постоянного тока

Закон Ома для любой ветви цепи постоянного тока определяется соотношением, показанным в табл.1.4, поз.1, в котором вместо мгновенных значений u и i используются значения постоянного напряжения U и тока I

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad U = IR. \quad (2.1)$$

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью. Она обозначается как G и измеряется в сименсах (См)

$$G = \frac{1}{R}. \quad (2.2)$$

Поэтому закон Ома может быть записан и в другой форме

$$I = UG \quad \text{или} \quad U = \frac{I}{G}. \quad (2.1 \text{ а})$$

Первый закон Кирхгофа для любого узла цепи постоянного тока записывается аналогично общей формуле (1.1), у которой переменные во времени токи i_k заменены на постоянные токи I_k

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0. \quad (2.3)$$

Здесь K – число ветвей, подходящих к данному узлу цепи (не менее трех).

Токи, направленные к узлу, будем считать положительными и вводить в уравнение (2.3) со знаком (+), а токи, направленные от узла, – отрицательными и вводить в уравнение со знаком (–).

Второй закон Кирхгофа для любого контура цепи постоянного тока записывается аналогично формуле (1.2), у которой переменные во времени величины e_q и u_n заменены постоянными величинами E_q и U_n . При этом в соответствии с формулой (2.1)

$$\sum_{q=1}^Q E_q = \sum_{n=1}^N U_n = \sum_{n=1}^N I_n R_n . \quad (2.4)$$

Как и прежде (глава 1), ЭДС и токи, совпадающие с принятым направлением обхода контура, будем считать положительными и вводить их в уравнение (2.4) со знаком (+), а несовпадающие с обходом контура, – отрицательными и вводить в уравнение со знаком (–).

2.3. Мощность цепи постоянного тока

Энергия электромагнитного поля, вырабатываемая в источниках постоянного тока, преобразуется в приемниках в тепло и другие виды энергии, в том числе и в механическую работу.

Количество энергии, выделяемой в приемнике с сопротивлением R за время t при протекании тока I , определяется формулой (1.3) и измеряется в джоулях (Дж) $W_T = I^2 R t$. Энергия, отнесенная к единице времени, представляет собой мощность приемника и измеряется в ваттах (Вт)

$$P = \frac{W_T}{t} = I^2 R = UI = U^2 G . \quad (2.5)$$

Мощность приемников измеряется электродинамическими ваттметрами *.

2.4. Расчет цепей постоянного тока с одним источником энергии

К ним относятся цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединением сопротивлений. Их расчет осуществляется с помощью закона Ома и законов Кирхгофа.

а) Цепь с последовательным соединением сопротивлений (рис.2.2,а).

Эта неразветвленная одноконтурная цепь, по которой протекает один и тот же ток I во всех ее сопротивлениях. При этом на каждом из них возникает напряжение, определяемое законом Ома в соответствии с формулой (2.1). К такой цепи применяем 2-й закон Кирхгофа. Выбрав (произвольно) направление обхода контура по часовой стрелке, получаем

$$U_1 + U_2 - U = 0 \quad \text{или} \quad U_1 + U_2 = U , \quad (2.6)$$

где $U_1 = IR_1$; $U_2 = IR_2$. Тогда $U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = IR_{\Sigma}$, где

$$R_{\Sigma} = R_1 + R_2 . \quad (2.7)$$

Таким образом, в последовательной цепи постоянного тока общее напряжение цепи U складывается из суммы напряжений всех ее элементов, а общее сопротивление цепи R_{Σ} складывается из суммы всех ее сопротивлений.

* Электродинамический ваттметр имеет две обмотки: обмотку тока, которая включается в цепь последовательно с R , и обмотку напряжения, которая включается параллельно R .

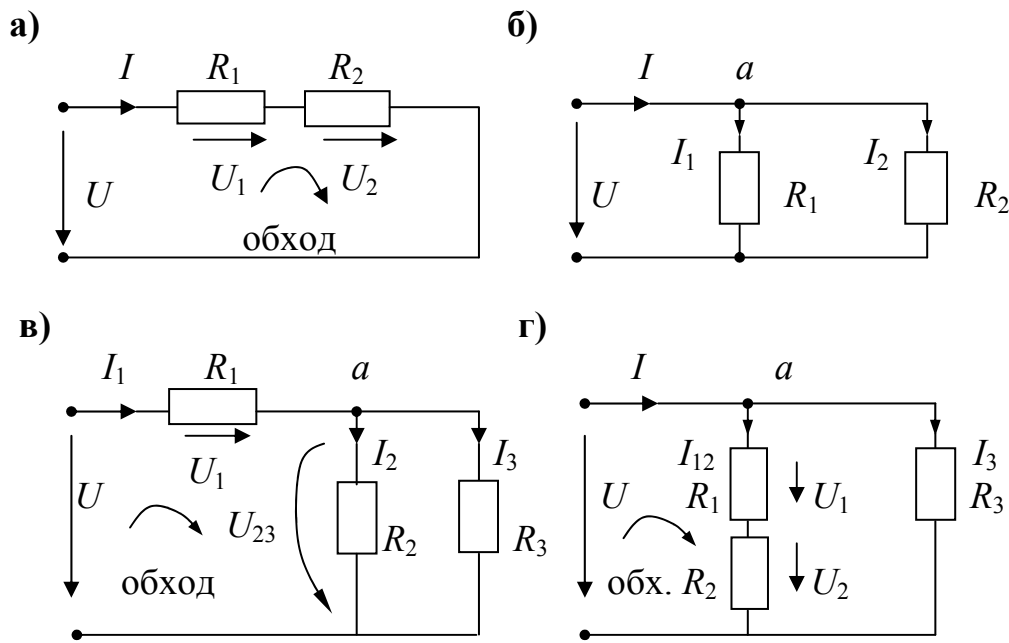


Рис.2.2

б) Цепь с параллельным соединением сопротивлений (рис.2.2,б). В такой цепи напряжение одинаково на всех её сопротивлениях, но токи в них в общем случае различны. Применяем к такой цепи первый закон Кирхгофа для узла «а», получаем: $I - I_1 - I_2 = 0$ или

$$I = I_1 + I_2, \quad (2.8)$$

где в соответствии с формулой (2.1) $I_1 = U / R_1$; $I_2 = U / R_2$.

Токи I_1 и I_2 можно выразить и через проводимость G в соответствии с формулами (2.2) и (2.1 а)

$$I_1 = UG_1, \text{ где } G_1 = 1 / R_1; \quad I_2 = UG_2, \text{ где } G_2 = 1 / R_2.$$

Тогда $I = UG_1 + UG_2 = U(G_1 + G_2) = UG_{\Sigma}$, где

$$G_{\Sigma} = G_1 + G_2 = 1 / R_{\Sigma}. \quad (2.9)$$

Таким образом, в параллельной цепи постоянного тока общий ток I есть сумма токов, а общая проводимость G_{Σ} цепи есть сумма проводимостей всех ее ветвей. Общее сопротивление цепи из двух параллельных ветвей определяется формулой (2.9) $1 / R_{\Sigma} = 1 / R_1 + 1 / R_2$, откуда получаем

$$R_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.10)$$

в) Цепь с последовательно-параллельным соединением сопротивлений (рис.2.2,в). При расчете такой цепи применимы как первый, так и второй законы Кирхгофа. Для узла «а», например, в соответствии с формулой (2.8) имеем $I_1 = I_2 + I_3$, а для левого контура, используя формулу (2.6) при указанном направлении обхода, получаем $U = U_1 + U_{23}$, где U_{23} – напряжение на двух параллельно соединенных сопротивлениях R_2 и R_3 . Таким образом, исследуемая цепь путем упрощений может быть сведена к последовательной цепи (рис.2.3,а).

а) **б)**

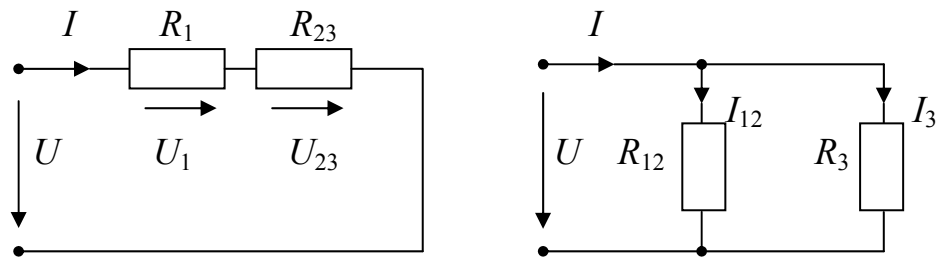


Рис.2.3

$$\text{Общее сопротивление этой цепи } R_{\Sigma} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (2.11)$$

г) *Цепь с параллельно-последовательным соединением сопротивлений* (рис.2.2,г). Для расчета такой цепи следует использовать как первый, так и второй законы Кирхгофа. Например, для узла «а» в соответствии с формулой (2.8) имеем $I = I_{12} + I_3$, а для левого контура цепи (указано принятое направление его обхода) в соответствии с формулой (2.6) получаем $U = U_1 + U_2 = I_{12}(R_1 + R_2) = I_{12}R_{12}$, где $R_{12} = R_1 + R_2$. Следовательно, эта цепь путем упрощений может быть сведена к параллельной цепи (рис.2.3,б). Ее проводимость определяется в соответствии с формулой (2.9) $G_{\Sigma} = G_{12} + G_3$, где $G_{12} = 1/R_{12}$ и $G_3 = 1/R_3$, а общее сопротивление – в соответствии с формулой (2.10).

Основные результаты, полученные при исследовании вышеозначенных цепей постоянного тока, суммированы в табл. 2.1.

2.5. Примеры расчета цепей постоянного тока с одним источником энергии

Пример 2.1. Для цепи, изображенной на рис.2.4, известны величины приложенного постоянного напряжения $U = 22$ В и сопротивлений всех ее ветвей: $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом. Определить показания магнитоэлектрических амперметров и вольтметра, включенных в цепь *.

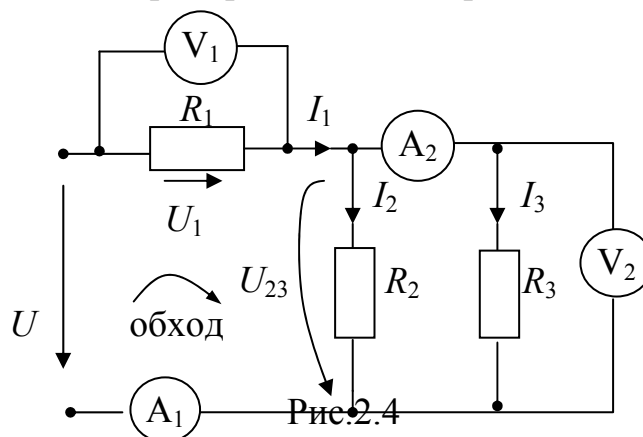
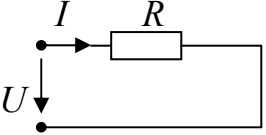
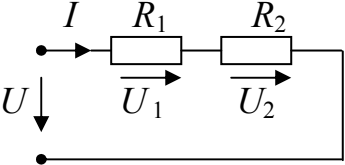
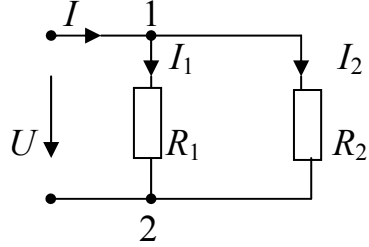
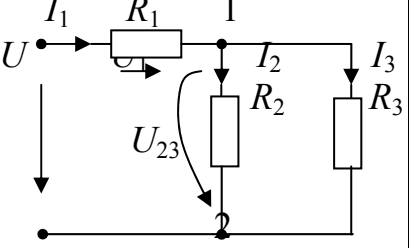
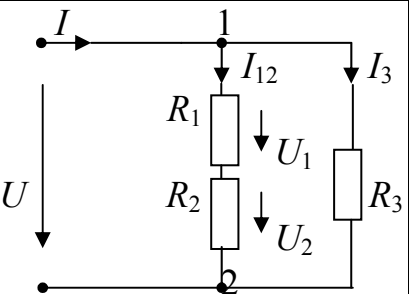


Рис.2.4

* Магнитоэлектрические амперметры и вольтметры измеряют постоянные токи и напряжения. Амперметр включается последовательно с сопротивлением, а вольтметр - параллельно сопротивлению.

Т а б л и ц а 2.1

**Цепи постоянного тока с одним источником энергии
и формулы для их расчета**

№ п/п	Схемы цепей	Закон Ома и законы Кирхгофа	Сопротивления и проводимости
1		$U = IR;$ $I = UG$	$R = U / I;$ $G = 1 / R = I / U$
2		$U = U_1 + U_2;$ $U_1 = IR_1; U_2 = IR_2;$ $U = IR_{\Sigma} = I / G_{\Sigma}$	$R_{\Sigma} = R_1 + R_2;$ $G_{\Sigma} = \frac{1}{R_{\Sigma}} = \frac{1}{R_1 + R_2};$
3		$I = I_1 + I_2;$ $I_1 = U / R_1 = UG_1;$ $I_2 = U / R_2 = UG_2;$ $I = U / R_{\Sigma} = UG_{\Sigma}$	$G_1 = \frac{1}{R_1}; G_2 = \frac{1}{R_2};$ $G_{\Sigma} = G_1 + G_2$ $R_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
4		$I_1 = I_2 + I_3;$ $I_1 = U / R_{\Sigma} = UG_{\Sigma};$ $I_2 = U_{23} / R_2 = U_{23}G_2;$ $I_3 = U_{23} / R_3 = U_{23}G_3;$ $U = U_1 + U_{23};$ $U_1 = IR_1 \cdot U_{23} = IR_{23}$	$R_{\Sigma} = R_1 + R_{23};$ $R_{23} = 1 / G_{23} =$ $= \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3};$ $G_1 = 1 / R_1; G_2 = 1 / R_2;$ $G_3 = 1 / R_3$
5		$I = I_{12} + I_3;$ $I_{12} = U / R_{12} = UG_{12};$ $I_3 = U / R_3 = U G_3;$ $I = U / R_{\Sigma} = UG_{\Sigma};$ $U = U_1 + U_2;$ $U_1 = I_{12}R_1; U_2 = I_{12}R_2$	$G_{12} = 1 / R_{12} =$ $= 1 / (R_1 + R_2);$ $G_3 = 1 / R_3;$ $G_{\Sigma} = G_{12} + G_3;$ $R_{\Sigma} = 1 / G_{\Sigma} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3}$

Решение. а) Для определения показания амперметра A_1 предварительно находим общее сопротивление цепи. В соответствии с формулой (2.11) имеем

$$R_{\Sigma} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1 + \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1 + \frac{6}{5} = 2,2 \text{ Ом.}$$

Тогда по закону Ома (2.1) $I_1 = U / R_{\Sigma} = 22 / 2,2 = 10 \text{ А}$. Эта величина соответствует показанию амперметра A_1 .

б) Для определения показаний амперметра A_2 надо рассчитать ток в сопротивлении R_3 : $I_3 = U_{23} / R_3$. Для этого предварительно определяем напряжение U_{23} , приложенное к этому сопротивлению. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для левого контура цепи, приняв направление его обхода по часовой стрелке, получаем $U_{23} = U - U_1$, где $U_1 = I_1 R_1 = 10$ В. Тогда $U_{23} = 22 - 10 = 12$ В и искомый ток $I_3 = U_{23} / R_3 = 12 / 3 = 4$ А. Его величина и соответствует показанию амперметра A_2 .

в) Вольтметр V_1 измеряет напряжение U_1 и его показание составляет 10 В; вольтметр V_2 измеряет напряжение U_{23} и его показание составляет 12 В.

г) Проверку решения производим, используя первый закон Кирхгофа для узла «а» цепи. В соответствии с формулой (2.3) имеем $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ или $I_1 = I_2 + I_3 = 6 + 4 = 10$ А, что совпадает со значением тока $I_1 = 10$ А, полученным ранее иным путем. Таким образом, проверка показала, что задача решена верно.

Пример 2.2. Для цепи, показанной на рис.2.5, известны величины приложенного напряжения и сопротивлений всех ветвей: $U = 24$ В; $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $R_3 = 3$ Ом. Требуется определить показания всех амперметров и вольтметров магнитоэлектрической системы, включенных в эту цепь.

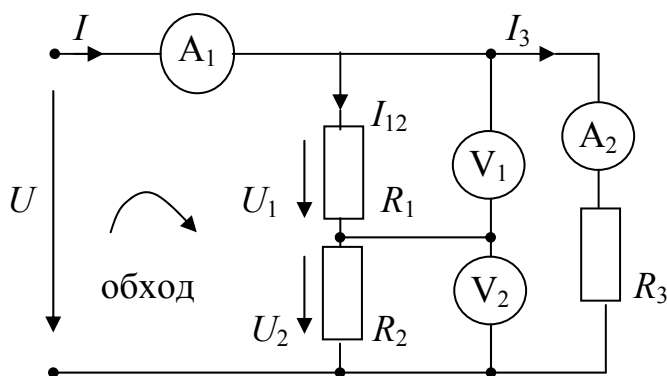


Рис.2.5

Решение. а) Находим общее сопротивление R_{Σ} (или общую проводимость G_{Σ}) всей цепи. Общее сопротивление в соответствии с формулой (2.10)

$$R_{\Sigma} = \frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(1 + 1) \cdot 3}{1 + 1 + 3} = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ Ом.}$$

Общая проводимость определяется в соответствии с формулой (2.9)

$$G_{\Sigma} = \frac{1}{R_{\Sigma}} = G_{12} + G_3 = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1 + 1} + \frac{1}{3} = 0,5 + 0,33 = 0,833 \text{ См.}$$

б) Общий ток цепи $I = U / R_{\Sigma} = U G_{\Sigma} = 24 / 1,2 = 24 \cdot 0,83 = 20$ А. Эта величина соответствует показанию амперметра A_1 .

в) Ток в сопротивлении R_3 определяем в соответствии с формулой (2.1):

$$I_3 = U / R_3 = 24 / 3 = 8 \text{ А.}$$

Эта величина соответствует показанию амперметра A_2 .

г) Рассчитываем напряжения, приходящиеся на каждое из последовательно соединенных сопротивлений R_1 и R_2 . Для этого предварительно находим ток I_{12} , протекающий по этим сопротивлениям,

$$I_{12} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ А.}$$

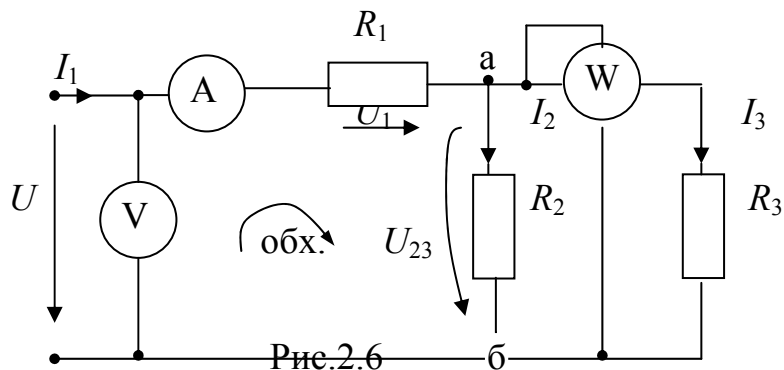
Тогда в соответствии с законом Ома находим, что $U_1 = I_{12} R_1 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ В}$ и $U_2 = I_{12} R_2 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ В}$. Эти величины соответствуют показаниям вольтметров V_1 и V_2 .

д) Проверку решения осуществляем, используя 1-й и 2-й законы Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа для узла «а» цепи имеем $I = I_{12} + I_3 = 12 + 8 = 20 \text{ А}$. Это значение совпадает с величиной тока I , полученного в пункте б) данной задачи иным способом. По второму закону Кирхгофа для левого контура цепи (указано принятое направление его обхода) имеем $U_1 + U_2 - U = 0$ или $U = U_1 + U_2 = 12 + 12 = 24 \text{ В}$. Это значение совпадает с величиной заданного напряжения цепи. Таким образом, проверка показала, что задача решена верно.

Пример 2.3. Для цепи, изображенной на рис.2.6, известны сопротивления всех ее ветвей, а также показания электродинамического ваттметра * : $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $P = 32 \text{ Вт}$. Требуется определить показания магнитоэлектрических амперметра A и вольтметра V , включенных на входе цепи.

Решение. Принятое направление токов и напряжений во всех ветвях цепи показано на рис.2.6.

а) Для определения показаний амперметра и вольтметра необходимо рассчитать общий ток I и общее напряжение цепи U . Для этого сначала определяем ток I_3 и напряжение на сопротивлении R_3 . В соответствии с формулой (2.5) имеем $P = I_3^2 R_3 = U_{23} I_3$, откуда $I_3 = \sqrt{P/R_3} = \sqrt{32/2} = 4 \text{ А}$. Тогда $U_{23} = P/I_3 = 32/4 = 8 \text{ В}$.



* Мощность P измеряется ваттметром, включенным в цепь, как показано на рис.2.6. Прибор имеет обмотку тока и обмотку напряжения. Первая включается в цепь последовательно с сопротивлением R_3 , а вторая – параллельно сопротивлению R_3 .

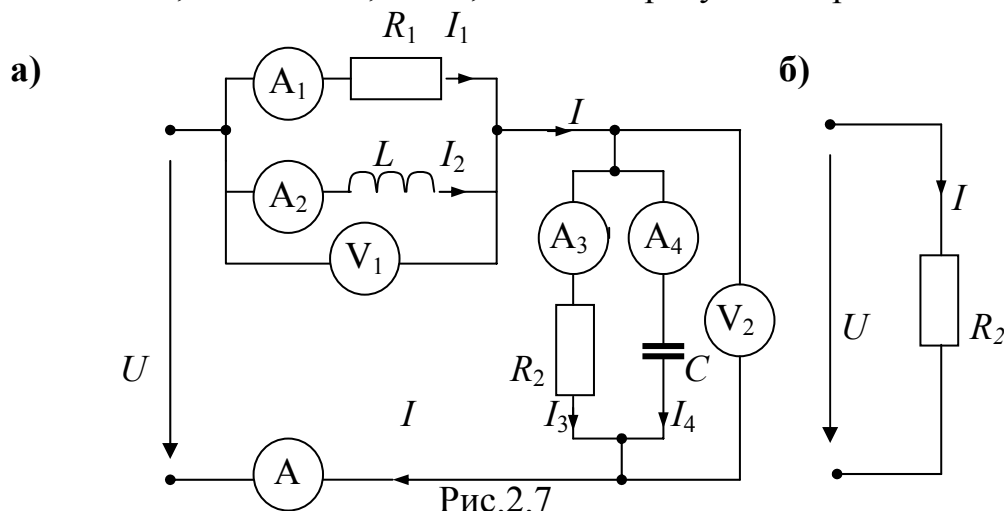
б) Определяем ток I_2 , зная напряжение U_{23} между точками «а» и «б» схемы: $I_2 = U_{23} / R_2 = 8 / 4 = 2 \text{ А}$.

в) Общий ток цепи определяем в соответствии с первым законом Кирхгофа для узла «а»: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ или $I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 4 = 6 \text{ А}$. Эта величина соответствует показанию амперметра А.

г) Находим напряжение U_1 на сопротивлении R_1 : $U_1 = I_1 R_1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ В}$.

д) Общее напряжение цепи U находим, воспользовавшись 2-м законом Кирхгофа, составленным для ее левого контура (на рис.2.6 указано принятое направление обхода), $U_1 + U_{23} - U = 0$ или $U = U_1 + U_{23} = 18 + 8 = 26 \text{ В}$. Эта величина соответствует показанию вольтметра V.

Пример 2.4. К схеме, изображенной на рис.2.7,а, приложено постоянное напряжение $U=100 \text{ В}$. Параметры всех ее ветвей известны: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $L = 25 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $C = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. Требуется определить ток I этой цепи.



Решение. В цепи постоянного тока индуктивности закорочены, а ветви с емкостями разорваны (2.1). Поэтому расчетная схема цепи приобретает вид, показанный на рис.2.7,б. При этих условиях общий ток цепи $I = U / R_2 = 100 / 20 = 5 \text{ А}$.

Пример 2.5. К цепи, изображенной на рис.2.8,а, приложено постоянное напряжение $U=75 \text{ В}$. Параметры всех трех ее ветвей известны: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $L_1 = 15 \text{ мГн}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $L_2=25 \text{ мГн}$; $C = 75 \text{ мкФ}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$. Требуется определить токи во всех ветвях цепи.

Решение. В цепи постоянного тока в соответствии с 2.1 индуктивности не имеют сопротивления и как бы закорочены (ток в них есть, а напряжения на них нет), ветви с емкостями как бы разорваны (напряжение на них есть, а тока нет). Поэтому в схеме на рис.2.8,а все индуктивности закорачиваем, а ветви с емкостями разрываем. Тогда исследуемая цепь приобретает вид, показанный на рис.2.8,б. При этих условиях общий ток цепи $I_1 = I_2 = U / (R_1 + R_2) = 75 / 15 = 5 \text{ А}$.

а)

б)

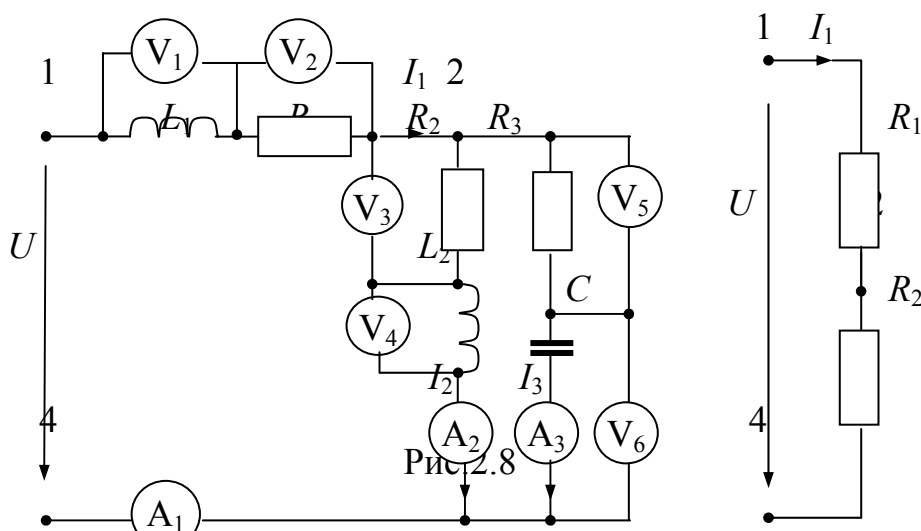


Рис. 2.8

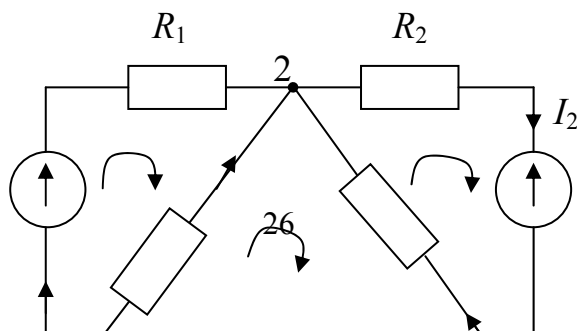
2.6. Понятие об установившихся и переходных режимах работы электрических цепей

Из рассмотрения примеров 2.1-2.5 следует, что если к цепи приложено постоянное напряжение, то во всех элементах этой цепи токи и напряжения также являются постоянными величинами. Такой режим работы цепи называется *установившимся*. Он возникает только спустя некоторое время после включения цепи под постоянное напряжение. Сразу же после включения в индуктивностях и емкостях цепи начинает изменяться запас энергии магнитного и электрического полей. Этот процесс в силу инерционности электромагнитного поля требует некоторого конечного времени для своего завершения. В течение этого времени токи и напряжения на всех элементах цепи изменяются во времени, несмотря на то, что к цепи приложено неизменное во времени напряжение. Режим работы электрической цепи от момента ее включения под напряжение и до окончания процесса изменения запаса энергии в индуктивностях и емкостях называется *переходным процессом*. В данном учебном пособии рассматривается расчет линейных электрических цепей только при установившихся режимах их работы. Исследование цепей при переходных процессах осуществляется позже во второй части курса теории электрических цепей.

2.7. Расчет сложных цепей постоянного тока непосредственно по 1-му и 2-му законам Кирхгофа

Сложными называются разветвленные электрические цепи со многими источниками энергии. Пример такой цепи показан на рис.2.9.

Для ее расчета, т.е. для определения токов во всех ее ветвях, необходимо составить систему уравнений по законам Кирхгофа. Общее число уравнений в системе должно соответствовать числу неизвестных токов, т.е. числу ветвей. Для нашей цепи это пять неизвестных токов. При этом:



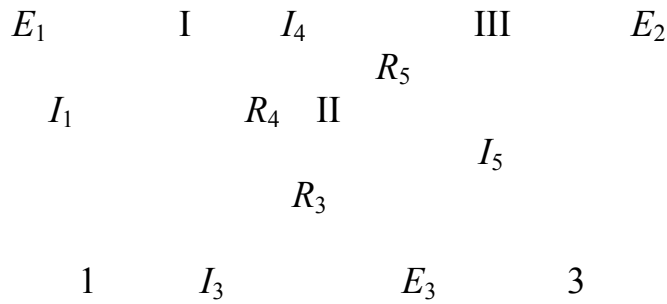


Рис.2.9

а) *по первому закону Кирхгофа* составляется число уравнений, на единицу меньшее числа узлов цепи, поскольку уравнение для последнего узла есть следствие всех предыдущих уравнений и не дает ничего нового для расчета. В нашем примере по 1-му закону Кирхгофа надо составить 2 уравнения, так как в цепи три узла;

б) *по второму закону Кирхгофа* составляются все недостающие уравнения для любых произвольно выбранных контуров цепи. В нашем примере по 2-му закону Кирхгофа надо составить три уравнения ($5 - 2 = 3$).

Предварительно следует задаться (произвольно) направлением токов во всех ветвях цепи и направлением обхода выбранных контуров. При составлении уравнений по 1-му закону Кирхгофа в соответствии с формулой (2.3) токи, подходящие к узлу, будем считать положительными и брать со знаком (+), а токи, отходящие от узла – отрицательными и брать со знаком (–). При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа в соответствии с формулой (2.4) ЭДС и токи, совпадающие с выбранным направлением обхода контура будем брать со знаком (+), а несовпадающие – со знаком (–).

Заметим, что произвольность выбора направлений токов в ветвях цепи и направлений обхода контуров не влияет на конечный результат расчета. Если в результате расчетов некоторые из найденных токов будут иметь знак (–), то это будет означать, что их истинное направление противоположно предварительно принятому.

Приняв для нашей цепи направление токов в ветвях и направление обхода трех выбранных контуров, как показано на рис.2.9, составляем следующую систему уравнений

$$\begin{array}{lcl} \text{узел 1} & \left\{ \right. & -I_1 - I_4 - I_3 = 0, \\ \text{узел 2} & \left\{ \right. & I_1 + I_4 + I_5 - I_2 = 0, \\ \text{контур I} & \left\{ \right. & I_1 R_1 - I_4 R_4 = E_1, \\ \text{контур II} & \left\{ \right. & I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = E_3, \\ \text{контур III} & \left\{ \right. & I_2 R_2 + I_5 R_5 = -E_2. \end{array}$$

Решив полученную систему уравнений, определим токи во всех пяти ветвях этой цепи.

Пример 2.6. Для схемы, изображенной на рис.2.10, известны величины и направления действия ЭДС всех источников и сопротивления всех ее ветвей:

$E_1 = 20 \text{ В}; E_2 = 16 \text{ В}; E_3 = 10 \text{ В}; R_1 = 2 \text{ Ом}; R_2 = 4 \text{ Ом}; R_3 = 5 \text{ Ом}$. Требуется определить все токи.

Решение. Для решения задачи надо составить систему из трех уравнений относительно трех неизвестных токов (в данной цепи три ветви). При этом по первому закону Кирхгофа следует составить одно (в схеме только два узла), а по второму закону Кирхгофа два уравнения ($3 - 1 = 2$). Предварительно выбираем направления токов во всех трех ветвях цепи и направления обхода двух выбранных контуров так, как это показано на рис.2.10.

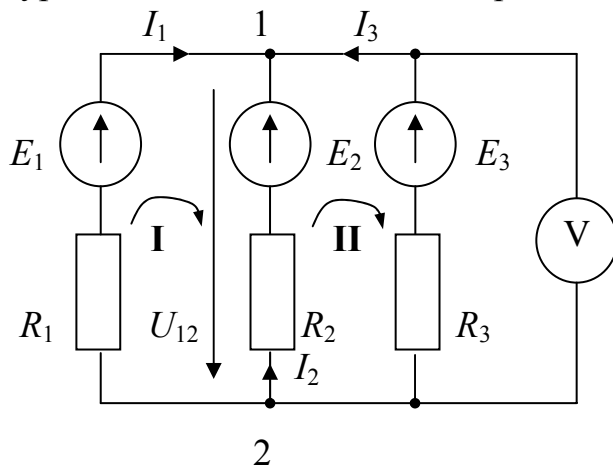


Рис.2.10

При этих условиях система уравнений относительно неизвестных токов I_1 , I_2 и I_3 выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{для узла 1} \\ \text{для контура I} \\ \text{для контура II} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2, \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 = E_2 - E_3. \end{array} \right.$$

Поставив в эту систему уравнений численные значения ЭДС источников и численные значения сопротивлений приемников, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ 2I_1 - 4I_2 + 0 = 4, \\ 0 + 4I_2 - 5I_3 = 6. \end{array} \right.$$

Для решения этой системы уравнений сведем три уравнения к одному. Для этого: а) выразим I_1 из второго уравнения через I_2 , а I_3 выразим из третьего уравнения через I_2 и получим

$$I_1 = \frac{4 + 4I_2}{2} = 2 + 2I_2; (*) \quad I_3 = -\left(\frac{6 - 4I_2}{5}\right) = (-1,2 + 0,8I_2); (*)$$

б) подставим полученные значения I_1 и I_3 в первое уравнение системы и получим $(2 + 2I_2) + I_2 + (-1,2 + 0,8I_2) = 0$ или $3,8I_2 + 0,8 = 0$. Тогда $I_2 = -0,8/3,8 = -0,21 \text{ А}$. После этого, используя соотношения $(*)$, находим токи I_1 и I_3 : $I_1 = 2 - 0,42 = +1,58 \text{ А}$; $I_3 = -1,2 - 0,17 = -1,37 \text{ А}$. Заметим, что знак $(-)$ у токов I_2 и I_3 означает, что реальное направление этих токов противоположно

предварительно выбранному. Проверку решения осуществляем с помощью первого закона Кирхгофа для узла 1 цепи: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Подставив сюда все значения токов, получаем $+1,58 - 0,21 - 1,37 = 0$. Таким образом, задача решена верно.

2.8. О других методах расчета сложных цепей постоянного тока

Кроме рассмотренного в 2.7 метода расчета, основанного на непосредственном применении законов Кирхгофа, в теории цепей широко применяются и другие методы, основанные на законах Кирхгофа. Прежде всего, это метод контурных токов и метод узловых напряжений. Их применение позволяет понизить порядок системы уравнений по сравнению со случаем непосредственного применения законов Кирхгофа. Следует упомянуть также метод эквивалентного источника, метод взаимности и метод наложения (суперпозиции).

В этой главе эти методы рассматриваться не будут. Дело в том, что они формально тождественны методам расчета сложных цепей синусоидального тока в так называемой символической форме записи. Поэтому, с целью сокращения объема учебного пособия, они будут рассмотрены в главе пятой.

2.9. Баланс мощностей цепи постоянного тока

Для любой, сколько угодно сложной цепи постоянного тока, можно составить энергетический баланс, вытекающий непосредственно из закона сохранения энергии: *алгебраическая сумма всех мощностей источников энергии равна сумме всех мощностей приемников энергии*:

$$\sum_k^K E_k I_k = \sum_{n=1}^N I_n^2 R_n. \quad (2.12)$$

В этой формуле K – число источников энергии цепи; N – число приемников энергии цепи.

Во всех приемниках энергии токи и напряжения имеют одно и то же направление (1.3 главы 1). Поэтому правая часть уравнения (2.12) является арифметической суммой мощностей всех приемников цепи. Что касается левой части этого уравнения, то в некоторых ветвях сложной цепи ток ветви может оказаться направленным противоположно действию ЭДС источника энергии. Тогда произведение EI получается отрицательным. Физически это означает, что при таком режиме работы рассматриваемый источник не генерирует энергию, а потребляет ее (например, аккумулятор при его зарядке).

Пример 2.7. Составим баланс мощностей для электрической цепи, рассмотренной в примере 2.6. В соответствии с формулой (2.12), получаем $E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$. Подставляем значения токов и ЭДС из примера 2.6 в уравнение баланса мощностей рассматриваемой цепи и получаем:

а) левая часть уравнения:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = 20 \cdot 1,58 + 16(-0,21) + 10(-1,37) = 31,6 - 3,36 - 13,7 = 14,54 \text{ Вт};$$

б) правая часть уравнения:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = (1,58)^2 \cdot 2 + (-0,21)^2 \cdot 4 + (-1,37)^2 \cdot 5 = 2,5 \cdot 2 + 0,044 \cdot 4 + 1,88 \cdot 5 = 5 + 0,18 + 9,4 = 14,58 \text{ Вт.}$$

Как видим, баланс мощностей сошелся, что подтверждает правильность решения задачи.

2.10. Дополнительные задания к главе 2. Вопросы и примеры для самоконтроля

1. В условиях примера 2.4 (рис.2.7,а) определить показания амперметров A_1 , A_2 и вольтметра V_1 магнитоэлектрической системы.

Ответ: $A_1 - 0 \text{ А}$; $A_2 - 5 \text{ А}$; $V_1 - 0 \text{ В}$.

2. В условиях примера 2.4 (рис.2.7,а) определить показания амперметров A_3 , A_4 и вольтметра V_2 магнитоэлектрической системы.

Ответ: $A_3 - 5 \text{ А}$; $A_4 - 0 \text{ А}$; $V_2 - 100 \text{ В}$.

3. В условиях примера 2.5 (рис.2.8,а) определить показания вольтметров V_1 и V_2 магнитоэлектрической системы.

Ответ: $V_1 - 0 \text{ В}$; $V_2 - 50 \text{ В}$.

4. В условиях примера 2.5 (рис.2.8,а) определить показания вольтметров V_3 , V_4 и амперметра A_2 магнитоэлектрической системы.

Ответ: $V_3 - 25 \text{ В}$; $V_4 - 0 \text{ В}$; $A_2 - 5 \text{ А}$.

5. В условиях примера 2.5 (рис.2.8,а) определить показания вольтметров V_5 , V_6 и амперметра A_3 магнитоэлектрической системы.

Ответ: $V_5 - 0 \text{ В}$; $V_6 - 75 \text{ В}$; $A_3 - 0 \text{ А}$.

6. В условиях примера 2.6 определить показание вольтметра V магнитоэлектрической системы, включенного между узлами 1 и 2 цепи, показанной на рис.2.10.

Ответ: показание вольтметра – 16,84 В.

7. Сколько всего уравнений должна содержать система, составленная по первому и второму законам Кирхгофа, для определения токов всех ее ветвей?

Ответ: число уравнений равно числу ветвей цепи.

8. В условиях примера 2.1 определить мощность, развиваемую цепью.

Ответ: $P = 220 \text{ Вт}$.

9. Какие источники энергии в цепи примера 2.6 работают в режиме потребителей?

Ответ: источники E_2 и E_3 .

10. Ответить на вопросы 7, 8, 9 и 10 любого из шести вариантов раздела 1 сборника тестовых карт [6].

Глава 3

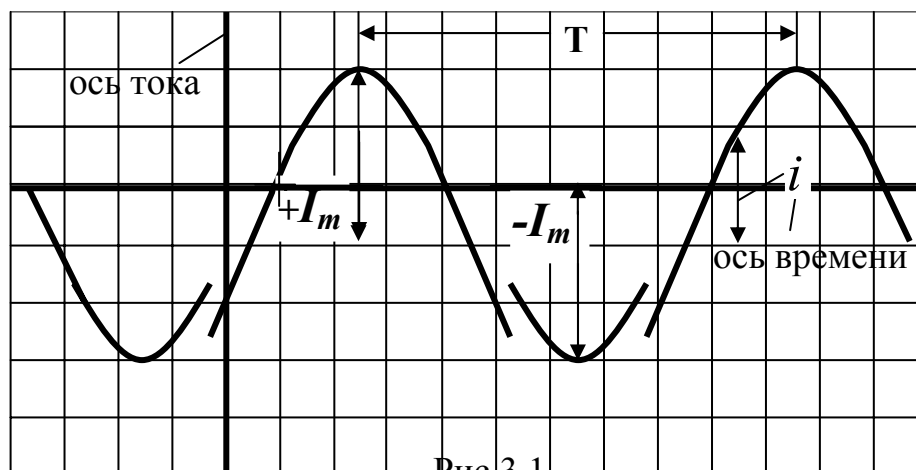
Цепи синусоидального тока и их расчет с помощью векторных диаграмм

3.1. Осциллограмма синусоидального тока. Основные определения

Цепи синусоидального тока получили широчайшее распространение в электроэнергетике (при трансформации синусоидальный ток не меняет своей формы).

Синусоидальный ток – это периодический ток, изменяющийся во времени по закону синуса. График этого тока представлен на рис.3.1 в виде кривой, полученной на экране осциллографа (осциллоскопа) *.

экран осциллографа



На этом рисунке ось времени t (ось абсцисс) проведена между наибольшим и наименьшим значением тока. Ось тока (ось ординат) проведена перпендикулярно оси времени. Пересечение ее с осью времени t можно выбирать произвольно.

Значение тока i в любой момент времени t называется *мгновенным значением*. Все значения i выше оси t считаются положительными, а ниже оси – отрицательными. Максимальное значение тока (относительно оси t) называется *амплитудой* и обозначается I_m . Синусоидальный ток изменяется во времени от $+I_m$ до $-I_m$.

Наименьшее время T , по истечении которого значения тока повторяются, называется *периодом тока*. На осциллограмме период наиболее удобно измерять между двумя максимумами (амплитудами). Число периодов, совершаемых током за одну секунду, называется *частотой тока* f . Частота тока и период тока – величины взаимнообратные. Частота f имеет физическую размерность 1/с и названа "герц" (Гц) в честь физика Герца:

* Осциллограф (осциллоскоп) – измерительный прибор, с помощью которого можно наблюдать на экране кривые токов, напряжений и ЭДС, изменяющиеся во времени. Подробно об этом и других измерительных приборах излагается в курсе электрических измерений.

$$f = \frac{1}{T} \text{ Гц.} \quad (3.1)$$

В Европе стандартная частота энергетических сетей составляет 50 Гц.

При теоретических расчетах часто используют понятие об *угловой (круговой) частоте*. Ее обозначают греческой буквой «омега» и измеряют в 1/с. Угловая частота ω связана с частотой f соотношением

$$\omega = 2\pi f \text{ 1/с.} \quad (3.2)$$

Частоте $f = 50$ Гц соответствует угловая частота $\omega = 314$ 1/с.

Все сказанное выше о синусоидальном токе справедливо и по отношению к синусоидальному напряжению и синусоидальной ЭДС.

3.2. Аналитическая запись синусоидальных токов и напряжений

Синусоидальные токи и напряжения выражаются аналитически следующим образом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.3)$$

В этих формулах:

i и $u \rightarrow$ *мгновенные значения тока и напряжения* (в любой момент времени t);

I_m и U_m – *амплитуды* (наибольшие значения) тока и напряжения;

ω – *угловая частота* тока и напряжения, связанная с частотой f в герцах соотношением (3.2);

t – *время*, прошедшее от начала отсчета, которое выбирается произвольно (как нам удобно), так как на ход физического процесса изменения тока во времени оно не влияет;

$(\omega t + \psi_i)$ и $(\omega t + \psi_u)$ – *фазы тока и напряжения*; представляют собой некоторые углы, измеряемые в градусах (град) или радианах (рад).

ψ_i и ψ_u – *начальные фазы* тока и напряжения – это фазы $(\omega t + \psi_i)$ и $(\omega t + \psi_u)$ при $t = 0$; их численные значения зависят от выбора момента начала отсчета времени.

Легко заметить, что при изменении времени t от 0 до ∞ фазы тока и напряжения также изменяются от 0 до ∞ , но синусы этих фаз $\sin(\omega t + \psi_i)$ и $\sin(\omega t + \psi_u)$ изменяются лишь в пределах от +1 до –1. При этом мгновенные значения тока изменяются в диапазоне от $+I_m$ до $-I_m$, а мгновенные напряжения – от $+U_m$ до $-U_m$.

Для полного определения синусоидального тока или напряжения необходимо знать три величины: *амплитуду, частоту и начальную фазу*, в отличие от постоянного тока и напряжения, которые характеризуются одной величиной. Если известно приложенное к цепи синусоидальное напряжение, то это значит, что заданы U_m , ω и ψ_u . Следовательно, для определения синусоидального тока этой цепи надо определить только две величины: I_m и ψ_i , так как частота тока ω такая же, как и у приложенного напряжения.

3.3. Способы графического изображения синусоидальных токов

и напряжений

Существует два способа графического изображения синусоидальных токов и напряжений: с помощью графиков $i(\omega t)$ и $u(\omega t)$ в декартовых координатах (подобно рис.3.1) и с помощью вращающихся векторов в полярных координатах.

На рис.3.2,а показано изображение тока в виде вектора, длиной I_m , вращающегося (как принято в теории цепей) *против часовой стрелки* с постоянной угловой скоростью ω (соответствующей угловой частоте тока) относительно полюса 0 полярной системы координат. Его положение на этом рисунке зафиксировано в момент времени $t = 0$, при котором угол его наклона к полярной оси Р составляет величину равную начальной фазе $+\psi_i$ (положительные начальные фазы откладывают от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой).

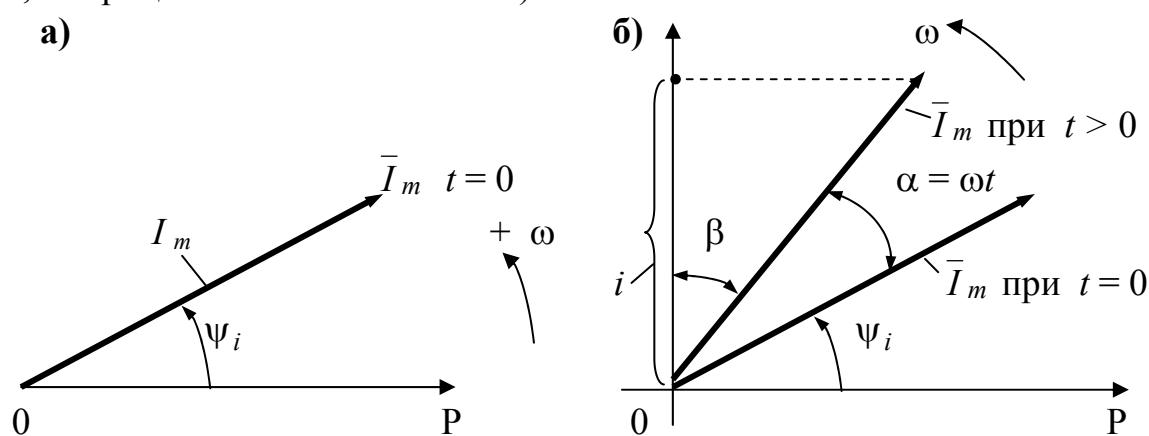
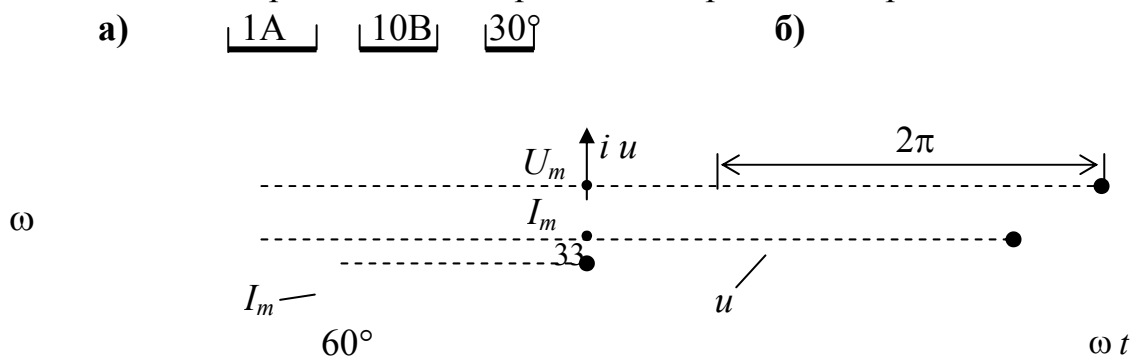


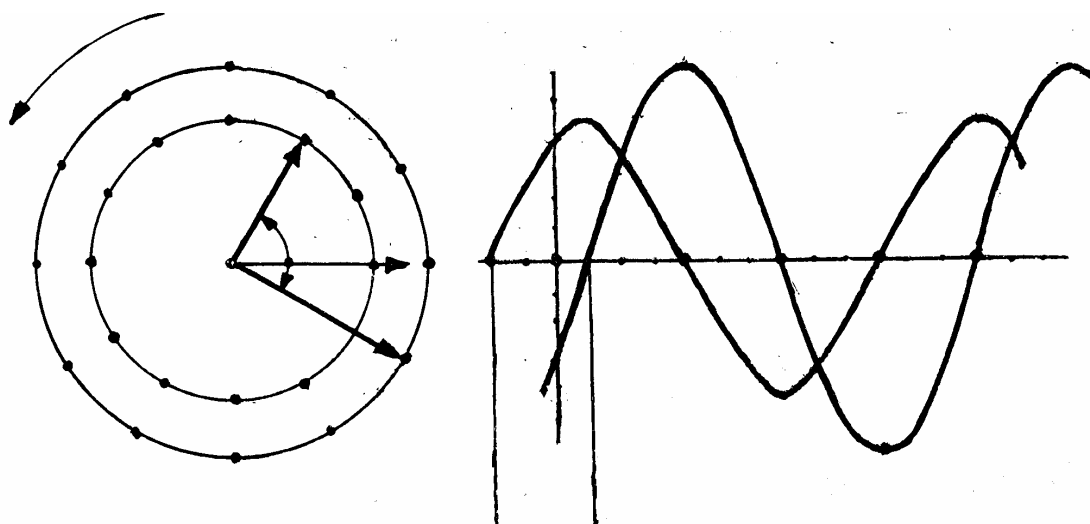
Рис. 3.2

Изображение тока в виде вращающегося вектора органически связано с формулой (3.3) его изменения во времени. При вращении вектора $\bar{I}_m$ против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω (являющейся механическим аналогом угловой частоты), проекция этого вектора на ось, перпендикулярную полярной оси (рис.3.2,б), совершает синусоидальные колебания во времени. В самом деле, пусть за время t , прошедшее от начала отсчета вектор $\bar{I}_m$ при своем вращении против часовой стрелки повернулся на угол $\alpha = \omega t$ (рис.3.2,б). Тогда проекция этого вектора на ось перпендикулярную полярной оси составит $i = I_m \cos \beta = I_m \sin (\omega t + \psi_i)$.

Заметим, что из формулы $\alpha = \omega t$ легко устанавливается связь между ω и f . Если в этой формуле положить $t = T$ (один период тока), то угол α составит 2π радиан (один оборот вектора тока). Тогда $2\pi = \omega T$ или $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$.

Пример 3.1. Известны синусоидальные ток и напряжения некоторой цепи (рис.3.3): $i = 2\sin (314t + 60^\circ)$ А ; $u = 30\sin (314t - 30^\circ)$ В. Требуется изобразить графически ток и напряжение в полярных и декартовых координатах.





$\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$ Рис.3.3

Решение. Вначале изображаем ток i и напряжение u цепи в полярных координатах (рис.3.3,а) в виде вращающихся векторов, зафиксированных на плоскости при $t = 0$. Для этого выбираем произвольно направление полярной оси Р и располагаем вектор тока длиной $I_m = 2\text{А}$ под углом $\psi_i = +60^\circ$ к ней, а вектор напряжения длиной $U_m = 30\text{ В}$ располагаем под углом $\psi_u = -30^\circ$ к полярной оси.

Для изображения тока и напряжения в декартовых координатах (рис.3.3,б) устанавливаем ось абсцисс (ось ωt) так, чтобы она располагалась на одной прямой с полярной осью (Р). Затем вращаем векторы $\vec{I}_m$ и $\vec{U}_m$ против часовой стрелки с угловой скоростью ω и фиксируем проекции этих векторов на декартовой плоскости через каждые 30° их поворота. В результате получаем графики изменения синусоидального тока и напряжения во времени, как это показано на рис.3.3,б.

Заметим, что величины начальных фаз тока и напряжения определяются отрезками на оси абсцисс между началом координат и ближайшими точками ее пересечения синусоидами при переходе значений от отрицательных к положительным. При этом положительные начальные фазы (в нашем примере $\psi_i = +60^\circ$) располагаются левее точки 0, а отрицательные (в нашем примере $\psi_u = -30^\circ$) – правее точки 0.

3.4. Векторные диаграммы и их применение к расчету цепей синусоидального тока

Графики токов $i(\omega t)$ и напряжений $u(\omega t)$ в декартовых координатах иногда используются для иллюстрации электромагнитных процессов в электрических цепях, но для практических расчетов не пригодны.

При решении электротехнических задач широко используется изображение токов и напряжений в виде вращающихся против часовой стрелки векторов, положение которых на плоскости зафиксировано для момента времени $t = 0$.

Пример 3.2. Известны (рис.3.4,а) синусоидальные токи двух параллельно включенных двухполюсников 1 и 2: $i_1 = 3 \sin(628t + 30^\circ)$ А; $i_2 = 4 \sin(628t - 60^\circ)$ А. Требуется: определить синусоидальный ток i в неразветвленной части цепи.

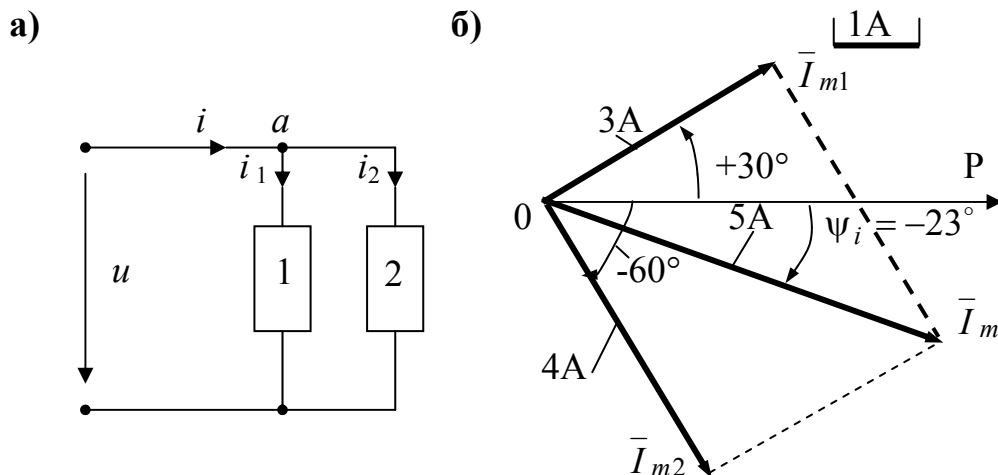


Рис.3.4

Решение. Для узла a цепи (для любого момента времени) справедлив первый закон Кирхгофа: $i - i_1 - i_2 = 0$ или $i = i_1 + i_2$. Следовательно, для нахождения тока в неразветвленной части цепи необходимо сложить синусоиды i_1 и i_2 . Это легко сделать если воспользоваться изображением токов в виде векторов по образцу рис.3.2,а. Для определения общего тока надо определить только две характеризующие его величины – амплитуду I_m и начальную фазу ψ_i , поскольку частота тока $\omega = 628$ 1/с задана. Эти величины можно легко найти графически, сложив векторы $\bar{I}_{m1}$ и $\bar{I}_{m2}$ так, как это делают в механике при нахождении вектора результирующих сил:

$$\bar{I}_m = \bar{I}_{m1} + \bar{I}_{m2} . \quad (3.4)$$

Векторы исходных токов и результат их сложения показан на рис.3.4,б. Здесь длина суммарного вектора равна амплитуде общего тока I_m , а угол наклона к полярной оси (Р), есть начальная фаза ψ_i общего тока.

Путем непосредственных измерений находим, что $I_m = 5$ А и $\psi_i = -23^\circ$ (знак “–” взят потому, что он расположен по часовой стрелке от полярной оси Р). Таким образом, искомый ток $i = 5 \sin(628t - 23^\circ)$ А.

Пример 3.3. Известны (рис.3.5,а) синусоидальные напряжения u_1 и u_2 на зажимах двухполюсников 1 и 2, включенных в цепь последовательно: $u_1 = 30 \sin(314t + 90^\circ)$; $u_2 = 50 \sin(314t + 20^\circ)$. Требуется определить общее напряжение (u), приложенное к этой цепи.

Решение. К данной цепи применим второй закон Кирхгофа, согласно которому в любой момент времени $u_1 + u_2 - u = 0$ или $u = u_1 + u_2$. Для решения задачи воспользуемся представлением заданных напряжений в виде векторов. Тогда вектор общего напряжения $\bar{U}_m$ находится как сумма векторов напряжений последовательно соединенных двухполюсников:

$$\bar{U}_m = \bar{U}_{m1} + \bar{U}_{m2} . \quad (3.5)$$

Результаты такого сложения представлены на рис.3.5,б. Там же показан и выбранный масштаб для напряжения.

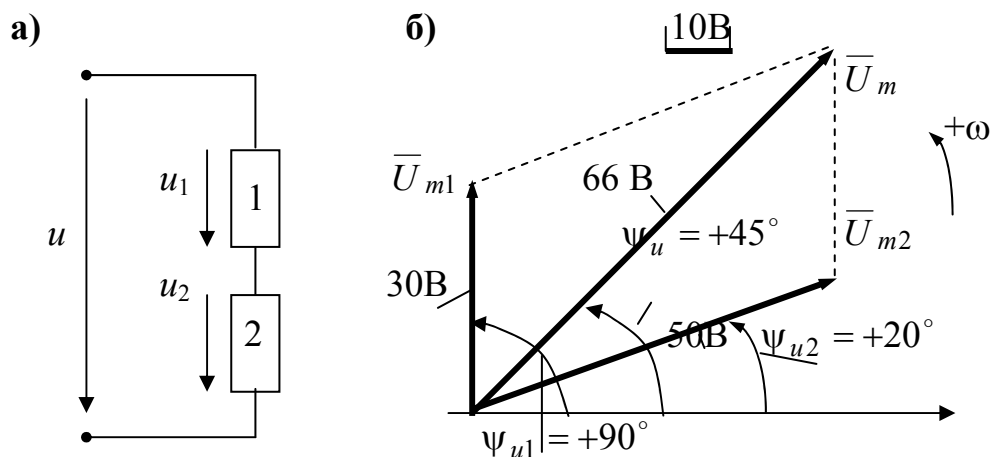


Рис.3.5

Непосредственно из рис.3.5 определяем, что $U_m = 66 \text{ В}$ и $\psi_u = +45^\circ$. Поэтому искомое напряжение цепи: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 66 \sin(314t + 45^\circ) \text{ В}$.

Совокупность векторов токов и напряжений цепи, называется векторной диаграммой этой цепи. Она позволяет заменить алгебраическое сложение (вычитание) синусоидальных токов, а также синусоидальных напряжений графическим сложением векторов и тем самым значительно облегчить расчет цепей синусоидального тока.

3.5. Закон Кирхгофа в векторной форме записи

При расчете цепей в примерах 3.2 и 3.3 использовали первый и второй законы Кирхгофа в векторной форме записи. Обобщая соотношения (3.4) и (3.5), можно сформулировать эти законы в наиболее общем виде.

$$\text{1-й закон Кирхгофа: } \sum_{k=1}^K \bar{I}_k = 0. \quad (3.6)$$

Геометрическая сумма векторов всех токов, подходящих к любому узлу цепи, равна нулю. При этом векторы токов, направленных к узлу, берутся в уравнении (3.6) со знаком (+), а векторы токов, направленных от узла, – со знаком (–). В формуле (3.6) K – общее число ветвей, подходящих к узлу (не менее трех).

$$\text{2-й закон Кирхгофа: } \sum_{m=1}^M \bar{E}_m = \sum_{n=1}^N \bar{U}_n. \quad (3.7)$$

Геометрическая сумма векторов всех ЭДС любого контура цепи равна сумме векторов напряжений на всех приемниках этого контура. При этом векторы ЭДС и напряжений, направление которых совпадает с принятым направлением обхода контура, берутся в уравнении со знаком (+), а остальные – со знаком (–). В формуле (3.7) M – число источников энергии в контуре, N – число приемников энергии в контуре.

3.6. Фазовые соотношения между синусоидальными токами и напряжениями

Если две или несколько синусоид имеют одинаковые начальные фазы, то это значит, что они *совпадают по фазе*. На векторной диаграмме такие синусоиды располагаются на одной прямой или параллельно друг другу.

Если две синусоиды имеют неодинаковые начальные фазы, то это значит, что они *не совпадают по фазе* или, иначе говоря, *сдвинуты по фазе*. Та из двух синусоид, фаза которой больше (с учетом знака), называется *опережающей по фазе*, тогда как другая – *отстающей по фазе*.

Так, из векторной диаграммы, показанной на рис.3.4,б, следует, что ток i_1 опережает общий ток цепи i по фазе на 53° , а ток i_2 отстает от тока i по фазе на 37° . Из векторной диаграммы на рис.3.5,б следует, что общее напряжение u опережает напряжение u_2 по фазе на 25° и отстает от напряжения u_1 по фазе на 45° .

Заметим, что угол сдвига фаз между синусоидами не является произвольной величиной. Он зависит от соотношения между параметрами R , L и C электрической цепи, о чем подробно будет изложено ниже.

В электроэнергетике большое значение придается углу сдвига фаз между напряжением и током цепи. Он определяется как разность начальных фаз напряжения и тока (с учетом их собственных знаков) и обозначается греческой буквой φ :

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (3.8)$$

На рис.3.6 показано соотношение между углом сдвига фаз φ и начальными фазами напряжения ψ_u и тока ψ_i (здесь они взяты положительными). *От величины угла сдвига фаз φ зависит эффективность работы электрической цепи.* Чем этот угол меньше, тем более эффективно работает электрическая цепь. Более подробно о влиянии величины φ на работу электрической цепи и способах его уменьшения будет изложено в пунктах 3.11, 3.13 и 3.15 данной главы.

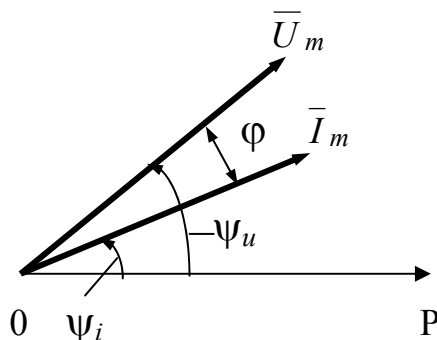


Рис.3.6

3.7. Действующие значения синусоидальных токов и напряжений

В цепях синусоидального тока для измерения действующих значений токов и напряжений используют электромагнитные амперметры и вольтметры*.

Понятие о действующем значении тока сложилось исторически при переходе электроэнергетики от использования сетей постоянного тока к сетям переменного синусоидального тока. Новый для того времени переменный ток сравнивали с постоянным током по его способности преобразовывать электромагнитную энергию в тепловую. Условились считать синусоидальный ток эквивалентным (равноценным) в этом смысле постоянному току, если он в сопротивлении R за время T одного периода выделяет такое же количество тепла, что и постоянный ток. При этих условиях количество тепла, выделяемого постоянным током, $W_{пост} = I^2 R T$, а количество тепла, выделенного синусоидальным током, $W_{син} = \int_0^T i^2 R dt$. Полагая $W_{пост} = W_{син}$, находим что:

$$I^2 R T = \int_0^T i^2 R dt \quad \text{или} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} . \quad (3.9)$$

Полученное соотношение определяет величину постоянного тока I , эквивалентного синусоидальному току по тепловому действию. Эта величина называется *действующим значением синусоидального тока* i . Подставив $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ в формулу (3.9) и произведя интегрирование**, получаем

$$I = I_m / \sqrt{2} . \quad (3.10)$$

Таким образом, действующие значения синусоидального тока в $\sqrt{2}$ раз (в 1,41 раза) меньше его амплитуды.

Аналогичная формула существует и для определения действующего значения синусоидального напряжения:

$$U = U_m / \sqrt{2} . \quad (3.11)$$

В настоящее время, действующие значения синусоидального тока и напряжения являются основными расчетными величинами. Поэтому при дальнейшем изложении будем использовать главным образом действующие значения этих величин.

Заметим, что формула (3.9) справедлива не только для синусоидального тока, но и для периодического тока любой формы.

3.8. Простейшие цепи синусоидального тока

К простейшим относятся цепи, содержащие только сопротивления R , только индуктивность L , только емкость C ***.

Рассмотрим амплитудные и фазовые соотношения между током и напряжением в этих цепях. Для этого приложим к этим цепям синусоидальное

* Подробно об устройстве измерительных приборов различных систем излагается в курсе электрических измерений.

** Подробный вывод имеется в [1], [2], [3], [4].

*** Экспериментальное исследование простейших цепей синусоидального тока проводится в лабораторной работе №1 [8].

напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ (3.2) и рассчитаем ток в каждой из них (т.е. найдем его амплитуду и начальную фазу).

1. Цепь только с сопротивлением R . В этой цепи (табл.1.4)

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Анализ полученного выражения:

$$\text{а) } I_m = \frac{U_m}{R} \quad \text{или} \quad \text{действующее значение тока} \quad I = \frac{U}{R}. \quad (3.12)$$

Сопротивление R в цепи синусоидального тока называется *активным*, так как в нем проходит процесс преобразования электромагнитной энергии в тепловую. В большом диапазоне частот активное сопротивление R практически постоянно. Величина, обратная активному сопротивлению, называется активной проводимостью: $G = 1/R$. Тогда формула для тока приобретает вид

$$I = U/R = UG. \quad (3.13)$$

Это закон Ома для цепи синусоидального тока с активным сопротивлением.

б) Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u$ или, в соответствии с формулой (3.8), $\psi_i = \psi_u - \psi_i = 0$, т.е. в цепи с активным сопротивлением ток и напряжение совпадают по фазе.

2. Цепь только с индуктивностью L . В такой цепи (табл.1.4)

$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Анализ полученного выражения:

$$\text{а) } I_m = \frac{U_m}{\omega L} \quad \text{или} \quad \text{действующее значение тока} \quad I = \frac{U}{X_L}. \quad (3.14)$$

Выражение $X_L = \omega L$, стоящее в знаменателе – это *реактивное индуктивное сопротивление цепи*. Оно возникает как реакция магнитного поля цепи на процесс изменения запаса энергии в нем и не сопровождается тепловыми явлениями. Величина, обратная индуктивному сопротивлению, называется индуктивной проводимостью

$$b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}. \quad (3.15)$$

Тогда формула для тока в индуктивности приобретает вид

$$I = U/X_L = U b_L. \quad (3.16)$$

Это закон Ома для цепи синусоидального тока с индуктивным сопротивлением.

б) Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$ или $\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$, т.е. в цепи с индуктивностью ток отстает от напряжения по фазе на 90° .

3. Цепь только с емкостью C . В такой цепи (табл.1.4)

$$i = C \frac{du}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Анализ полученного выражения:

$$\text{а) } I_m = \frac{U_m}{1/\omega C} \quad \text{или} \quad \text{действующее значение тока } I = \frac{U}{X_C}. \quad (3.17)$$

Выражение $X_C = 1/\omega C$, стоящее в знаменателе – это реактивное емкостное сопротивление цепи. Оно возникает как реакция электрического поля цепи на процесс изменения запаса энергии в нем и не сопровождается тепловыми явлениями. Величина, обратная емкостному сопротивлению, называется емкостной проводимостью

$$b_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{1/\omega C} = \omega C. \quad (3.18)$$

Тогда формула для тока в емкости получает вид

$$I = U/X_C = U b_C. \quad (3.19)$$

Это закон Ома для цепи синусоидального тока с емкостью.

б) Начальная фаза тока $\psi_i = \psi_u + 90^\circ$, т.е. в цепи с емкостью ток опережает приложенное напряжение по фазе на 90° . При этом в соответствии с формулой (3.8) $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$.

Результаты исследования простейших цепей синусоидального тока представлены в табл.3.1. Там же показаны их векторные диаграммы, а на рис.3.7 даны осциллограммы токов и напряжений для цепей с R , L и C .

3.9. Зависимость активного, индуктивного и емкостного сопротивлений от частоты

Эти зависимости представлены в виде графика на рис.3.8.

Активное сопротивление R в при низких частотах практически не зависит от частоты и остается неизменной величиной, но индуктивное и емкостное сопротивления цепи синусоидального тока в принципе зависят от частоты приложенного напряжения.

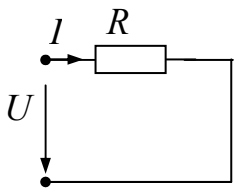
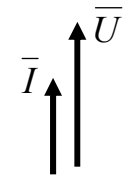
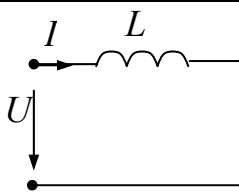
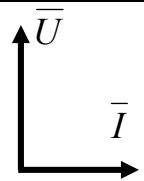
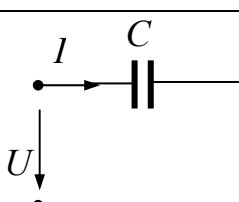
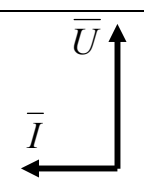
Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$ изменяется прямо пропорционально частоте. При частоте $\omega \rightarrow 0$, $X_L \rightarrow 0$, что подтверждает положение о том, что индуктивность в цепи постоянного тока не обладает сопротивлением*.

Емкостное сопротивление $X_C = 1/\omega C$ изменяется обратно пропорционально частоте: при $\omega \rightarrow 0$ емкостное сопротивление $X_C \rightarrow \infty$, что соответствует отсутствию тока в емкости в цепи постоянного тока (п. 2.1 главы 2).

Т а б л и ц а 3.1

* Частота $\omega = 0$ имеет место в цепи постоянного тока.

**Амплитудные и фазовые соотношения между током и напряжением
в простейших электрических цепях**

№ п/п	Схемы цепей	Амплитудные соотношения (закон Ома)	Фазовые соотношения (сдвиг фаз)	Векторные диаграммы
1		$I = \frac{U}{R} = UG,$ где $G = \frac{1}{R}$	$\psi_i = \psi_u$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$	
2		$I = \frac{U}{X_L} = Ub_L,$ где $X_L = \omega L,$ $b_L = 1/X_L = 1/\omega L$	$\psi_i = \psi_u - 90^\circ$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$	
3		$I = \frac{U}{X_C} = Ub_C,$ где $X_C = 1/\omega C,$ $b_C = 1/X_C = \omega C$	$\psi_i = \psi_u + 90^\circ$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$	

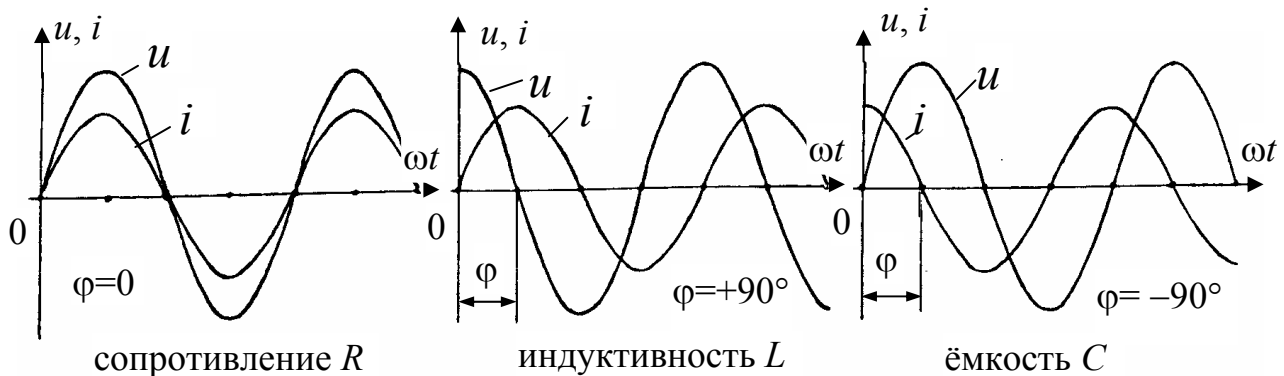


Рис.3.7

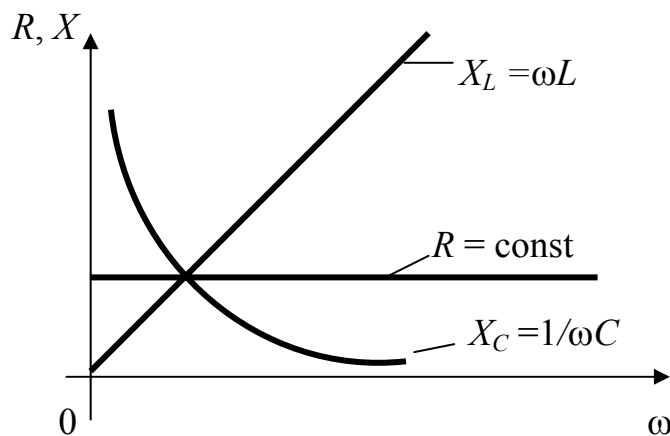


Рис.3.8

3.10. Цепь с последовательным соединением R, L, C

Известно приложенное к цепи синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и параметры R, L, C цепи (рис.3.9,а). Требуется определить ток цепи i , т.е. его амплитуду I_m и начальную фазу ψ_i .

В цепи с последовательным соединением R, L, C ток во всех ее элементах одинаков, а напряжения на элементах различные. К такой цепи применим 2-й закон Кирхгофа, который в векторной форме записи в соответствии с формулой (3.7) имеет вид $\bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C - \bar{U} = 0$ или $\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$.

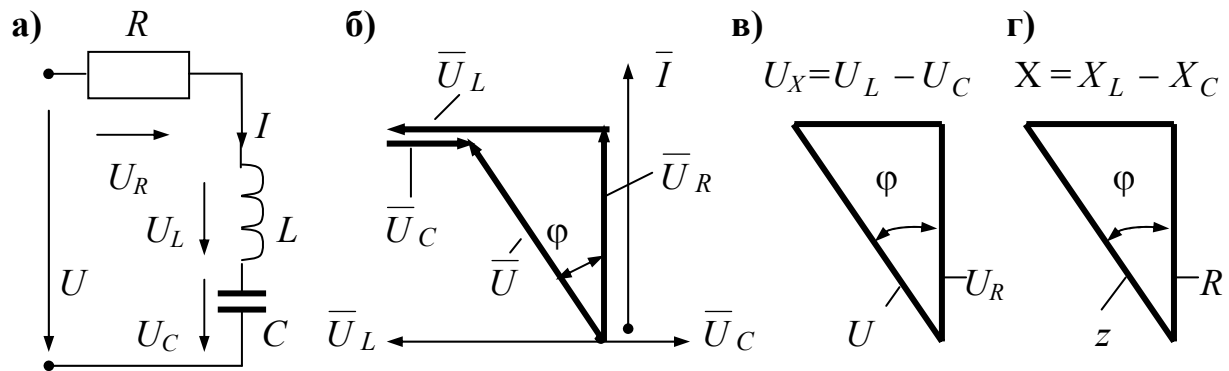


Рис.3.9

Решим поставленную задачу с помощью векторной диаграммы. Она показана на рис.3.9,б для случая, когда $U_L > U_C$. Диаграмму начинаем строить с вектора тока $\bar{I}$, откладывая его на плоскости чертежа вертикально вверх (выбор произвольный).

В соответствии с табл.3.1 вектор $\bar{U}_R$ совпадает с вектором $\bar{I}$ по фазе, вектор $\bar{U}_L$ опережает вектор $\bar{I}$ по фазе на 90° , а вектор $\bar{U}_C$ отстает от вектора $\bar{I}$ по фазе на 90° .

Применяя правило многоугольника для сложения векторов и откладывая векторы $\bar{U}_R$, $\bar{U}_L$ и $\bar{U}_C$ друг за другом, находим вектор $\bar{U}$ приложенного к цепи напряжения. Полученный результат показывает, что действующие значения напряжений этой цепи (длины векторов) соотносятся между собой как стороны прямоугольного треугольника. Этот треугольник напряжений показан на рис.3.9,в. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, находим

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}, \quad (3.20)$$

где $U_X = (U_L - U_C)$. Учитывая (табл.3.1), что $U_R = IR$, $U_L = IX_L$ и $U_C = IX_C$, получаем

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + X^2}, \quad \text{или } U = I z. \quad (3.21)$$

Эта формула является законом Ома для цепи синусоидального тока с последовательным соединением активного и реактивных сопротивлений. Здесь

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.22)$$

- полное сопротивление данной цепи.

Из формулы (3.22) следует, что активное R , реактивное X и полное z сопротивления рассматриваемой цепи также соотносятся между собой как

стороны прямоугольного треугольника. Этот треугольник сопротивлений показан на рис.3.9,г. Заметим, что треугольник сопротивлений подобен треугольнику напряжений: поделив все стороны треугольника напряжений на величину действующего значения тока I цепи, получаем треугольник сопротивлений.

Из векторной диаграммы видно, что ток и напряжение цепи не совпадают по фазе. Угол сдвига фаз φ определяется из треугольника напряжений или треугольника сопротивлений:

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (3.23)$$

Этот угол по абсолютному значению меньше 90° . В нашем примере $U_L > U_C$, угол $\varphi > 0$ и цепь имеет индуктивный характер (рис.3.10,а). Если $U_L < U_C$, то $\varphi < 0$ и цепь имеет емкостной характер (рис.3.10,б). Если же $U_L = U_C$, то $\varphi = 0$ и цепь ведет себя как чисто активная (рис.3.10,в).

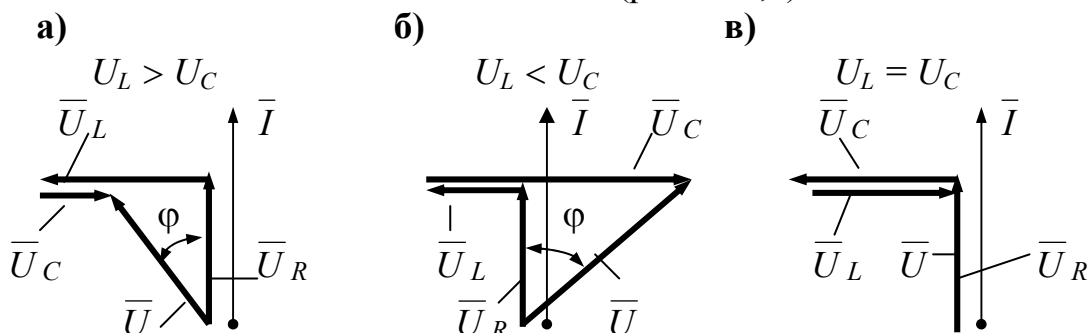


Рис.3.10

На этом поставленная задача определения тока цепи решена: а) действующее значение тока определяется в соответствии с формулой (3.21), где z – полное сопротивление цепи, состоящее из заданных в условии задачи величин; б) начальная фаза тока определяется в соответствии с формулой (3.8): $\psi_i = \psi_u - \varphi$, где ψ_u – начальная фаза напряжения, известная из условий задачи, а φ – угол сдвига фаз между напряжением и током, определяемый в соответствии с формулой (3.23).

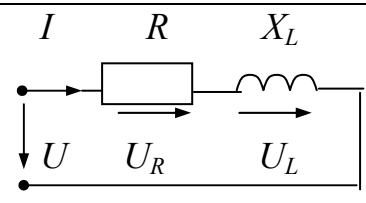
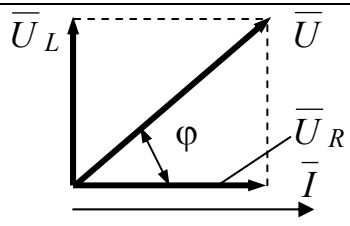
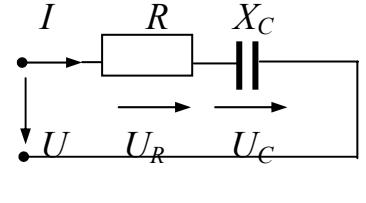
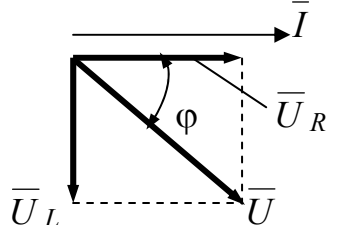
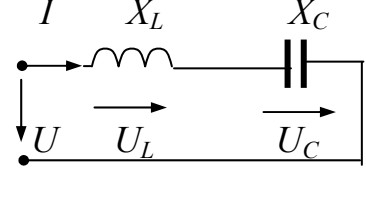
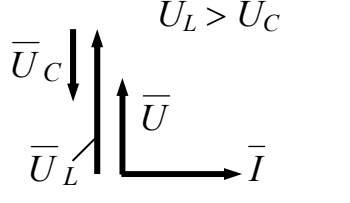
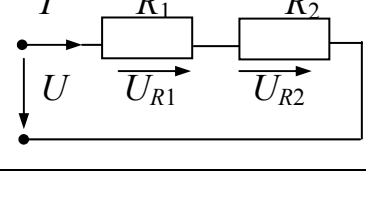
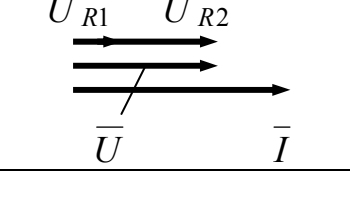
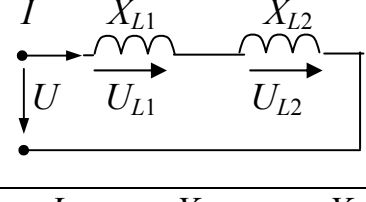
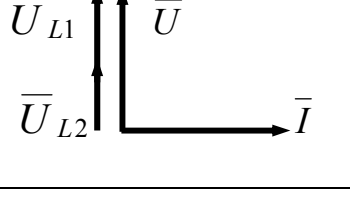
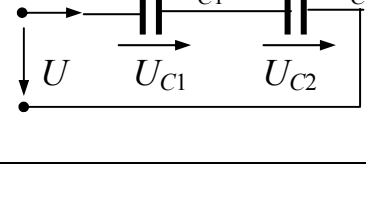
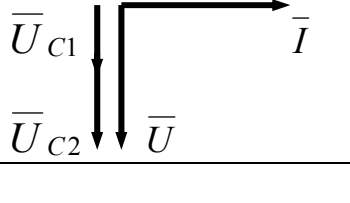
Полученные результаты позволяют рассчитывать цепи, содержащие последовательно соединенные элементы в любой комбинации. В табл.3.2 представлены некоторые частные случаи исследуемой цепи. Приведены основные расчетные формулы и показаны векторные диаграммы.

3.11. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением R, L, C . Резонанс напряжений

В электрических цепях частота источника остается неизменной ($f = 50$ Гц; $\omega = 314$ 1/с). Однако в цепях автоматики, вычислительной техники,

Т а б л и ц а 3.2

Некоторые частные случаи цепи с последовательным соединением R, L, C

№ п/п	Схемы цепей	Расчетные формулы	Векторные диаграммы
1		$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$ $z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} > 0$	
2		$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$ $z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ $\varphi = \arctg \frac{X_C}{R} < 0$	
3		$U = U_L - U_C$ $z = X_L - X_C$ $\varphi = +90^\circ \text{ при } U_L > U_C$ $\varphi = -90^\circ \text{ при } U_L < U_C$	
4		$U = U_{R1} + U_{R2}$ $z = R_1 + R_2$ $\varphi = 0$	
5		$U = U_{L1} + U_{L2}$ $z = X_{L1} + X_{L2}$ $\varphi = +90^\circ$	
6		$U = U_{C1} + U_{C2}$ $z = X_{C1} + X_{C2}$ $\varphi = -90^\circ$	

радиотехнических цепях частота меняется в широких пределах *.

Зависимости тока, сопротивлений, угла сдвига фаз между напряжением и током, напряжений на отдельных участках цепи от частоты называются *частотными характеристиками*. На рис.3.11 показаны некоторые из них для цепи с последовательным соединением R , L , C . При изменении частоты в широких пределах активное сопротивление R остается постоянным, индуктивное сопротивление X_L изменяется прямо пропорционально частоте, а емкостное сопротивление X_C – обратно пропорционально частоте. Полное

* Экспериментальное исследование частотных свойств цепи с последовательным соединением R , L , C проводится в лабораторной работе № 4 [8].

сопротивление z изменяется более сложным образом. При изменении частоты от 0 до ω_0 оно имеет емкостной характер и с увеличением частоты изменяется от ∞ до R . При изменении частоты от ω_0 до ∞ оно имеет индуктивный характер и изменяется от R до бесконечности. Ток цепи (при $U=\text{const}$) изменяется по формуле $I = U/z$ и при частоте ω_0 достигает своего максимума.

Режим работы цепи, при котором $X_L = X_C$ (и, следовательно, $U_L = U_C$), называется *резонансом напряжений*; а частота ω_0 этого режима называется *резонансной частотой*.

Векторная диаграмма цепи при таком резонансе показана на рис.3.10,в. Здесь U_L и U_C равны между собой, а их векторы находятся в противофазе (угол сдвига фаз между ними 180°) и компенсируют друг друга. Все напряжение U приходится на активное сопротивление R , угол сдвига фаз между напряжением и током цепи $\varphi = 0$. В этом режиме работы цепь ведет себя как чисто активная, несмотря на то, что в ее составе имеется индуктивность и емкость.

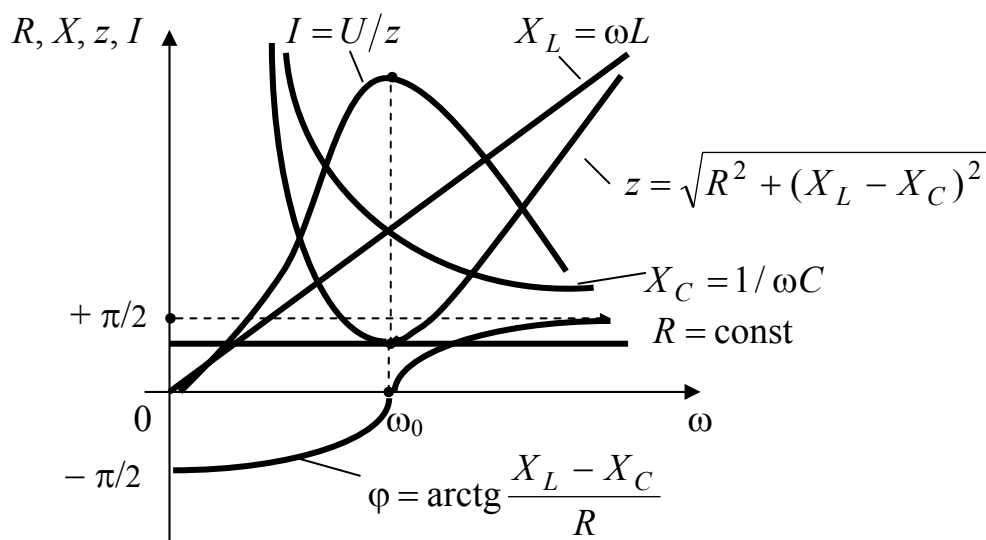


Рис.3.11

Из условия $X_L = X_C$ вытекает, что при резонансе напряжений

$$\omega L = 1/\omega C \quad \text{или} \quad \omega^2 LC - 1 = 0. \quad (3.24)$$

Это есть резонансное уравнение, которое показывает соотношение между R, L, C и ω при резонансе. Если в частном случае L и C известны, то резонансная частота цепи с последовательным соединением R, L, C имеет вид

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.25)$$

При резонансе напряжений ток достигает максимального значения, так как при этом сопротивление цепи минимально ($z_{\text{рез}} = R$) и равно ее активному сопротивлению. Если при этом оказывается, что $X_{L \text{ рез}} = X_{C \text{ рез}} > R$, то напряжения на индуктивности и емкости (U_L и U_C) превышают приложенное к цепи напряжение, т.е. возникает перенапряжение на этих элементах цепи.

Явление резонанса напряжений широко используется в радиотехнике, в частности, потому, что, настроив цепь (контур, как говорят радисты) в

резонанс, получают наибольший возможный ток (сигнал). В энергетических же цепях резонанса напряжений избегают из-за возможных перенапряжений на реактивных элементах цепи и максимального тока.

3.12. Цепь с параллельным соединением R, L и C

Известно приложенное к цепи (рис.3.12,а) синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и ее параметры R, L, C . Требуется определить ток цепи i (I_m и ψ_i).

В цепи с параллельным соединением R, L, C напряжение на всех ее элементах одинаково, а токи разные. Здесь действует 1-й закон Кирхгофа, который в соответствии с формулой (3.6) имеет вид $\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$. Для решения задачи построим векторную диаграмму цепи. Она показана на рис.3.12,б при условии, что $I_L > I_C$. Диаграмму начинаем строить с общего для всей цепи вектора напряжения $\bar{U}$, откладывая его на плоскости вертикально вверх (произвольный выбор).

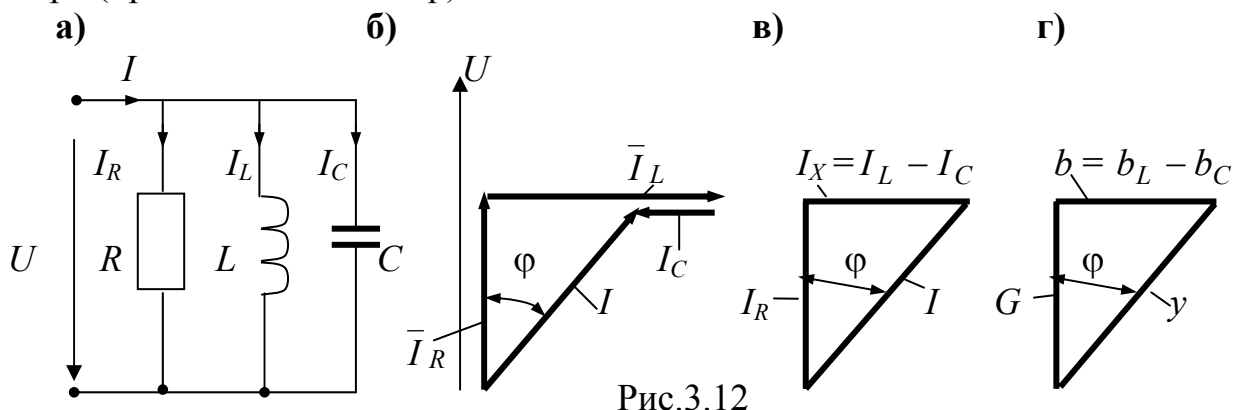


Рис.3.12

Затем строим векторы $\bar{I}_R$, $\bar{I}_L$ и $\bar{I}_C$, пользуясь результатами, полученными в 3.8 настоящей главы. Вектор $\bar{I}_R$ откладываем по одной линии (параллельно) с вектором $\bar{U}$, так как ток и напряжение в активном сопротивлении R совпадают по фазе. Вектор $\bar{I}_L$ откладываем под углом 90° по часовой стрелке к вектору $\bar{U}$, так как в индуктивности ток отстает от напряжения на 90° . Наконец, вектор $\bar{I}_C$ откладываем под углом 90° против часовой стрелки к вектору $\bar{U}$, поскольку в цепи с емкостью ток опережает напряжение по фазе на 90° .

Складывая эти векторы по правилу многоугольника (предварительно выстроив их друг за другом), находим результирующий вектор $\bar{I}$. Из полученной диаграммы следует, что действующие значения токов ветвей (длины векторов) соотносятся между собой, как стороны прямоугольного треугольника (рис.3.12,в). Применяя теорему Пифагора, получаем

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_X^2}, \text{ где } I_X = (I_L - I_C). \quad (3.26)$$

В соответствии с табл.3.1 имеем $I_R = U G$; $I_L = U b_L$; $I_C = U b_C$.

Подставляя эти значения токов в формулу (3.26), находим

$$I = U \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = U \sqrt{G^2 + b^2} \text{ или } I = U y. \quad (3.27)$$

Эта формула является законом Ома для цепи с параллельным соединением активных и реактивных сопротивлений. Здесь

$$y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{G^2 + b^2} \quad (3.28)$$

– полная проводимость исследуемой цепи.

Из формулы (3.28) следует, что активная G , реактивная b и полная y проводимости цепи соотносятся между собой, как стороны прямоугольного треугольника (рис.3.12,г), подобного треугольнику тока: его можно получить, если все стороны треугольника тока поделить на действующее значение напряжения цепи U . Сравнивая между собой формулы (3.27) и (3.21), замечаем, что полная проводимость (y) и полное сопротивление цепи (z) являются взаимнообратными величинами: $y = I/U$; $z = U/I$. Отсюда

$$z = 1/y. \quad (3.29)$$

Из векторной диаграммы на рис.3.12,б, следует, что ток и напряжение цепи не совпадают по фазе. Угол сдвига фаз φ определяется либо из треугольника напряжений, либо из треугольника токов:

$$\varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_R} = \arctg \frac{b_L - b_C}{G}. \quad (3.30)$$

Этот угол, как видно из диаграммы, по абсолютному значению меньше 90° . Здесь возможны три варианта. Если $I_L > I_C$ ($b_L > b_C$), этот угол положителен (рис.3.13,а) и цепь имеет индуктивный характер. При $I_L < I_C$ ($b_L < b_C$) угол сдвига фаз отрицателен (3.13,б) и цепь имеет емкостной характер. Если $I_L = I_C$ ($b_L = b_C$), то $\varphi = 0$ (рис.3.13,в) и цепь ведет себя как чисто активная.

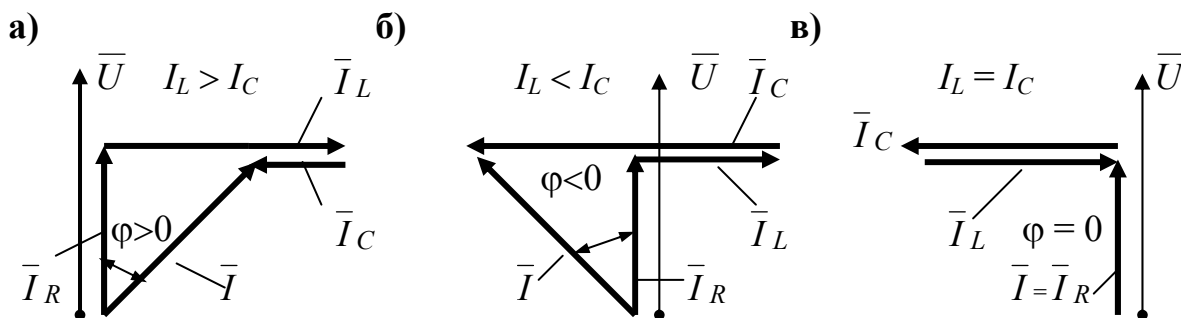


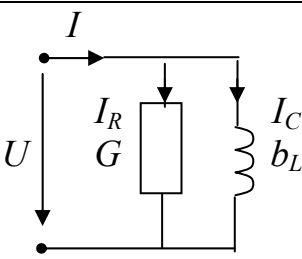
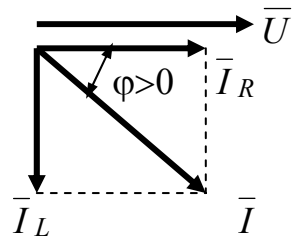
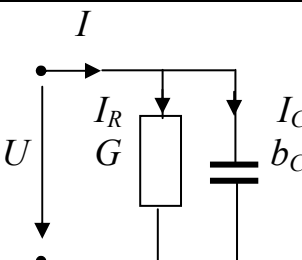
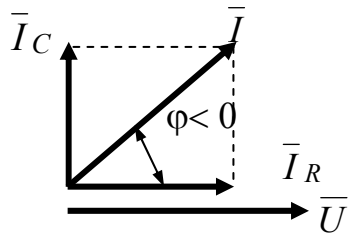
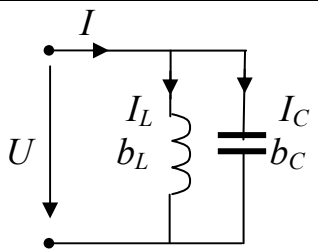
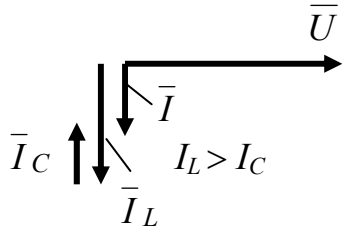
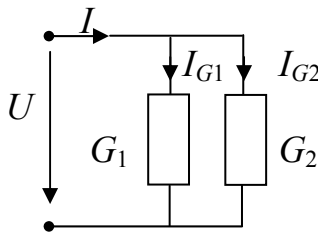
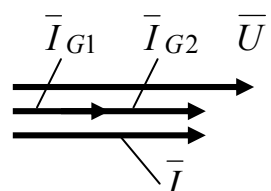
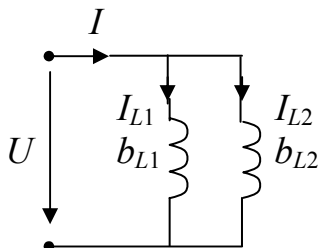
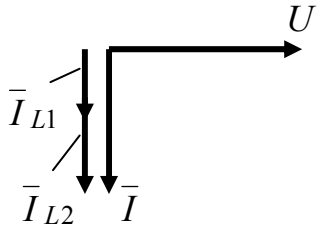
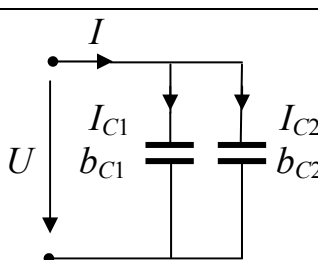
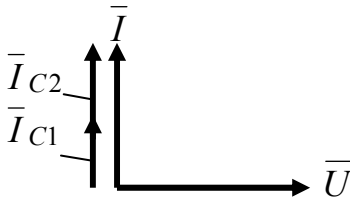
Рис.3.13

На этом поставленная в условии задача нахождения тока цепи решена: а) действующее значение тока определяется в соответствии с формулой (3.27); б) начальная фаза тока ψ_i определяется в соответствии с формулой (3.8).

Результаты, полученные при рассмотрении данной задачи, позволяют рассчитывать цепи, содержащие параллельно соединенные элементы в любой комбинации. В табл.3.3 представлены некоторые частные случаи таких цепей, приведены основные расчетные формулы и показаны их векторные диаграммы.

Т а б л и ц а 3.3

Частные случаи цепей с параллельным соединением R, L, C

№ П/П	Схемы цепей	Расчетные формулы	Векторные диаграммы
1		$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$ $y = \sqrt{G^2 + b_L^2}$ $\varphi = \text{arctg} \frac{b_L}{G} > 0$	
2		$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$ $y = \sqrt{G^2 + b_C^2}$ $\varphi = \text{arctg} \frac{b_C}{G} < 0$	
3		$I = I_L - I_C$ $y = b_L - b_C$ $\varphi = +90^\circ \text{ при } I_L > I_C$ $\varphi = -90^\circ \text{ при } I_L < I_C$	
4		$I = I_{G1} + I_{G2}$ $y = G_1 + G_2$ $\varphi = 0$	
5		$I = I_{L1} + I_{L2}$ $y = b_{L1} + b_{L2}$ $\varphi = +90^\circ$	
6		$I = I_{C1} + I_{C2}$ $y = b_{C1} + b_{C2}$ $\varphi = -90^\circ$	

3.13. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением

R, L, C. Резонанс токов

При изменении частоты приложенного к цепи напряжения изменяются реактивные проводимости цепи, а следовательно, и многие другие электрические величины, например токи в различных элементах цепи, угол сдвига фаз φ . Зависимости этих (и некоторых других) величин от частоты называются *частотными характеристиками цепи*.

На рис.3.14 показаны частотные характеристики тока и проводимостей для цепи с параллельным соединением R, L, C .

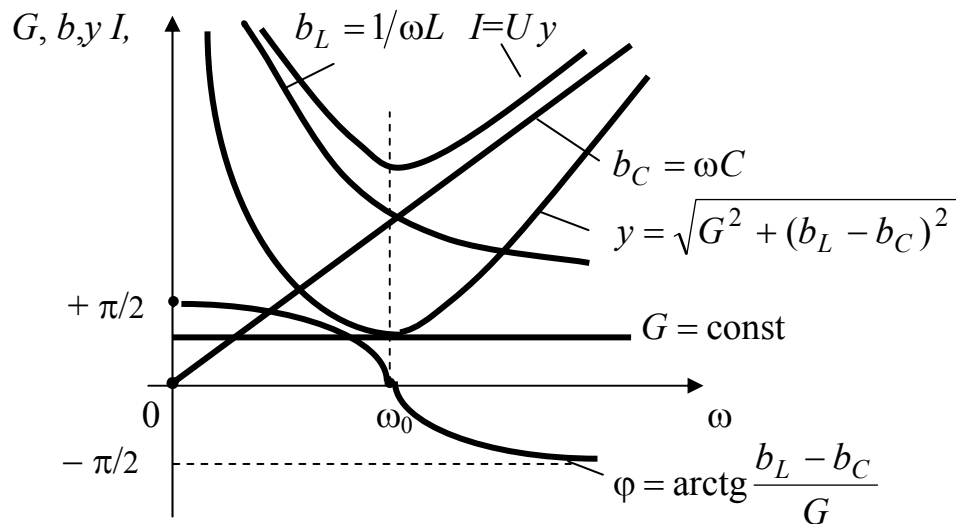


Рис.3.14

При изменении частоты в широких пределах активная проводимость G остается практически неизменной, индуктивная проводимость b_L изменяется обратно пропорционально частоте, а емкостная проводимость b_C — прямо пропорционально частоте. Полная проводимость y изменяется более сложным образом. При частотах от 0 до ω_0 она имеет индуктивный характер и с увеличением частоты уменьшается от ∞ до G . При частотах от ω_0 до ∞ она имеет емкостной характер и с увеличением частоты увеличивается от G до ∞ . При частоте ω_0 полная проводимость цепи $y = G$ и достигает наименьшего значения.

Ток цепи (при $U = \text{const}$) изменяется в соответствии с изменением y и при частоте ω_0 достигает минимума.

Режим работы цепи, при котором $b_L = b_C$ (а следовательно, и $I_L = I_C$), называется *резонансом токов*, а частота ω_0 , при которой этот режим имеет место, называется *резонансной частотой*. Векторная диаграмма цепи при резонансе токов показана на рис.3.13,в.

Здесь действующие значения токов I_L и I_C равны между собой, а их векторы $\vec{I}_L$ и $\vec{I}_C$ находятся в противофазе (угол сдвига фаз между ними составляет 180°) и компенсируют друг друга. В результате весь ток цепи I равен току в активной проводимости G . При этом угол сдвига фаз $\varphi = 0$ и цепь ведет себя как чисто активная, несмотря на то, что в ней имеются и индуктивность, и емкость.

Из условия $b_L = b_C$ вытекает следующее соотношение между параметрами цепи и резонансной частотой:

$$1/\omega L = \omega C \quad \text{или} \quad \omega^2 LC - 1 = 0. \quad (3.31)$$

Это есть резонансное уравнение исследуемой цепи. Если, в частности, параметры L и C известны, то резонансная частота определяется соотношением*.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.32)$$

При резонансе токов ток цепи минимален. Если при этом оказывается, что $b_{L0} = b_{C0} > G$, то $I_{L0} = I_{C0} > I$, т.е. токи в индуктивности и емкости при резонансе больше общего тока цепи.

Резонанс токов широко используется в электроэнергетике. Электросети всех промышленных предприятий представляют собой цепи с активно-индуктивной нагрузкой (двигатели, трансформаторы, дроссели). Для улучшения их работы параллельно этим цепям подключают батареи конденсаторов, подбирая их емкость так, чтобы угол сдвига фаз φ между напряжением и током цепи был близок к нулю.

3.14. Мощность цепи синусоидального тока

Электрическая мощность в цепи синусоидального тока определяется как произведение действующего значения напряжения (U) на действующее значение тока (I) для каждого из ее элементов и для цепи в целом. Ее физическая размерность – вольт-ампер (ВА). Различают три вида мощности: активную (P), реактивную (Q) и полную (S).

Мощность в активных сопротивлениях цепи называется *активной* (P). Она характеризует скорость преобразования электромагнитной энергии в тепловую энергию и механическую работу и измеряется в ваттах (Вт).

Мощность в реактивных сопротивлениях цепи, называется *реактивной* (Q) и измеряется (для ее отличия от активной мощности) в вольт-амперах реактивных (вар). Она характеризует скорость изменения запаса энергии в электрическом и магнитном полях цепи и не связана с преобразованием энергии электромагнитного поля в тепловую энергию.

Мощность на зажимах всей цепи, состоящей из различных комбинаций соединений R , L и C , называется *полной мощностью* (S) и измеряется в вольт-амперах (ВА). Она характеризует скорость поступления электрической энергии в данную цепь.

В табл.3.4 дана сводка формул для расчета активной, реактивной и полной мощностей всех цепей, рассмотренных в данной главе.

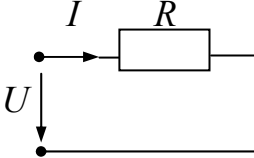
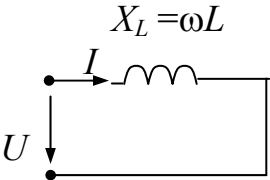
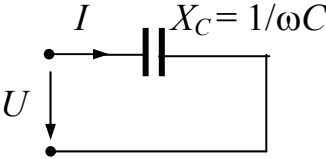
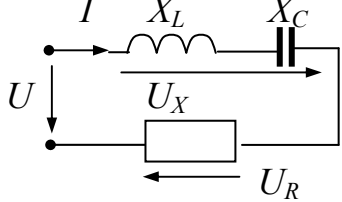
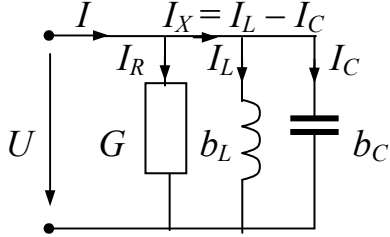
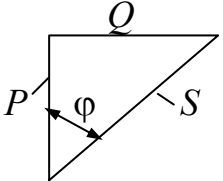
Заметим, что активная P , реактивная Q и полная S мощности соотносятся между собой как стороны прямоугольного треугольника. Такой прямоугольник показан в табл.3.4, поз.6. Для цепи с последовательным соединением R , L , C его легко получить, если все стороны треугольника напряжений (рис.3.9,в)

* Формулы для определения резонансной частоты цепей с параллельным и последовательным соединением R , L , C одинаковы.

умножить на действующее значение тока I цепи. Для цепи с параллельным соединением RLC треугольник мощностей получается, если все стороны треугольника токов (рис.3.12,в) умножить на действующее значение U приложенного напряжения.

Т а б л и ц а 3.4

Активная P , реактивная Q и полная S мощности цепей

№ п/п	Схемы цепей	Расчетные формулы	Ед. изм.
1		$P = UI = I^2 R = U^2 G,$ где $G = 1/R$	Вт
2		$Q_L = UI = I^2 X_L = U^2 b_L,$ где $b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$	вар
3		$Q_C = UI = I^2 X_C = U^2 b_C,$ где $b_C = 1/X_C = \omega C$	вар
4		$P = U_R I = I^2 R$ $Q = U_X I = I^2 X = I^2 (X_L - X_C)$ $S = UI = I^2 z,$ где $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Вт вар ВА
5		$P = UI_R = U^2 G$ $Q = UI_X = U^2 (b_L - b_C)$ $S = UI = U^2 y,$ где $y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2}$	Вт вар ВА
6		$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$ $P = S \cos \varphi$ $Q = S \sin \varphi,$ где $\varphi = \arctg Q/S = \arccos P/S$	ВА Вт вар

3.15. Понятие о коэффициенте мощности и коэффициенте полезного действия

В энергетике широко распространено понятие о коэффициенте мощности цепи, под которым понимают отношение ее активной мощности P к полной S . В соответствии с табл.3.4, поз.6 имеем

$$P / S = \cos \varphi . \quad (3.33)$$

Этот коэффициент показывает, какая доля полной мощности преобразуется в тепло и другие виды энергии. Энергетики стремятся эту долю свести к единице, т.е. иметь $P = S$ или $\cos \varphi = 1$, при котором угол φ сдвига фаз между напряжением и током цепи равен нулю. Иначе говоря, наиболее эффективным режимом работы цепи является резонанс токов. С этой целью на зажимы заводских и районных подстанций подключают батареи конденсаторов, подбирая их емкость так, чтобы в цепи имел место резонанс. Энергетики называют такие действия *компенсацией реактивной мощности*.

Не следует путать коэффициент мощности ($\cos \varphi$) и коэффициент полезного действия (η) электроустановок. Коэффициент мощности показывает, какая доля полной мощности S источника преобразуется в активную мощность, а коэффициент полезного действия показывает, насколько эта активная мощность эффективно используется в конкретных электрических установках, например в электродвигателях.

Известно (рис.3.15), что мощность ($P_{ВЫХ}$), которую электродвигатель развивает на валу меньше потребляемой из сети активной мощности ($P_{ВХ}$) за счет внутренних потерь (ΔP) на нагрев обмоток и сердечников, трение в подшипниках, работу вентилятора.

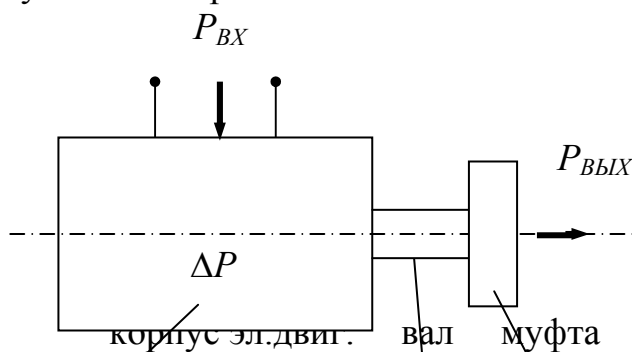


Рис.3.15

Коэффициент полезного действия электротехнической установки - это отношение активной мощности на ее выходе к активной мощности на входе. Измеряется он в относительных единицах (или в процентах) и всегда меньше единицы (меньше 100%).

$$\eta = \frac{P_{ВЫХ}}{P_{ВХ}} = \frac{P_{ВХ} - \Delta P}{P_{ВХ}} 100 < 100\% . \quad (3.34)$$

Коэффициент полезного действия мощных электродвигателей достигает 80% и более.

3.16. Примеры анализа и расчета цепей синусоидального тока с использованием векторных диаграмм

Пример 3.4. В цепи с последовательным соединением R , L и C (рис.3.9,а) известны действующие значения напряжений на всех трех ее элементах: $U_R =$

80 В; $U_L = 100$ В; $U_C = 40$ В. Требуется определить действующее значение напряжения U всей цепи.

Решение. В соответствии с формулой (3.20) имеем

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{80^2 + (100 - 40)^2} = 100 \text{ В.}$$

Пример 3.5. Даны пять схем (рис.3.16) электрических цепей и пять векторных диаграмм. Указать для каждой из схем ее векторную диаграмму.

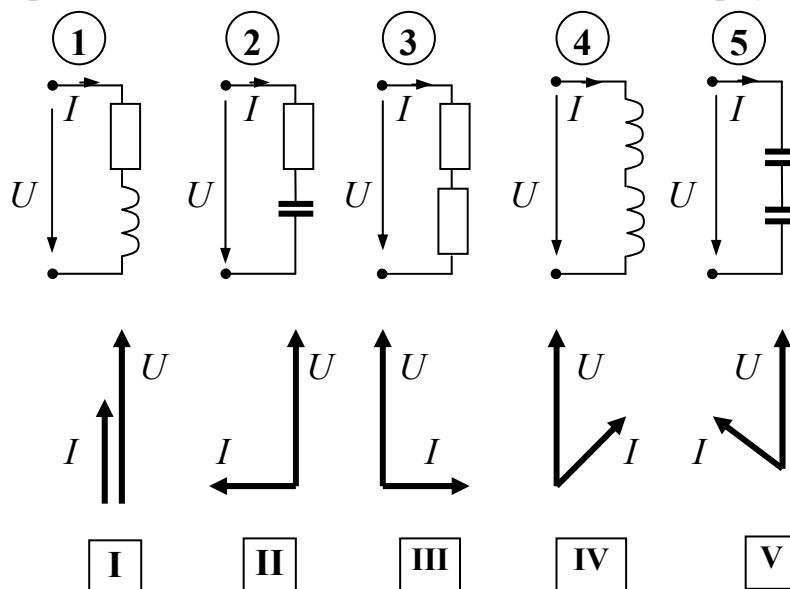
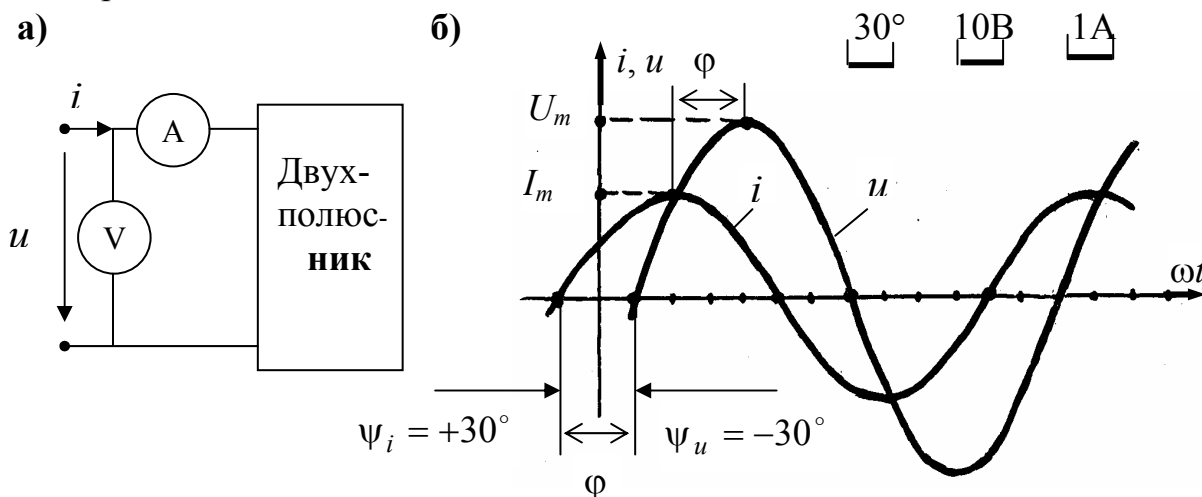


Рис.3.16

Решение. В соответствии с таблицами 3.1 и 3.2 имеем

1 → IV 2 → V 3 → I 4 → III 5 → II

Пример 3.6. На зажимах двухполюсника (рис.3.17,а) действуют синусоидальные ток и напряжение, график изменения которых во времени показан на рис. 3.17,б.



Требуется определить ψ_i и фаз между напряжением и током, характер цепи, показания электромагнитных амперметра и вольтметра.

Решение. Из графика на рис.3.17 видно, что ток опережает напряжение по фазе (его максимум наступает раньше) и при этом $\psi_i = +30^\circ$, а $\psi_u = -30^\circ$.

Угол сдвига фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = (-30^\circ) - (+30^\circ) = -60^\circ < 90^\circ$, поэтому цепь имеет активно-емкостной характер (ток опережает напряжение по фазе).

Для указанной цепи амплитуды тока и напряжения, взятые непосредственно из графика (с учетом принятых масштабов), составляют $I_m = 3$ А и $U_m = 50$ В. Их действующие значения определяются в соответствии с формулами (3.10) и (3.11) $I = I_m / \sqrt{2} = 3 / 1,41 = 2,12$ А;

$U = U_m / \sqrt{2} = 50 / 1,41 = 35,4$ В. Они и определяют показания амперметра и вольтметра.

Пример 3.7. Для цепи с последовательным соединением R и L (табл.3.2, поз.1) известно действующее значение приложенного напряжения $U = 100$ В и параметры последовательно соединенных элементов: $R = 6$ Ом; $L = 2,55$ мГн. Требуется определить действующее значение тока цепи и действующие значения напряжений на R и L , если частота цепи $f = 500$ Гц.

Решение. 1. Угловая частота цепи $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 500 = 3140$ 1/с.

2. Индуктивное сопротивление цепи $X_L = \omega L = 3140 \cdot 2,55 \cdot 10^{-3} = 8$ Ом.

3. Полное сопротивление цепи $z = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ Ом.

4. Общий ток цепи $I = U/z = 100/10 = 10$ А.

5. Напряжение на активном сопротивлении $U_R = IR = 60$ В.

6. Напряжение на индуктивном сопротивлении $U_X = IX = 10 \cdot 8 = 80$ В.

7. Проверку осуществляем в соответствии с формулой (3.20)

$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ В, что совпадает с напряжением цепи, заданным в условии примера. Таким образом, расчеты произведены верно.

Пример 3.8. Для цепи с параллельным соединением R , L , C (рис.3.12,а) известны действующие значения токов всех ветвей: $I_R = 3$ А; $I_L = 9$ А; $I_C = 5$ А. Требуется определить действующее значение тока всей цепи.

Решение. В соответствии с формулой (3.26) получаем

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{3^2 + (9 - 5)^2} = 5 \text{ А.}$$

Пример 3.9. В цепи с параллельным соединением R и C (табл.3.3, поз.2) известно приложенное напряжение $U = 100$ В и параметры параллельных ветвей: $R = 3,33$ Ом и $C = 25,4$ мкФ. Требуется определить действующие значения общего тока и токов в параллельных ветвях при частоте $f = 250$ Гц.

Решение. 1. Определяем угловую частоту: $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 250 = 1570$ 1/с.

2. Определяем активную проводимость цепи: $G = 1/R = 0,03$ См.

3. Определяем емкостную проводимость: $b_C = \omega C = 1570 \cdot 25,4 \cdot 10^{-6} = 0,04$ См.

4. Полная проводимость цепи $y = \sqrt{G^2 + b_C^2} = 0,05$ См.

5. Общий ток цепи $I = Uy = 100 \cdot 0,05 = 5$ А.

6. Ток в активном сопротивлении $I_R = UG = 100 \cdot 0,03 = 3$ А.

7. Ток в реактивном сопротивлении $I_X = Ub_C = 100 \cdot 0,04 = 4$ А.

Проверку решения осуществляем, используя формулу (3.26)

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_X^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ А.}$$

Полученный результат совпадает со значением тока I , найденным выше иным способом. Поэтому все расчеты выполнены правильно.

Заметим, что возможен и другой путь решения: вначале находим токи ветвей цепи $I_R = UG$ и $I_X = Ub_C$, а затем находим общий ток $I = \sqrt{I_R^2 + I_X^2}$.

Предоставляем студенту возможность провести такое решение самостоятельно.

Пример 3.10. Дана цепь с последовательным соединением двух емкостей (табл.3.2, поз.6). Известно, что $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ. Требуется определить емкость C_3 всей цепи.

Решение. При последовательном соединении емкостей реактивное сопротивление цепи $X_3 = X_{C1} + X_{C2}$ или $1/\omega C_3 = 1/\omega C_1 + 1/\omega C_2$. Сократив на $\omega \neq 0$ левую и правую части этого уравнения, получаем $1/C_3 = 1/C_1 + 1/C_2$.

Отсюда следует, что $C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{6}{5} = 1,2$ мкФ.

Пример 3.11. Дана цепь с параллельным соединением L и C (табл.3.3, поз.3). Известна величина индуктивности $L = 0,796$ мГн. Требуется определить величину емкости C , при которой цепь не пропустит через себя ток с частотой $f = 1000$ Гц.

Решение. Цепь с параллельным соединением L и C (поз.3 в табл.3.3) обладает нулевой проводимостью при резонансе токов. Воспользовавшись резонансным уравнением этой цепи в соответствии с формулой (3.31), получаем

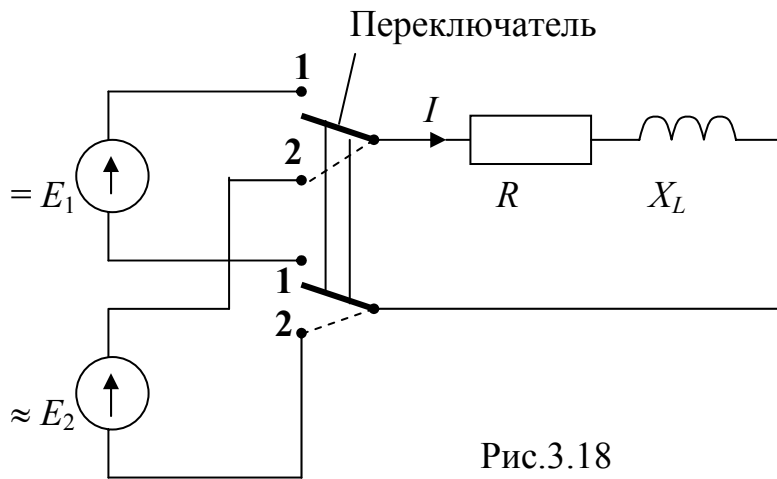
$$C_{PE3} = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = 0,00003185 \text{ Ф или } C = 31,85 \text{ мкФ.}$$

Заметим, что рассмотренная в этом примере цепь является составной частью многих электрических фильтров.

Пример 3.12. Цепь с последовательным соединением R и X_L (рис.3.18) была подключена к источнику постоянного напряжения с ЭДС $E_1 = 120$ В (контакты 1) и ток цепи составил $I_1 = 4$ А. Затем цепь была переключена на источник синусоидального напряжения с действующим значением ЭДС $E_2 = 120$ В (контакты 2) и частотой $f = 150$ Гц. При этом действующее значение тока оказалось равным $I_2 = 2,4$ А. Определить сопротивления R и X_L цепи.

Решение. При подключении цепи к постоянной ЭДС E_1 в ней действует только сопротивление R (2.1): $R = E_1 / I_1 = 120 / 4 = 30$ Ом. При подключении цепи к источнику синусоидального напряжения в цепи действует как активное сопротивление R , так и индуктивное сопротивление X_L *. Полное сопротивление такой цепи в соответствии с формулой (3.21) $z = E_2 / I_2 = 120 / 2,4 = 50$ Ом. Оно связано с активным и реактивным сопротивлениями соотношением (3.22) $z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Отсюда $X = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = 40$ Ом.

* При относительно низких частотах активное сопротивление цепи равно ее сопротивлению постоянному току.



1-1 Клеммы источника
постоянного
напряжения
2-2 Клеммы источника
синусоидального
напряжения

Рис.3.18

Пример 3.13. Дана цепь с параллельным соединением R , L и C (рис.3.12,а). Параметры цепи известны: $R = 5$ Ом, $L = 0,796$ мГн, $C = 31,85$ мкФ. Как изменится резонансная частота цепи, если сопротивление R увеличить в два раза?

Решение. В цепи с параллельным (также и с последовательным) соединением R , L и C резонансная частота не зависит от сопротивления R и в соответствии с формулой (3.32) составляет

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,796 \cdot 10^{-3} \cdot 31,85 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{1,59 \cdot 10^{-4}} = 6280 \frac{1}{с}$$

$$\text{или } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{6280}{6,28} = 1000 \text{ Гц.}$$

Пример 3.14. Дана цепь с последовательным соединением L и C (табл.3.2, поз.3). Известна величина емкости $C = 15,92$ мкФ. Требуется найти такую величину индуктивности L , при которой цепь пропускает ток с частотой $f = 2000$ Гц без сопротивления.

Решение. Цепь с последовательным соединением L и C ($R = 0$) в соответствии с формулой (3.22) обладает нулевым сопротивлением при резонансе напряжений, так как $X_L = X_C$. В соответствии с формулой (3.24) получаем

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2 \cdot 3,14 \cdot 2000)^2 \cdot 15,92 \cdot 10^{-6}} = 0,000398 \text{ Гн} \text{ или } L = 0,398 \text{ мГн.}$$

Заметим, что рассмотренная в этом примере цепь является составной частью многих электрических фильтров.

Пример 3.15. К цепи с последовательным соединением R , L и C (рис.3.9,а) приложено синусоидальное напряжение с частотой $f = 50$ Гц и действующим значением $U = 380$ В. Сопротивление цепи $R = 5$ Ом, индуктивность цепи $L = 31,9$ мГн. Требуется найти величину емкости C для получения резонанса напряжений и определить, будет ли при таком резонансе перенапряжение на индуктивности.

Решение. 1. Находим величину емкости для получения резонанса, воспользовавшись формулой (3.24),

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(314)^2 \cdot 31,9 \cdot 10^{-3}} = 0,00031794 \text{ Ф или } C = 317,94 \text{ мкФ.}$$

2. Емкостное и индуктивное сопротивления цепи при резонансе $X_C = X_L = \omega \cdot L = 314 \cdot 31,9 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом.}$

3. Действующее значение тока цепи при резонансе $I = U/R = 380/5 = 76 \text{ А.}$

4. Напряжение на индуктивности при резонансе $U = IX_L = 76 \cdot 10 = 760 \text{ В.}$ Это напряжение в два раза больше приложенного. Таким образом, на индуктивности имеет место перенапряжение. Этого и следовало ожидать, поскольку при резонансе

$$\frac{U_L}{U_R} = \frac{I X_L}{I R} = \frac{X_L}{R} = \frac{10}{5} = 2.$$

Пример 3.16. Цепь с параллельным соединением R и L (модель промышленного предприятия) подключена к цепи синусоидального тока с частотой $f = 50 \text{ Гц}$ (рис.3.19,а). Показания амперметра, вольтметра и ваттметра известны: $U = 220 \text{ В}$; $I = 100 \text{ А}$; $P = 11 \text{ кВт}$. Требуется определить емкость батареи конденсаторов, которую надо подключить параллельно указанной цепи для достижения резонансов токов.

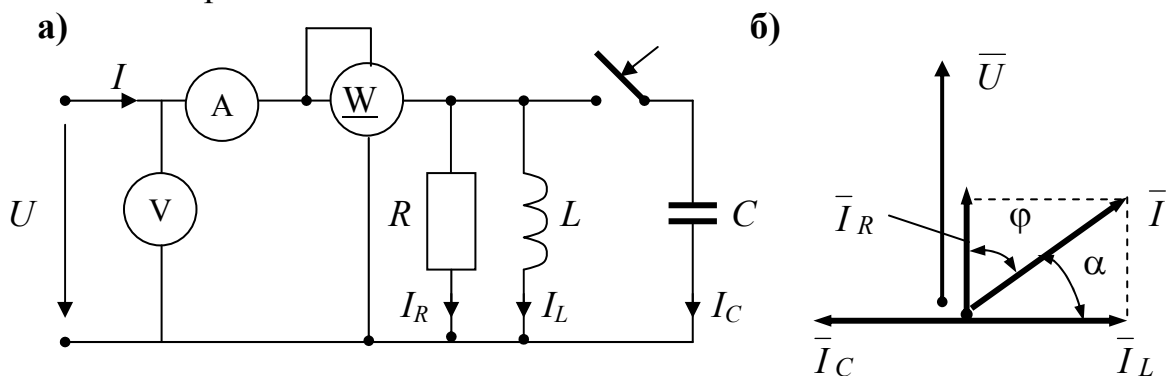


Рис.3.19

Решение.1. Данная цепь имеет индуктивный характер и, следовательно, ток в ней отстает по фазе от приложенного напряжения. Угол сдвига фаз определяем из треугольника мощностей в соответствии с формулой (3.33)

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} \text{ или } \varphi = \arccos \frac{11000}{220 \cdot 100} = \arccos 0,5 = 60^\circ.$$

2. Вектор тока цепи $\bar{I}$ (как это видно из векторной диаграммы, показанной на рис.3.19,б) имеет две составляющие: активную $\bar{I}_R$, совпадающую по фазе с вектором $\bar{U}$ и индуктивную $\bar{I}_L$, отстающую от $\bar{U}$ на 90° . Для достижения резонанса необходимо так подобрать емкость батареи конденсаторов, чтобы действующее значение тока этой батареи I_C было бы равно действующему значению индуктивной составляющей I_L общего тока I : $I_C = I_L = I \cos \alpha = I \sin \varphi = I \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,87 = 87 \text{ А.}$

При этих условиях сопротивление батареи конденсаторов синусоидальному току: $X_C = U/I_C = 220/87 = 2,53 \text{ Ом.}$ Тогда емкость батареи конденсаторов при резонансе токов

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{314 \cdot 2,53} = 0,0012588 \text{ Ф} \text{ или } C = 1258,8 \text{ мкФ}.$$

Пример 3.17. Дана цепь с последовательно-параллельным соединением R , L и C (рис.3.20,а). Сопротивления всех элементов цепи известны: $R = 40 \text{ Ом}$; $X_C = 30 \text{ Ом}$; $X_L = 30 \text{ Ом}$. Известны также показания вольтметра электромагнитной системы, включенного между узлами 1 и 2 : $U_{23} = 120 \text{ В}$.

Требуется определить показания всех остальных измерительных приборов электромагнитной системы, включенных в цепь.

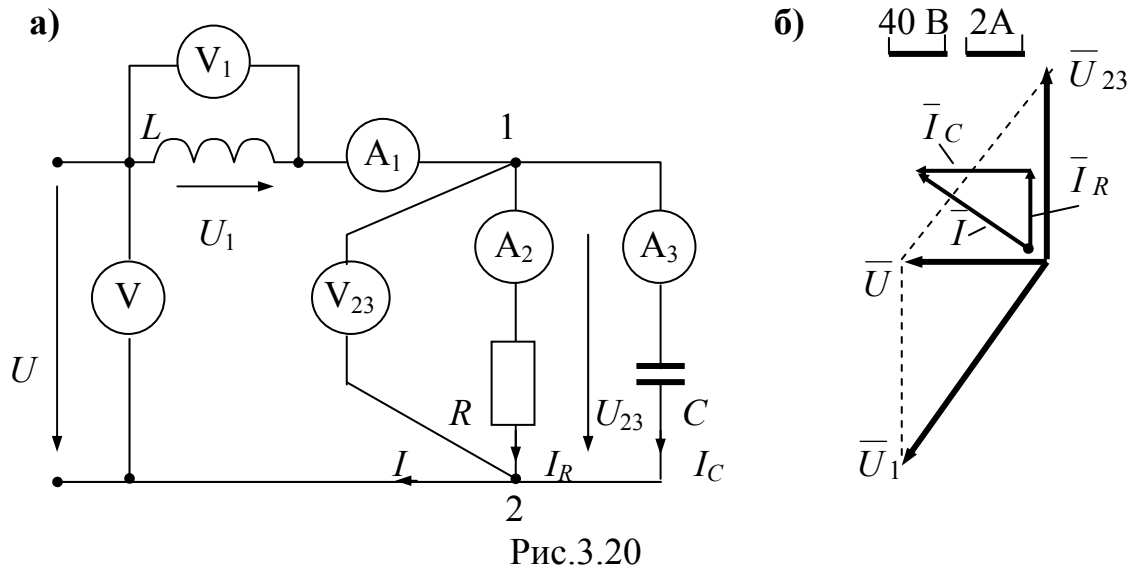


Рис.3.20

Решение. 1. При известном действующем значении напряжения на параллельном участке цепи, действующие значения токов в активном и емкостном сопротивлениях определяются по Закону Ома (табл.3.1 поз.1 и 3),

$$I_R = \frac{U_{23}}{R} = \frac{120}{40} = 3 \text{ А}; \quad I_C = \frac{U_{23}}{X_C} = \frac{120}{30} = 4 \text{ А}.$$

Эти значения токов соответствуют показаниям амперметров, соответственно A_2 и A_3 .

2. Действующее значение общего тока двух параллельно включенных сопротивлений R и X_C (табл.3.3, поз.2) $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ А}$. Эта величина соответствует показанию амперметра A_1 .

3. Действующее значение напряжения U_1 на индуктивности L : $U_1 = IX_L = 5 \cdot 30 = 150 \text{ В}$. Оно соответствует показанию вольтметра V_1 .

4. Для определения показания вольтметра V необходимо рассчитать действующее значение напряжения всей цепи U . Его можно найти, используя второй закон Кирхгофа для левого контура цепи в векторной форме записи: $\bar{U}_1 + \bar{U}_{23} - \bar{U} = 0$ или $\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_{23}$. Длина вектора $\bar{U}$, т.е. действующее значение этого напряжения и будет являться показанием вольтметра V .

Для определения величины U нельзя применить теорему Пифагора, поскольку треугольник напряжений не является прямоугольным. Надо построить (в выбранном масштабе) векторную диаграмму цепи (рис.3.20,б) и

после этого с помощью мерной линейки измерить длину вектора $\bar{U}$. Таким образом узнаем показание вольтметра V.

Построение векторной диаграммы начинаем с вектора напряжения $\bar{U}_{23}$, направив его (произвольно) вертикально вверх. Вектор $\bar{I}_R$ совпадает с вектором напряжения $\bar{U}_{23}$ по фазе, поэтому откладываем его параллельно ему. Вектор $\bar{I}_C$ откладываем к вектору $\bar{U}_{23}$ под углом 90° против часовой стрелки (табл.3.1, поз.3). Сумма векторов $\bar{I}_R + \bar{I}_C$ определяет положение вектора $\bar{I}$. Вектор напряжения $\bar{U}_1$ откладываем от вектора $\bar{I}$ под углом 90° против часовой стрелки (табл. 3.1, поз.2). Зная положение векторов $\bar{U}_{23}$ и $\bar{U}_1$, находим суммарный вектор $\bar{U}$, длина которого и определяет показание вольтметра V. Измеряя его длину $\bar{U}$ мерной линейкой, находим, что $U=90$ В.

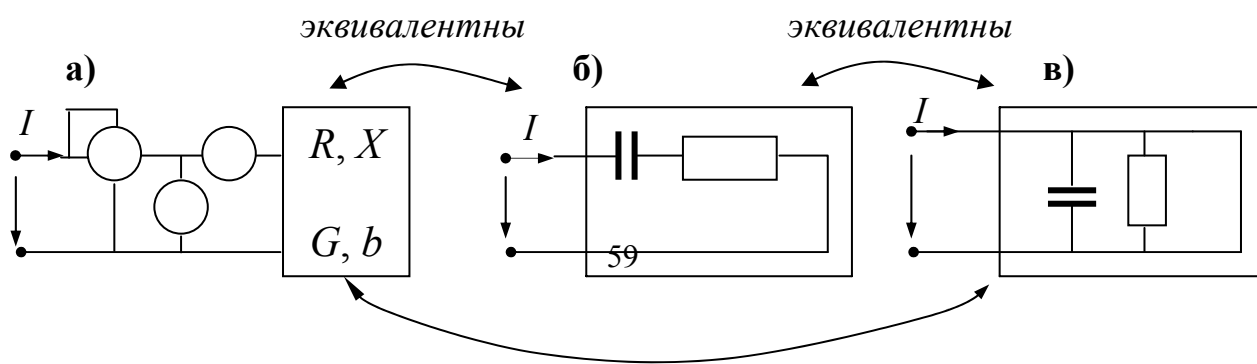
Заметим, что аналитический расчет разветвленных цепей при смешанном соединении R , L и C с помощью теоремы Пифагора практически невозможен, так как треугольники токов напряжений в общем случае не являются прямоугольными. Требуются иные подходы, и важнейшим из них является символический метод, рассмотрению которого посвящена следующая глава.

3.17. Понятие о двухполюсниках и об эквивалентных цепях

Двухполюсником называется электрическая цепь любой сложности, имеющая два выходных зажима. Двухполюсник является *активным*, если содержит внутри себя источников энергии, и *пассивным*, - если не содержит. Заметим, что все рассмотренные нами ранее электрические цепи были пассивными двухполюсниками.

Два или несколько двухполюсников являются *эквивалентными* (равноценными), если на их зажимах одинаковы синусоиды тока и синусоиды напряжения (иначе говоря, внешние характеристики цепи должны остаться неизменными). Эти условия означают, что на зажимах всех эквивалентных двухполюсников одинаковы действующие значения токов, напряжений и углы сдвига фаз между напряжением и током. Такие двухполюсники можно заменять друг на друга без изменения режима работы остальной цепи. Из этого положения, в частности, следует, что пассивный двухполюсник любой сложности можно эквивалентно заменить простейшей цепью с последовательным или параллельным соединением активного и реактивного сопротивлений, как это показано на рис.3.21. Такие преобразования широко используются в теоретической электротехнике для упрощения расчетов сложных цепей.

Если двухполюсник, показанный на рис.3.21 эквивалентен по отдельности схемам (б) и (в), то эти схемы также эквивалентны друг другу.



U, φ $U, \varphi \quad X \quad R$ $U, \varphi \quad b \quad G$

эквивалентны

Рис.3.21

Пример 3.18. На зажимах пассивного двухполюсника (рис.3.21,а) известны мгновенные значения напряжения и тока:

$$u = 282 \sin(628t + 30^\circ) \text{ В}; \quad i = 14,1 \sin(628t + 70^\circ) \text{ А}.$$

Требуется определить: а) показания электромагнитных амперметра и вольтметра, включенных на входе двухполюсника; б) угол сдвига фаз между напряжением и током; в) активное, реактивное и полное сопротивления двухполюсника; г) активную, реактивную и полную проводимости двухполюсника; д) активную, реактивную и полную мощности двухполюсника.

Решение. а) Для определения показаний амперметра и вольтметра находим действующее значение тока и напряжения, воспользовавшись формулами (3.10) и (3.11)

$$U = U_m / \sqrt{2} = 282 / 1,41 = 200 \text{ В}; \quad I = I_m / \sqrt{2} = 14,1 / 1,41 = 10 \text{ А}.$$

Эти величины соответствуют показаниям вольтметра и амперметра.

б) Угол сдвига фаз φ между напряжением и током определяется в соответствии с формулой (3.8) $\varphi = \psi_u - \psi_i = (+30^\circ) - (+70^\circ) = -40^\circ$. Знак $(-)$ показывает, что цепь имеет емкостной характер.

в) Полное сопротивление двухполюсника определяется формулой (3.2) $z = U/I = 200/10 = 20 \text{ Ом}$. При этом (рис.3.9,г) его активное сопротивление $R = z \cos\varphi = 20 \cdot \cos 40^\circ = 20 \cdot 0,77 = 15,3 \text{ Ом}$, реактивное сопротивление $X = z \sin\varphi = 20 \cdot \sin 40^\circ = 20 \cdot 0,64 = 12,8 \text{ Ом}$. Заметим, что, определяя активное, реактивное и полное сопротивления двухполюсника, мы фактически определяем параметры эквивалентной ему последовательной цепи (рис.3.21,б).

г) Полная проводимость двухполюсника определяется формулой (3.27) $y = I/U = 10/200 = 0,05 \text{ См}$. При этом (рис.3.12,г) его активная проводимость $G = y \cos\varphi = 0,05 \cdot \cos 40^\circ = 0,05 \cdot 0,77 = 0,038 \text{ См}$, а реактивная проводимость $b = y \sin\varphi = 0,05 \cdot 0,64 = 0,032 \text{ См}$. Заметим, что, определяя активную, реактивную и полную проводимости двухполюсника, мы фактически находим параметры эквивалентной ему параллельной цепи (рис.3.21,в).

д) Полная мощность цепи (табл.3.4, поз.6) $S = UI = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ ВА}$; активная мощность $P = S \cos\varphi = 2000 \cdot \cos 40^\circ = 2000 \cdot 0,77 = 1540 \text{ Вт}$; реактивная мощность $Q = S \sin\varphi = 2000 \cdot \sin 40^\circ = 2000 \cdot 0,64 = 1280 \text{ вар}$.

Пример 3.19. У двухполюсника (рис.2.22,а) известна векторная диаграмма (рис.3.22,б): $U=220 \text{ В}$, $I=11 \text{ А}$, $\varphi = +30^\circ$. Цепь (рис.3.22,а) имеет индуктивный характер. Частота цепи $f=50 \text{ Гц}$. Требуется записать ток и напряжение двухполюсника в виде синусоидальных функций времени.

Решение. Начальные фазы тока и напряжения данной цепи неизвестны. Их величины зависят от выбора положения полярной оси Р на плоскости (т.е. фактически от выбранной точки отсчета времени).

а) Если совместить полярную ось (P_1) с вектором тока $\bar{I}$, то тогда $\psi_i = 0$ и в соответствии с формулой (3.8) $\psi_u = \psi_i + \varphi = 0 + 30^\circ = 30^\circ$.

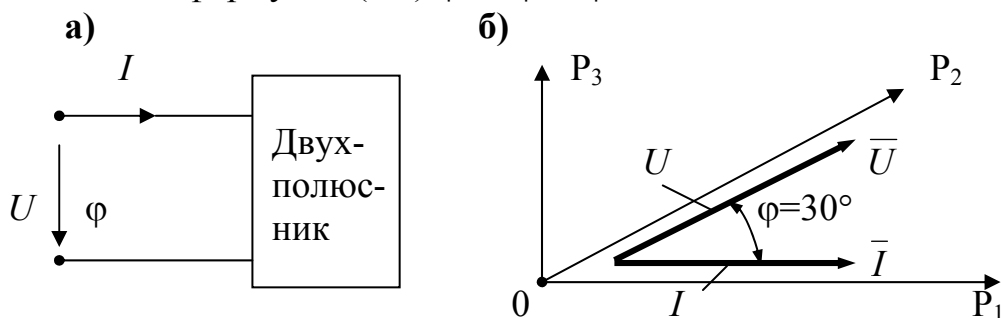


Рис.3.22

Тогда $i = 11\sqrt{2} \sin(\omega t + 0) = 15,6 \sin(314 t) \text{ A}$,

$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_u) = 311 \sin(314 t + 30^\circ) \text{ В}$.

Здесь $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 50 = 314 \text{ 1/с}$.

б) Если совместить полярную ось (P_2) с вектором напряжения $\bar{U}$, то тогда $\psi_u = 0$, а $\psi_i = \psi_u - \varphi = -30^\circ$ и, следовательно: $i = 15,6 \sin(314 t - 30^\circ) \text{ A}$; $u = 311 \sin 314 t \text{ В}$.

в) Если расположить полярную ось (P_3) под углом 90° по отношению к вектору тока $\bar{I}$ против часовой стрелки, то получим $\psi_u = -60^\circ$, а $\psi_i = -90^\circ$ и, следовательно: $i = 15,6 \sin(314 t - 90^\circ) \text{ A}$; $u = 311 \sin(314 t - 60^\circ) \text{ В}$.

Таким образом, один и тот же физический процесс можно записать с различными начальными фазами, в зависимости от выбора положения полярной оси на плоскости. Однако во всех случаях угол сдвига фаз между напряжением и током цепи остался неизменным: $\varphi = \psi_u - \psi_i = +30^\circ$.

Пример 3.20. На зажимах активно-емкостного двухполюсника измерены действующие значения тока и напряжения, а также активная мощность: $I = 10 \text{ A}$, $U = 200 \text{ В}$, $P = 1000 \text{ Вт}$. Требуется определить активное и реактивное сопротивления его эквивалентной последовательной цепи (рис.3.21,б).

Решение. Исходные формулы: $P = I^2 R$, $z = U/I = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Активное сопротивление цепи $R = P/I^2 = 1000/100 = 10 \text{ Ом}$.

Полное сопротивление цепи $z = U/I = 200/10 = 20 \text{ Ом}$.

Емкостное сопротивление $X = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17,3 \text{ Ом}$.

3.18. Дополнительные задания к главе 3. Вопросы и примеры для самотестирования

1. Известен ток и напряжение на зажимах некоторого двухполюсника

$u = 282 \sin(942 t - 20^\circ)$ В; $i = 14,1 \sin(942 t - 50^\circ)$. Каков характер цепи этого двухполюсника?

Ответ: активно-емкостной.

2. Для цепи, показанной на рис.3.9,а, известны действующие значения напряжений $U_R = 3$ В, $U_L = 7$ В и $U = 5$ В. Определить действующее значение напряжения на емкости.

Ответ: $U_C = 3$ В.

3. Для цепи, представленной на рис.3.12,а, известны действующие значения токов $I = 5$ А, $I_R = 3$ А, $I_L = 9$ А. Определить действующее значение тока в емкости.

Ответ: $I_C = 5$ А.

4. Для цепи, представленной в табл.3.2, поз.1, известны $U = 10$ В, $R = 3$ Ом, $X = 4$ Ом. Определить активную, реактивную и полную мощности цепи.

Ответы: $P = 12$ Вт; $Q = 16$ вар; $S = 20$ ВА.

5. В условиях примера 3.20 определить активную и реактивную проводимость эквивалентной двухполюснику параллельной цепи.

Ответы: $G = 0,025$ См; $b = 0,0433$ См.

6. Определить величину емкости цепи C_3 , представленной в табл.3.2, поз.6, если $C_1 = 4$ мкФ, $C_2 = 6$ мкФ.

Ответ: $C_3 = 2,4$ мкФ.

7. Определить величину индуктивности цепи L_3 , представленной в табл.3.3, поз.5, если $L_1 = 6$ мГн, $L_2 = 6$ мГн.

Ответ: $L_3 = 3$ мГн.

8. На зажимах активно-индуктивного двухполюсника известны действующие значения тока, напряжения и угол сдвига фаз между ними $U = 200$ В, $I = 10$ А, $\varphi = 30^\circ$. Определить активное и индуктивное сопротивления последовательной цепи, эквивалентной этому двухполюснику.

Ответы: $R = 17,3$ Ом; $X_L = 10$ Ом.

9. На зажимах активно-индуктивного двухполюсника известны действующие значения тока, напряжения и угол сдвига фаз между ними $U = 200$ В, $I = 10$ А, $\varphi = 30^\circ$. Определить активную и индуктивную проводимости параллельной цепи, эквивалентной этому двухполюснику.

Ответы: $G = 0,043$ См; $b_L = 0,025$ См.

10. Ответить на вопросы 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 9 любого из шести вариантов раздела 2 сборника тестовых карт [6].

11. Ответить на вопросы 7, 8, 9 и 10 любого из шести вариантов раздела 3 сборника тестовых карт [6].

Глава 4

Символический метод. Расчет разветвленных цепей с одним источником. Эквивалентные преобразования

4.1. Введение. Основы метода

Расчет разветвленных цепей синусоидального тока с помощью векторных диаграмм весьма затруднен (пример 3.17), поскольку треугольники токов и напряжений не являются (как правило) у таких цепей прямоугольными и теорема Пифагора к ним не применима. Выход из этих затруднений состоит в том, что геометрическое сложение векторов токов и векторов напряжений можно заменить алгебраическим сложением проекций их декартовых координат.

Пример 4.1. В условиях примера 3.2 определить ток в неразветвленной части цепи, не производя графического сложения векторов $\bar{I}_{m1}$ и $\bar{I}_{m2}$, как это сделано на рис.3.4.

Решение. Введем в рассмотрение декартовы координаты, сориентировав их оси относительно полярной оси так, как это показано на рис.4.1 (полярную ось Р совмещаем с осью x декартовых координат).

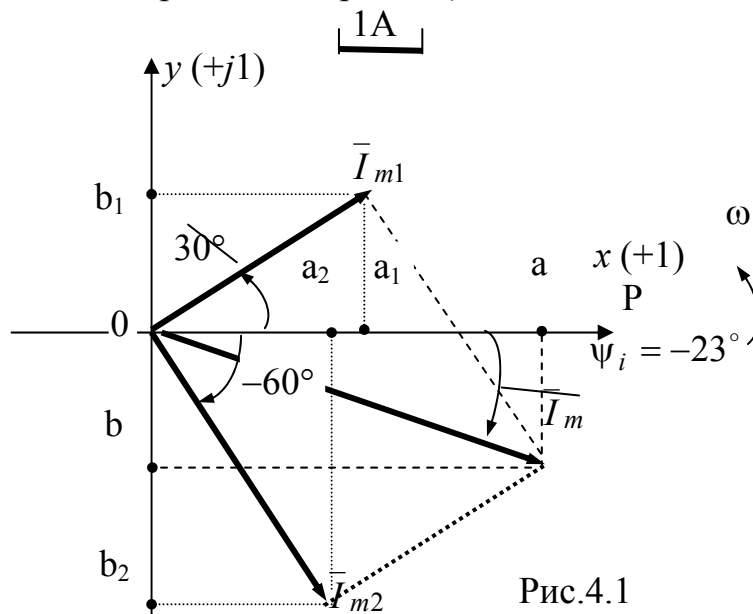


Рис.4.1

Ось абсцисс x декартовых координат совместим с полярной осью P , начало декартовых координат с полюсом 0 , а ось ординат y расположим под 90° к оси x против часовой стрелки. Тогда проекции векторов $\bar{I}_{m1}$ и $\bar{I}_{m2}$ на оси координат составят:

$$\begin{aligned} a_1 &= I_{m1} \cos \psi_{i1} = 3 \cos 30^\circ = 2,6; & b_1 &= I_{m1} \sin \psi_{i1} = 3 \sin 30^\circ = 1,5; \\ a_2 &= I_{m2} \cos \psi_{i2} = 4 \cos (-60)^\circ = 2; & b_2 &= I_{m2} \sin \psi_{i2} = 4 \sin (-60)^\circ = -3,46. \end{aligned}$$

Для определения проекций суммарного вектора $\bar{I}_m$ надо найти сумму проекций векторов $\bar{I}_{m1}$ и $\bar{I}_{m2}$ по оси абсцисс и по оси ординат:

$$a = a_1 + a_2 = 2,6 + 2 = 4,6; \quad b = b_1 + b_2 = 1,5 - 3,46 = -1,96.$$

Тогда амплитуда суммарного тока (длина вектора $\bar{I}_m$)
 $I_m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4,6^2 + 1,96^2} = \sqrt{25} = 5$, а начальная фаза суммарного тока
 (рис.4.1) $\psi_i = \arctg \frac{-b}{a} = \arctg(-0,426) = -23^\circ$.

Заметим, что полученные здесь результаты в точности совпадают с результатами графического решения примера 3.2.

Если проекции a и b каждого из векторов объединить вместе и записывать в виде комплексного числа, то тогда вместо геометрического сложения векторов достаточно алгебраически сложить комплексные числа, определяющие положения этих векторов на плоскости.

Принято ось x считать осью вещественных чисел и обозначать $(+1)$, а ось y – осью мнимых чисел и обозначать $(+j1)$, как это указано на рис.4.1. Тогда координаты векторов по оси x будут являться вещественными частями комплексных чисел, а координаты векторов по оси y – мнимыми частями комплексных чисел. При таких условиях вектор $\bar{I}_{m1}$ записывается в виде комплексного числа $\dot{I}_{m1} = a_1 + jb_1 = 2,6 + j1,5$, а вектор $\bar{I}_{m2}$ – в виде комплексного числа $\dot{I}_{m2} = a_2 + jb_2 = 2 - j3,46$. Сумма этих комплексных чисел определяет координаты суммарного вектора

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 - b_2) = a + jb = 4,6 - j1,96.$$

Таковы исходные положения символического метода. Он позволяет заменить геометрические действия с векторами токов и напряжений алгебраическими действиями с комплексными числами. При этом следует всегда помнить, что каждому вектору на плоскости соответствует комплексное число, а каждому комплексному числу соответствует вектор на плоскости.

Рассмотрев ниже символический метод, убедимся в том, что все его формулы окажутся внешне тождественными расчетным формулам цепей постоянного тока (глава 2 настоящего пособия), что значительно упрощает освоение этого метода.

Применяя символический метод, будем пользоваться всеми известными из курса математики правилами действия с комплексными числами. Сводка наиболее важных из них представлена в табл.4.1.

Главными положениями символического метода являются понятия о комплексных токах и напряжениях, о комплексном сопротивлении, комплексной проводимости и комплексной мощности.

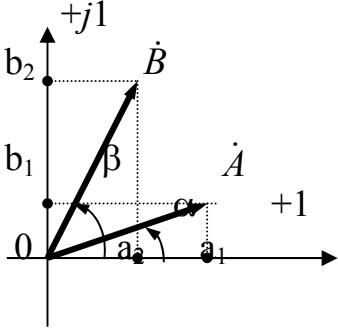
4.2. Комплексные токи и напряжения

Положение векторов токов и напряжений на комплексной плоскости, совмещенной с полярной системой координат (4.1), показано на рис.4.2. Здесь:

$\dot{U}$ – комплексное действующее значение напряжения (сокращенно – комплексное напряжение); $\dot{I}$ – комплексное действующее значение тока (сокращенно – комплексный ток).

Т а б л и ц а 4.1

**Основные действия с комплексными числами применительно
к синусоидальным функциям времени**

Графическое изображение и формулы перехода	№ п/п	Аналитическая запись комплексных чисел и правила основных действий с ними	
 переход от показательной к алгебраической форме записи $a_1 = A \cos \alpha$ $b_1 = A \sin \alpha$ переход от алгебраической к показательной форме записи $A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ $\alpha = \arctg \frac{b_1}{a_1}$	1	Показательная форма $\dot{A}$ и $\dot{B}$	$\dot{A} = Ae^{j\alpha}; \quad \dot{B} = Be^{j\beta}$
	2	Алгебраическая форма $\dot{A}$ и $\dot{B}$	$\dot{A} = a_1 + jb_1; \quad \dot{B} = a_2 + jb_2$
	3	Число $\dot{A}$ сопряженное $\dot{A}$	$\dot{A}^* = Ae^{-j\alpha} = a_1 - jb_1$
	4	Сложение и вычитание $\dot{A}$ и $\dot{B}$	$\dot{A} \pm \dot{B} = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$
	5	Умножение $\dot{A}$ на $\dot{B}$	$\dot{A}\dot{B} = ABe^{j(\alpha+\beta)}$ или $\dot{A}\dot{B} = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) =$ $= a_1a_2 + jb_1a_2 + jb_2a_1 - b_1b_2$
	6	Умножение $\dot{A}$ на самоё себя	$\dot{A}\dot{A} = (a_1 + jb_1)(a_1 + jb_1) =$ $= a_1^2 + 2ja_1b_1 - b_1^2$
	7	Умножение $\dot{A}$ на сопряженное комплексное число $\dot{A}^*$	$\dot{A}\dot{A}^* = Ae^{j\alpha} \cdot Ae^{-j\alpha} =$ $= (a_1 + jb_1)(a_1 - jb_1) = a_1^2 + b_1^2$
	8	Деление $\dot{A}$ на $\dot{B}$	$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}$ или $\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \left(\frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} \right) =$ $= \frac{a_1a_2 + jb_1a_2 - jb_2a_1 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$
Некоторые широко используемые формулы: $j1 = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1; \quad e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha; \quad e^{\pm j90^\circ} = \pm j1; \quad e^{\pm j180^\circ} = -1;$ $e^{\pm j270^\circ} = \mp j1; \quad e^{\pm j360^\circ} = 1; \quad \frac{1}{e^{\pm j\alpha}} = e^{\mp j\alpha}; \quad \frac{1}{\pm j} = \mp j1.$			

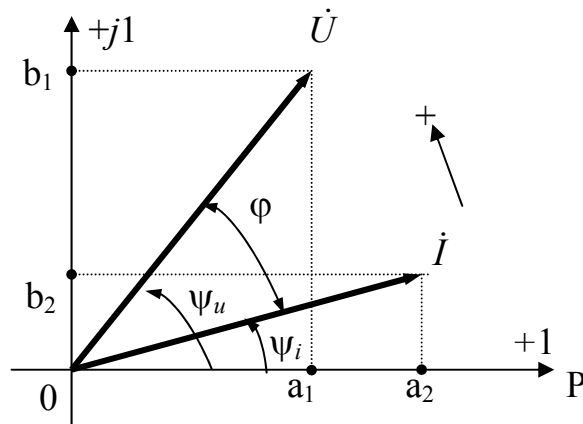


Рис.4.2

Аналитическая запись $\dot{U}$ и $\dot{I}$ имеет вид

$$\dot{U} = a_1 + jb_1 = Ue^{j\psi_u}; \quad \dot{I} = a_2 + jb_2 = Ie^{j\psi_i}. \quad (4.1)$$

Левая часть этих формул представляет собой *алгебраическую форму записи* комплексных тока и напряжения, а правая часть – *показательную форму записи*. В этих формулах: a_1 и a_2 – вещественные части комплексных величин; b_1 и b_2 – мнимые части комплексных величин; U и I – модули комплексных величин (действующие значения); ψ_u и ψ_i – аргументы комплексных величин (начальные фазы). Заметим, что складывать и вычитать комплексные токи или комплексные напряжения удобно в алгебраической форме записи, а умножать и делить – в показательной форме.

Пример 4.2. Известен комплексный ток $\dot{I}$ двухполюсника, показанного на рис.4.3,а: $\dot{I} = (8+j6)$. Требуется записать этот ток в показательной форме.

Решение. В соответствии с формулой (4.1) и табл.4.1 имеем: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$, где

$$I = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ А}; \quad \psi_i = \arctg \frac{+6}{8} = \arctg(+0,75) = +37^\circ.$$

Таким образом: $\dot{I} = 10e^{j37^\circ}$. Положение этого вектора на комплексной плоскости показано на рис.4.3,б.

Пример 4.3. Известно комплексное напряжение двухполюсника, показанного на рис.4.3,а: $\dot{U} = 220 e^{-j23^\circ}$ В. Требуется записать это напряжение в алгебраической форме.

Решение. В соответствии с формулой (4.1) и табл.4.1 имеем $\dot{U} = a + jb$, где

$$a = U \cos \psi_u = 220 \cdot \cos(-23^\circ) = 202 \text{ В};$$

$$b = U \sin \psi_u = 220 \cdot \sin(-23^\circ) = -86 \text{ В. Таким образом } \dot{U} = (202 - j86) \text{ В.}$$

Положение этого вектора показано на рис.4.3,б.

Пример 4.4. Известны комплексное напряжение и комплексный ток на зажимах двухполюсника, изображенного на рис.4.3,а: $\dot{U} = 30 + j40$ В; $\dot{I} = 4 + j1$ А. Требуется определить: а) показания электромагнитных амперметра

и вольтметра *; б) угол сдвига фаз φ между напряжением и током; в) построить векторную диаграмму двухполюсника на комплексной плоскости.

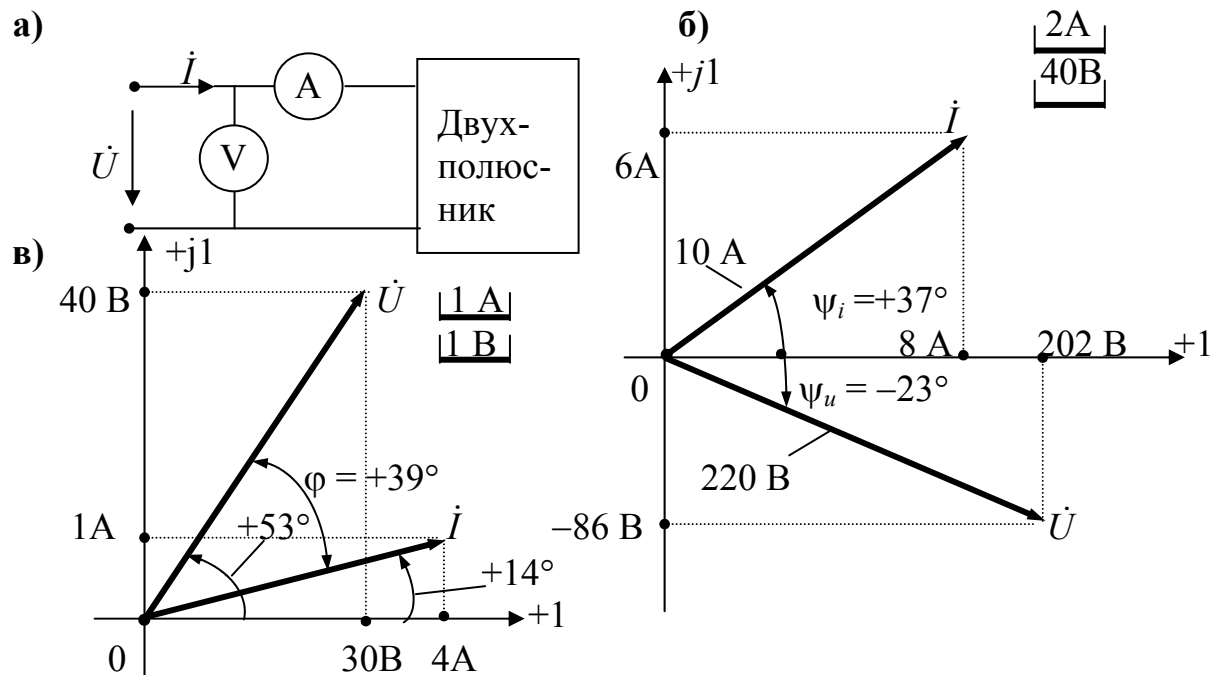


Рис.4.3

Решение.

а) Переведем комплексные напряжения и ток в показательную форму записи, используя данные табл.4.1:

$$\dot{U} = \sqrt{30^2 + 40^2} e^{j \arctg(40/30)} = 50 e^{j53^\circ} \text{ В}; \quad \dot{I} = \sqrt{4^2 + 1^2} e^{j \arctg(1/4)} = 4,12 e^{j14^\circ} \text{ А},$$

где $I=4,12$ А – действующее значение тока, соответствующее показанию амперметра; $U=50$ В – действующее значение напряжения, соответствующее показанию вольтметра, $\psi_i = +14^\circ$ – начальная фаза тока, а $\psi_u = +53^\circ$ – начальная фаза напряжения.

б) Угол сдвига фаз φ между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i = 53^\circ - (+14^\circ) = +39^\circ$. Знак (+) этого угла указывает на индуктивный характер цепи (наличие в ней сопротивления R и индуктивности L).

в) Векторная диаграмма этой цепи показана на рис.4.3,в.

В рассмотренных выше примерах векторы $\dot{U}$ и $\dot{I}$ располагались на комплексной плоскости в первом и четвертом ее квадрантах. При построении векторных диаграмм сложных цепей (трансформатор, асинхронный двигатель) комплексные токи и напряжения могут располагаться в любом из четырех ее квадрантов, как это показано для тока $\dot{I}$ на рис.4.4. Здесь же даны формулы, определяющие его алгебраическую и показательную форму записи (номера квадрантов указаны римскими цифрами I, II, III и IV).

* Электромагнитные амперметры и вольтметры регистрируют действующие значения токов и напряжений.

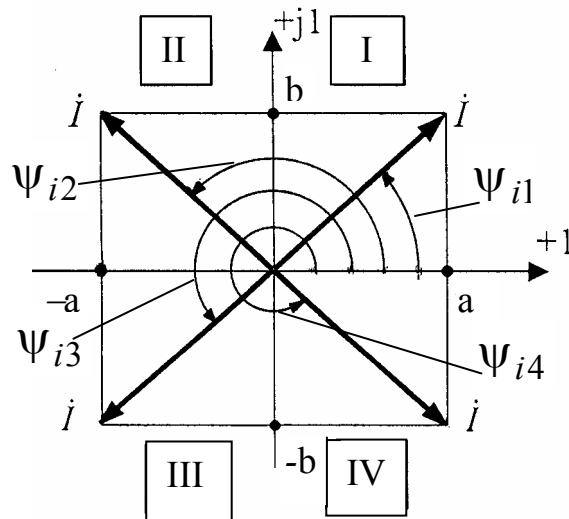


Рис.4.4

На этом рисунке $I = \sqrt{a^2 + b^2}$ одинаков для всех квадрантов.

$$\boxed{\text{I}} \quad \dot{I} = a + jb = I e^{j\psi_i} = I e^{j\arctg(b/a)},$$

$$\boxed{\text{II}} \quad \dot{I} = (-a + jb) = I e^{j\psi_i} = I e^{j(180^\circ - \arctg b/a)} = -I e^{-j\arctg b/a};$$

$$\boxed{\text{III}} \quad \dot{I} = -a - jb = I e^{j\psi_i} = I e^{j(180^\circ + \arctg b/a)} = -I e^{+j\arctg b/a};$$

$$\boxed{\text{IV}} \quad \dot{I} = a - jb = I e^{j\psi_i} = I e^{j(360^\circ - \arctg b/a)} = +I e^{-j\arctg b/a}.$$

Те же соотношения справедливы и для комплексного напряжения $\dot{U}$, расположенного в различных квадрантах комплексной плоскости.

Пример 4.5. На зажимах двухполюсника, показанного на рис.4.3,а, известны комплексные ток и напряжение $\dot{I} = (-4 - j1)$ А; $\dot{U} = (-30 + j40)$ В. Требуется определить: а) действующие значения тока и напряжения; б) начальные фазы тока и напряжения; в) угол сдвига фаз между напряжением и током цепи; г) построить векторную диаграмму.

Решение. а) В соответствии с рис.4.4 находим, что вектор тока расположен в третьем квадранте комплексной плоскости, а вектор напряжения – во втором ее квадранте. Действующие значения тока и напряжения (длины векторов):

$$I = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} = 4,12 \text{ А}; \quad U = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ В}.$$

б) Начальные фазы тока и напряжения:

$$\psi_i = 180^\circ + \arctg 1/4 = 180^\circ + 14^\circ = 194^\circ;$$

$$\psi_u = 180^\circ - \arctg 4/3 = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ.$$

в) Угол сдвига фаз между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i = 127^\circ - 194^\circ = -67^\circ$. Знак (–) соответствует емкостному характеру цепи – она содержит активное сопротивление и емкость. Заметим здесь, что начальные фазы тока и напряжения могут изменяться на векторных диаграммах в пределах от 0 до $\pm 360^\circ$, но угол сдвига фаз φ между напряжением и током цепи ни при каких условиях не может быть больше $\pm 90^\circ$.

г) Векторная диаграмма исследуемой цепи представлена на рис.4.5.

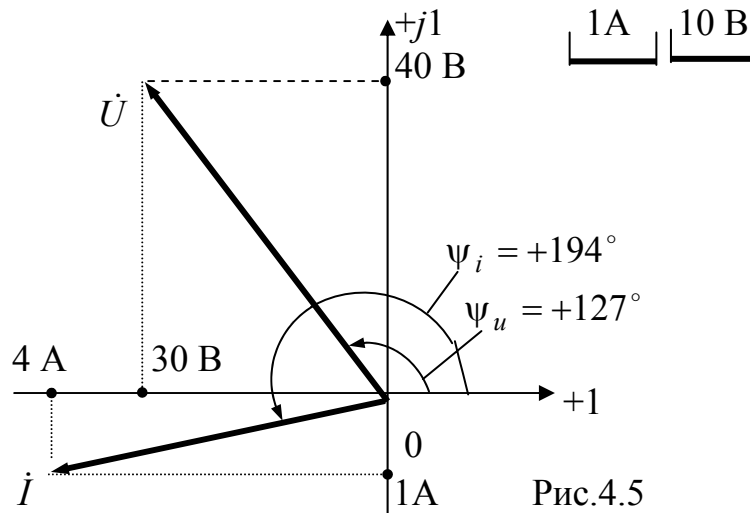


Рис.4.5

4.3. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость

а) Комплексное сопротивление $\underline{Z}$ есть отношение комплексного напряжения $\dot{U}$ к комплексному току $\dot{I}$:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u - \psi_i)} = ze^{j\varphi}.$$

Это показательная форма записи. Здесь z – полное сопротивление цепи, а φ – угол сдвига между напряжением и током. На комплексной плоскости вектор комплексного сопротивления располагается так, как это показано на рис.4.6,а.

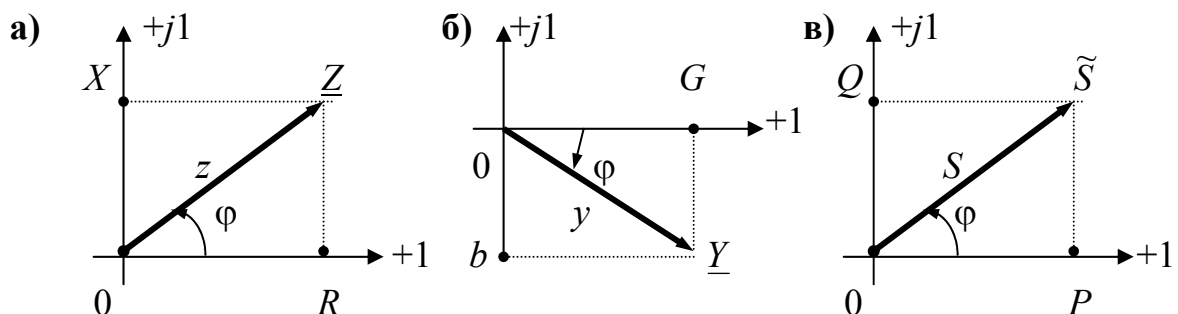


Рис.4.6

Переходя к алгебраической форме записи $\underline{Z}$ (табл.4.1), находим, что его вещественная часть $z\cos\varphi$ соответствует активному сопротивлению цепи R (рис.3.9,г), а его мнимая часть $z\sin\varphi$ соответствует реактивному сопротивлению X . Поэтому

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = ze^{j\varphi} = z\cos\varphi + jz\sin\varphi = (R + jX). \quad (4.2)$$

Таким образом, комплексное сопротивление содержит в себе полное сопротивление цепи z , активное сопротивление R , реактивное сопротивление X и угол сдвига фаз φ между напряжением и током.

б). Комплексная проводимость $\underline{Y}$ есть величина, обратная комплексному сопротивлению $\underline{Z}$ и равная отношению комплексного тока к комплексному напряжению:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)} = ye^{-j\varphi}.$$

Это показательная форма записи. Здесь y – полная проводимость цепи, а φ – угол сдвига фаз между напряжением и током (знак минус появился здесь чисто формально в результате взятия обратной величины от $\underline{Z}$). Положение вектора $\underline{Y}$ на комплексной плоскости показано на рис.4.6,б. Переходя от показательной к алгебраической форме записи комплексной проводимости (табл.4.1), находим, что ее вещественная часть $y \cos \varphi$ соответствует активной проводимости цепи G (рис.3.12,г), а его мнимая часть $y \sin \varphi$ – реактивной проводимости b . Поэтому

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = (G - jb). \quad (4.3)$$

Таким образом, комплексная проводимость содержит в себе полную проводимость y , активную проводимость G , реактивную проводимость b и угол сдвига фаз φ между напряжением и током.

Заметим, что формулы (4.2) и (4.3) представляют собой закон Ома в комплексной форме записи для участка цепи с $\underline{Z}$ или $\underline{Y}$.

Эти формулы имеют обобщенный характер и справедливы для комплексных сопротивлений и проводимостей, имеющих как активные, так и реактивные составляющие. Однако в теории цепей важно знать также комплексную форму записи чисто активных, чисто индуктивных и чисто емкостных сопротивлений, проводимостей и формулы закона Ома для цепей, содержащих такие сопротивления и проводимости. Все эти соотношения представлены в табл.4.2 и 4.3. При их составлении использованы формулы (4.2), (4.3), табл.3.1 и табл. 1.4.

Пример 4.6. В условиях примера 4.4 определить активное, реактивное, полное сопротивления цепи и угол сдвига фаз между напряжением и током.

Решение. Находим комплексное сопротивление цепи в соответствии с формулой (4.2):

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{50e^{j53^\circ}}{4,12e^{j14^\circ}} = 12,1e^{+j39^\circ} = 12,1 \cos 39^\circ + j12,1 \sin 39^\circ = (9,4 + j7,6) \text{ Ом},$$

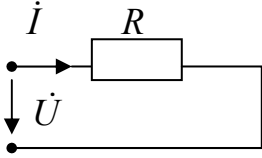
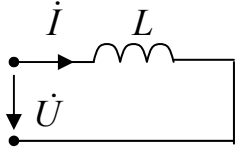
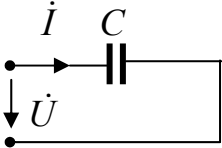
где $12,1 = z$ – полное сопротивление цепи, Ом; $9,4 = R$ – активное сопротивление цепи, Ом; $7,6 = X$ – реактивное сопротивление цепи, Ом; $+39^\circ = \varphi$ – угол сдвига фаз между напряжением и током цепи.

Заметим, что тот же результат можно получить, если поделить комплексное напряжение на комплексный ток, записанные в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{30 + j40}{4 + j1} \cdot \left(\frac{4 - j1}{4 - j1} \right) = \frac{(30 + j40)(4 - j1)}{4^2 + 1^2} = \frac{120 + j160 - j30 + 40}{17} = \\ &= \frac{160 + j130}{17} = (9,4 + j7,6) \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Здесь, для разделения вещественной и мнимой частей комплексного сопротивления, числитель и знаменатель дроби умножили на комплексное число, сопряженное знаменателю, и получили в знаменателе вещественное число, позволившее произвести почленное деление числителя (табл.4.1, поз.7 и 8).

**Активные, индуктивные, емкостные сопротивления и проводимости
в комплексной форме записи**

№ п/п	Схемы цепей	Физические свойства цепи (табл.3.1)	Комплексное сопротивление $\underline{Z}$ $\underline{Z} = z e^{j\varphi}$	Комплексная проводимость $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$
1		$z = R$ $\varphi = 0$	$\underline{Z}_R = R e^{j0^\circ} = R$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} =$ $= \frac{1}{R} = G$
2		$z = x_L = \omega L$ $\varphi = +90^\circ$	$\underline{Z}_L = x_L e^{+j90^\circ} =$ $= jx_L = j\omega L$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} =$ $= \frac{1}{jx_L} = -j \frac{1}{\omega L}$
3		$z = x_C = \frac{1}{\omega C}$ $\varphi = -90^\circ$	$\underline{Z}_C = x_C e^{-j90^\circ} =$ $= -jx_C = -j \frac{1}{\omega C} =$ $= + \frac{1}{j\omega C}$	$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} =$ $= \frac{1}{-jx_C} = +j\omega C$

Пример 4.7. В условиях примера 4.4 определить активную, реактивную, полную проводимости цепи и угол сдвига фаз между напряжением и током цепи.

Решение. Находим комплексную проводимость цепи в соответствии с формулой (4.3)

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{4,12e^{j14^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 0,08e^{-j39^\circ} = 0,08 \cos(-39^\circ) + j0,08 \sin(-39^\circ) =$$

$$= (0,064 - j0,052) \text{ См},$$

где $0,064 = G$ – активная проводимость цепи; $0,052 = b$ – реактивная проводимость цепи; $0,08 = y$ – полная проводимость цепи; $39^\circ = \varphi$ – угол сдвига фаз между напряжением и током (цепь имеет емкостной характер).

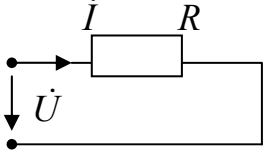
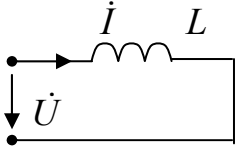
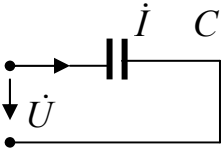
Заметим, что тот же результат получаем, разделив $\dot{I}$ на $\dot{U}$ в алгебраической форме записи

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{4 + j1}{30 + j40} \cdot \left(\frac{30 - j40}{30 - j40} \right) = \frac{120 + j30 - j160 + 40}{2500} = \frac{160 - j130}{2500} =$$

$$= (0,064 - j0,052) \text{ См}.$$

Т а б л и ц а 4.3

Комплексная форма записи закона Ома для цепей с активным, индуктивным, емкостным сопротивлениями

№ п/п	Схемы цепей	Соотношение между u и i (табл.1.4)	Комплексная форма записи закона Ома
1		$u = i R$ $i = u G$	$\dot{U} = \underline{Z}_R \dot{I} = R \dot{I}$ $\dot{I} = \underline{Y}_R \dot{U} = G \dot{U}$
2		$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$	$\dot{U} = \underline{Z}_L \dot{I} = j\omega L \dot{I}$ $\dot{I} = \underline{Y}_L \dot{U} = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}$
3		$u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$	$\dot{U} = \underline{Z}_C \dot{I} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}$ $\dot{I} = \underline{Y}_C \dot{U} = +j\omega C \dot{U}$

Из этой табл.4.3 вытекают следующие соответствия между мгновенными и комплексными значениями напряжений и токов:

$$u_R = iR \div R \dot{I} ; \quad u_L = L \frac{di}{dt} \div j\omega L \dot{I} ; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt \div -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} ;$$

$$i_G = Gu \div G \dot{U} ; \quad i_C = C du / dt \div j\omega C \dot{U} ; \quad i_L = \frac{1}{L} \int u dt \div -j \frac{1}{\omega L} \dot{U} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} ,$$

где ($\div$) – принятый здесь знак соответствия.

4.4. Комплексная мощность

Комплексная мощность есть произведение комплексного напряжения на сопряженный комплексный ток цепи

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = S e^{j\varphi}.$$

Это показательная форма записи комплексной мощности*. Здесь S – полная мощность цепи; φ – угол сдвига фаз между напряжением и током; $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$ – комплексный ток, сопряженный заданному комплексному току $\dot{I} = I e^{+j\psi_i}$, определяемый в соответствии с поз.3 табл.4.1. Так приходится формально поступать для того, чтобы в формуле комплексной мощности показатель степени числа e соответствовал углу сдвига фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Положение вектора $\tilde{S}$ на комплексной плоскости показано на рис.4.6,в. Переходя от показательной к

* Знак $\sim$ над комплексной мощностью носит название «тильда» и ставится вместо точки потому, что мощность не является синусоидой.

алгебраической форме записи (табл.4.1), находим, что ее вещественная часть $S \cos \varphi$ соответствует активной мощности цепи P (табл.3.4, поз.6), а ее мнимая часть $S \sin \varphi$ – реактивной мощности цепи Q . Поэтому

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ. \quad (4.4)$$

Таким образом, комплексная мощность цепи содержит в себе полную мощность S , активную мощность P , реактивную мощность Q и угол сдвига фаз φ между напряжением и током.

Пример 4.8. В условиях примера 4.4. определить активную, реактивную и полную мощности на зажимах двухполюсника.

Решение. Находим комплексную мощность цепи по формуле (4.4)

$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 50e^{j53^\circ} \cdot 4,12e^{-j14^\circ} = 206e^{+j39^\circ}$ ВА. В этой формуле $\dot{U} = 50e^{j53^\circ}$ В; $\dot{I}^* = 4,12e^{-j14^\circ}$ А – ток, сопряженный заданному току $\dot{I} = 4,12e^{j14^\circ}$ А. Переходя к алгебраической форме записи комплексной мощности, получаем $\tilde{S} = 206e^{j39^\circ} = 206 \cos 39^\circ + j 206 \sin 39^\circ = 160 + j 130$ ВА, где $160 = P$ – активная мощность, Вт; $130 = Q$ – реактивная мощность, вар; $206 = S$ – полная мощность, ВА; $39^\circ = \varphi$ – угол сдвига фаз между напряжением и током, град (знак + свидетельствует об индуктивном характере цепи).

Заметим, что тот же результат можно получить, если умножить $\dot{U}$ на $\dot{I}^*$ в алгебраической форме записи

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = (30 + j 40)(4 - j 1) = 120 + j 160 - j 30 + 40 = (160 + j 130) \text{ ВА.}$$

При этом (рис.4.6,в и табл.3.4, поз.6)

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{160^2 + 130^2} = 206 \text{ ВА.}; \quad \varphi = \arctg \frac{130}{160} = 39^\circ.$$

4.5. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи

Законы Кирхгофа в комплексной форме записи являются фактически модификацией законов Кирхгофа в векторной форме записи (п.3.5 главы 3).

Первый закон Кирхгофа относится к узлам цепи: алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^K \dot{I}_k = 0, \quad (4.5)$$

где K – число ветвей подходящих к данному узлу цепи. При этом комплексные токи, направленные на схеме к узлу цепи, берутся в уравнении со знаком (+), а направленные от узла, – со знаком (–).

Второй закон Кирхгофа относится к контурам цепи: алгебраическая сумма комплексных ЭДС контура равна алгебраической сумме комплексных напряжений на всех комплексных сопротивлениях этого контура:

$$\sum_m^Q \dot{E}_q = \sum_{n=1}^N \dot{I}_n \underline{Z}_n, \quad (4.6)$$

где Q – число источников ЭДС контура; N – число комплексных сопротивлений контура. При этом комплексные ЭДС и токи берутся в уравнении со знаком (+), если их направление на схеме совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком (–), если не совпадает.

4.6. Аналогия с цепями постоянного тока

Сравнивая формулы закона Ома (2.1) и законов Кирхгофа (2.3) и (2.4) для цепей постоянного тока с соответствующими формулами (4.2), (4.3), (4.5), (4.6) для цепей синусоидального тока в комплексной форме записи, легко убеждаемся в том, что они формально тождественны (аналогичны) друг другу, хотя физические процессы в сравниваемых цепях различны. Таким образом, если в формулах для цепей постоянного тока заменить U, I, E, R и G на $\dot{U}, \dot{I}, \dot{E}, \underline{Z}$ и $\underline{Y}$, то получаем формулы, записанные в символической форме. Это обстоятельство помогает быстро освоить данный метод расчета.

В табл.4.4 представлены расчетные формулы цепей синусоидального тока с последовательным, параллельным и смешанным соединением комплексных сопротивлений, которые тождественны соответствующим расчетным формулам цепей постоянного тока (табл.2.1). Естественно, что внутренняя «начинка» формул символического метода отличается от цепей постоянного тока. Здесь приходится действовать не с вещественными, а с комплексными числами, основные правила обращения с которыми (как уже упоминалось выше) представлены в табл.4.1.

4.7. Решение простейших примеров и задач на применение символического метода

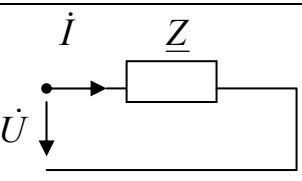
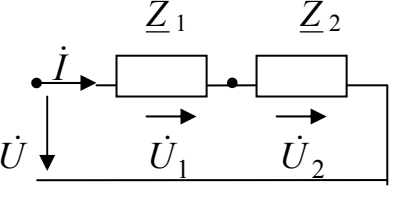
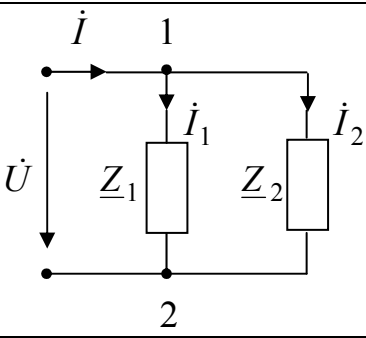
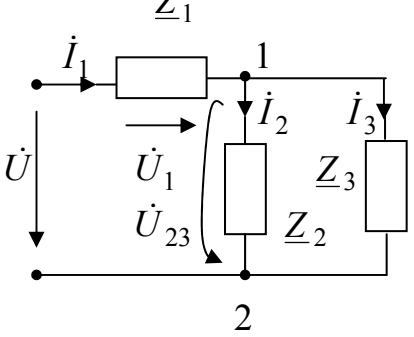
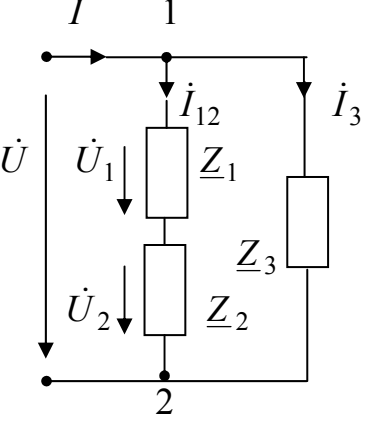
Пример 4.9. Известны мгновенные значения напряжения и тока на зажимах двухполюсника (рис.4.7,а): $u = 282 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$, $i = 14,1 \sin(\omega t + 70^\circ) \text{ А}$. Требуется: а) записать напряжение и ток в комплексной форме; б) построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости; в) определить комплексное сопротивление; г) найти комплексную проводимость; д) рассчитать комплексную мощность.

Решение. а) Комплексное напряжение находим в соответствии с формулой (4.1), заметив при этом, что *амплитуда синусоидального напряжения, деленная на $\sqrt{2}$, становится модулем комплексного напряжения, а начальная фаза – аргументом:*

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = \frac{282}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 200 e^{j30^\circ} = 200 \cos 30^\circ + j200 \sin 30^\circ = 174 + j100 \text{ В}.$$

В этой формуле $200 = U$ – действующее значение напряжения; $30^\circ = \psi_u$ – начальная фаза напряжения; 174 – координата комплексного напряжения по оси вещественных чисел; 100 – координата комплексного напряжения по оси мнимых чисел.

**Расчетные формулы символического метода для цепей
с одним источником энергии**

№ п/п	Схемы цепей	Закон Ома и законы Кирхгофа	Комплексные сопротивления и проводимости
1		$\dot{U} = \dot{I} \underline{Z}$ $\dot{I} = \dot{U} \underline{Y}$	$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}$
2		$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ $\dot{U}_1 = \dot{I} \underline{Z}_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{I} \underline{Z}_2$ $\dot{U} = \dot{I} \underline{Z}_\Sigma$	$\underline{Z}_\Sigma = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $\underline{Y}_\Sigma = \frac{1}{\underline{Z}_\Sigma} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$
3		$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ $\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_1 = \dot{U} \underline{Y}_1$ $\dot{I}_2 = \dot{U} / \underline{Z}_2 = \dot{U} \underline{Y}_2$ $\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z}_\Sigma = \dot{U} \underline{Y}_\Sigma$	$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_\Sigma = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ $\underline{Z}_\Sigma = \frac{1}{\underline{Y}_\Sigma} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$
4		$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ $\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_\Sigma = \dot{U} \underline{Y}_\Sigma$ $\dot{I}_2 = \dot{U}_{23} / \underline{Z}_2 = \dot{U}_{23} \underline{Y}_2$ $\dot{I}_3 = \dot{U}_{23} / \underline{Z}_3 = \dot{U}_{23} \underline{Y}_3$ $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{23}$ $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \quad \dot{U}_{23} = \dot{I}_1 \underline{Z}_{23}$	$\underline{Z}_\Sigma = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}$ $\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$ $\underline{Y}_\Sigma = \frac{1}{\underline{Z}_\Sigma}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}$
5		$\dot{I} = \dot{I}_{12} + \dot{I}_3$ $\dot{I}_{12} = \dot{U} / \underline{Z}_{12} = \dot{U} \underline{Y}_{12}$ $\dot{I}_3 = \dot{U} / \underline{Z}_3 = \dot{U} \underline{Y}_3$ $\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z}_\Sigma = \dot{U} \underline{Y}_\Sigma$ $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ $\dot{U}_1 = \dot{I} \underline{Z}_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{I} \underline{Z}_2$	$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $\underline{Y}_{12} = \frac{1}{\underline{Z}_{12}} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ $\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3}, \underline{Y}_\Sigma = \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_3$ $\underline{Z}_\Sigma = \frac{1}{\underline{Y}_\Sigma} = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_3}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_3}$

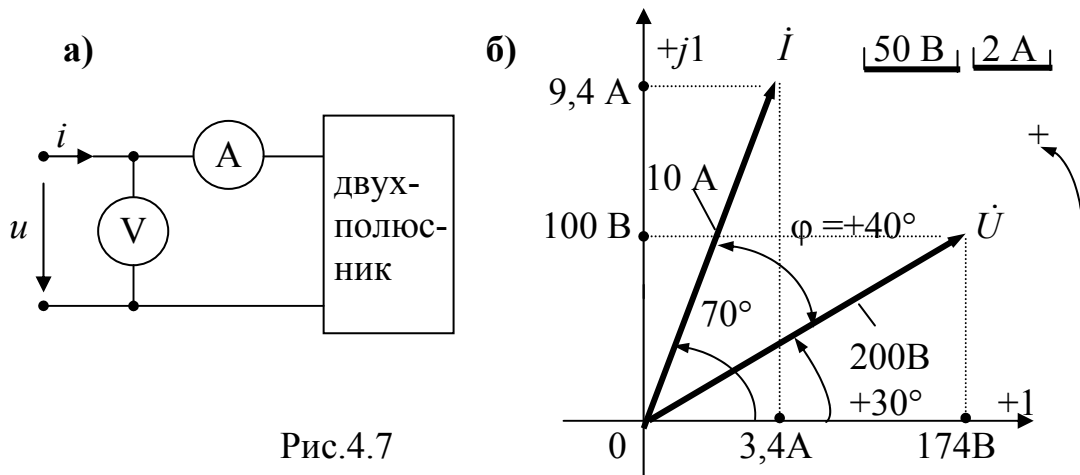


Рис.4.7

Комплексный ток цепи определяется аналогичным образом: *амплитуда синусоидального тока, деленная на $\sqrt{2}$ становится модулем комплексного тока, а начальная фаза тока – его аргументом*

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} e^{+j70^\circ} = 10 e^{j70^\circ} = 10 \cos 70^\circ + j10 \sin 70^\circ = 3,4 + j9,4 \text{ A.}$$

б) Векторная диаграмма цепи, построенная на комплексной плоскости, показана на рис.4.7,б.

в) Комплексное сопротивление двухполюсника находим в соответствии с формулой (4.2):

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{200 e^{j30^\circ}}{10 e^{j70^\circ}} = \frac{200}{10} e^{j(30-70)^\circ} = 20 e^{-j40^\circ} = 20 \cos(-40^\circ) - j20 \sin 40^\circ = (15,3 - j12,9) \text{ Ом.}$$

В этой формуле $20 = z$ – полное сопротивление, Ом; $15,3 = R$ – активное сопротивление, Ом; $12,9 = X_C$ – емкостное сопротивление, Ом; $40^\circ = \varphi$ – угол сдвига фаз между напряжением и током (знак минус указывает здесь на емкостной характер цепи).

Найденные значения z , R , X_C и φ соответствуют эквивалентной цепи с последовательным соединением активного и емкостного сопротивлений, вид которой представлен позицией 2 в табл.3.2.

г) Комплексную проводимость двухполюсника находим в соответствии с формулой (4.3)

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{10 e^{j70^\circ}}{200 e^{j30^\circ}} = 0,05 e^{j40^\circ} = 0,05 \cos 40^\circ + j0,05 \sin 40^\circ = (0,04 + j0,03) \text{ См.}$$

В этой формуле $0,05 = y$ – полная проводимость, См; $0,04 = G$ – активная проводимость, См; $0,03 = b_C$ – емкостная проводимость, См; $+40^\circ = \varphi$ – угол сдвига фаз между напряжением и током (знак + указывает здесь на емкостной характер цепи).

Найденные значения y , G , b_C и φ соответствуют эквивалентной цепи с параллельным соединением активной и емкостной проводимостей, вид которой представлен поз.2 в табл.3.3.

д) Комплексную мощность двухполюсника определяем в соответствии с формулой (4.4), учитывая, что $I^* = 10e^{-j70^\circ}$ - комплексный ток, сопряженный току цепи $I = 10e^{j70^\circ}$,

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = 200e^{j30^\circ} \cdot 10e^{-j70^\circ} = 2000e^{-j40^\circ} = 2000 \cos(-40^\circ) - j2000 \sin 40^\circ = 1532 - j1286 \text{ ВА},$$

где $S = 2000$ – полная мощность цепи, ВА; $P = 1532$ – активная мощность цепи, Вт; $Q = 1286$ – реактивная мощность цепи, вар; $\varphi = 40^\circ$ – угол сдвига фаз между напряжением и током цепи. Заметим, что условие данного примера и результаты его расчета символическим методом тождественны условиям и результатам примера 3.17, рассчитанного с помощью векторной диаграммы.

Пример 4.10. Дана цепь с последовательным соединением активного сопротивления $R = 2$ Ом и индуктивного сопротивления $X_L = 1$ Ом (табл.3.2, поз.1). Требуется записать комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}$ в алгебраической и показательной формах.

Решение. В соответствии с позициями 1 и 2 табл.4.2 имеем $\underline{Z}_R = R = 2$ Ом; $\underline{Z}_L = jX_L = j1$ Ом. Тогда в соответствии с позицией 2 табл.4.4 получаем

$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = 2 + j1 = \sqrt{2^2 + 1^2} e^{j \arctg \frac{1}{2}} = 2,24e^{j27,5^\circ}$ Ом (переход от алгебраической к показательной форме записи показан в табл.4.1). В этой формуле полное сопротивление $z = 2,24$ Ом; угол сдвига фаз $\varphi = 27,5^\circ$.

Пример 4.11. Дана цепь с параллельным соединением активного сопротивления $R = 33,3$ Ом и емкостного сопротивления $X_C = 25$ Ом (табл.3.3, поз.2). Требуется записать комплексную проводимость цепи $\underline{Y}$ в алгебраической и показательной форме.

Решение. В соответствии с позициями 1 и 3 табл.4.2 имеем

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{R} = 0,03 \text{ См}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{-jX_C} = +j \frac{1}{25} = +j0,04 \text{ См}.$$

Тогда, используя поз.3 табл.4.4, получаем

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = 0,03 + j0,04 = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2} e^{j \arctg(0,04/0,03)} = 0,05e^{j53^\circ} \text{ См},$$

где $y = 0,05$ – полная проводимость цепи, См; $\varphi = 53^\circ$ – угол сдвига фаз между напряжением и током (знак "плюс" показывает здесь, что цепь имеет емкостной характер).

Пример 4.12. Дана цепь с последовательным соединением активного $R=6$ Ом и индуктивного $X_L = 8$ Ом сопротивлений (рис.4.8,а). К цепи приложено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $U = 100$ В. Требуется определить показания амперметра и вольтметров электромагнитной системы. Задачу решить символическим методом и построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости. Записать ток цепи и напряжения на активном и индуктивном сопротивлениях в виде синусоид.

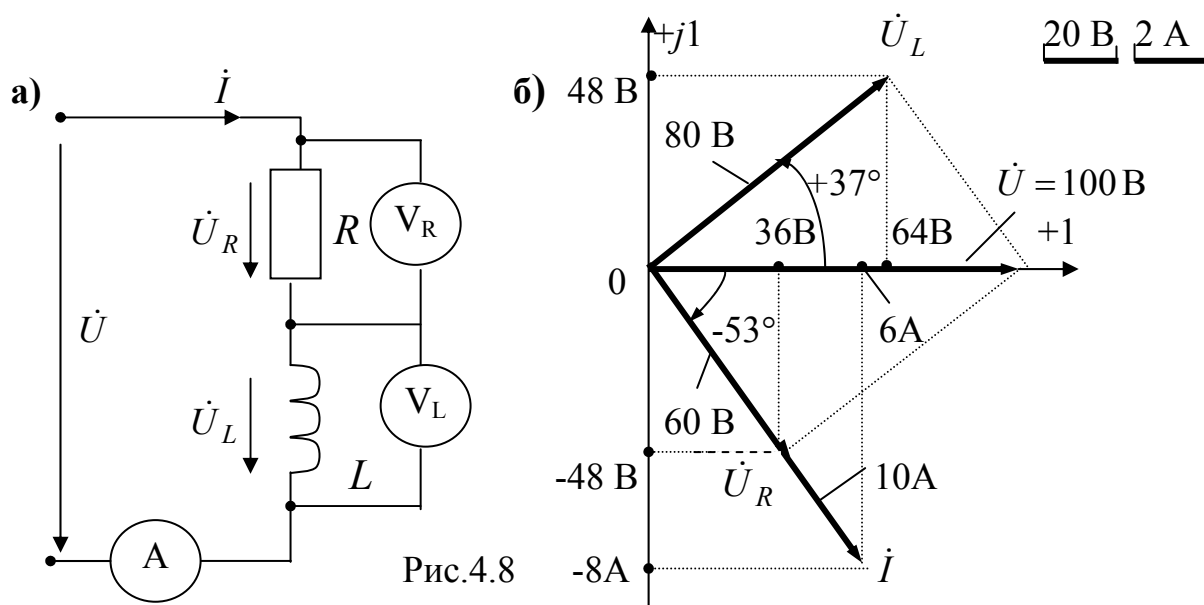


Рис.4.8

Решение. 1. Находим комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jX_L = 6 + j8 = 10e^{j \arctg 8/6} = 10e^{j53^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Находим комплексный ток цепи: $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j\psi_u}}{10e^{j53^\circ}} = \frac{100e^{j0}}{10e^{j53^\circ}} =$

$$10e^{-j53^\circ} = 10[\cos(-53^\circ) + j10\sin(-53^\circ)] = 10\cos 53^\circ - j10\sin 53^\circ = (6 - j8) \text{ А}.$$

Начальная фаза приложенного напряжения ψ_u не задана и поэтому ее величину приняли (произвольно) равной нулю, так как результат расчета цепи от величины начальной фазы напряжения не зависит. Действующее значение найденного тока $I = 10 \text{ А}$ соответствует показанию амперметра А.

3. Находим комплексное напряжение $\dot{U}_R$ на активном сопротивлении

$$\dot{U}_R = \dot{I}\underline{Z}_R = \dot{I}R = 10e^{-j53^\circ} \cdot 6 = 60e^{-j53^\circ} = 60\cos(-53^\circ) + j60\sin(-53^\circ) = (36 - j48) \text{ В}.$$

В этой формуле действующее значение напряжения на активном сопротивлении $U_R = 60 \text{ В}$ соответствует показанию вольтметра V_R .

4. Находим комплексное напряжение $\dot{U}_L$ на индуктивном сопротивлении

$$\dot{U}_L = \dot{I}\underline{Z}_L = \dot{I} \cdot jX_L = (10e^{-j53^\circ} \cdot j8) = (10e^{-j53^\circ} \cdot 8e^{j90^\circ}) = 80e^{+j37^\circ} = 80\cos 37^\circ + j80\sin 37^\circ = (64 + j48) \text{ В}.$$

В этой формуле действующее значение напряжения на индуктивном сопротивлении $U_L = 80 \text{ В}$ соответствует показанию вольтметра V_L .

5. Проверку расчетов производим, используя второй закон Кирхгофа в комплексной форме записи: $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = (36 - j48) + (64 + j48) = 100 \text{ В}$. Полученный результат совпадает с заданной величиной действующего значения напряжения, и поэтому можно считать, что задача решена верно.

6. Векторная диаграмма цепи, построенная на комплексной плоскости, показана на рис.4.8,б и графически поясняет аналитическое решение.

7. Записываем синусоиды тока и напряжений на R и X_L , используя результаты примера 4.9: $i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ A}$; $u_R = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ В}$; $u_L = 80\sqrt{2} \sin(\omega t + 37^\circ) \text{ В}$.

Пример 4.13. Дана цепь с параллельным соединением активного и емкостного сопротивлений (рис.4.9,а), величины которых известны: $R = 33,3 \text{ Ом}$; $X_C = 25 \text{ Ом}$. Цепь подключена к источнику синусоидального напряжения с действующим значением $U = 100 \text{ В}$. Требуется определить показания всех амперметров электромагнитной системы. Задачу решить символическим методом. Построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости. Записать токи всех ветвей в виде синусоид.

Решение. Существует три варианта решения данного примера: а) через проводимости ветвей, б) через сопротивление ветвей, в) с помощью 1-го закона Кирхгофа.

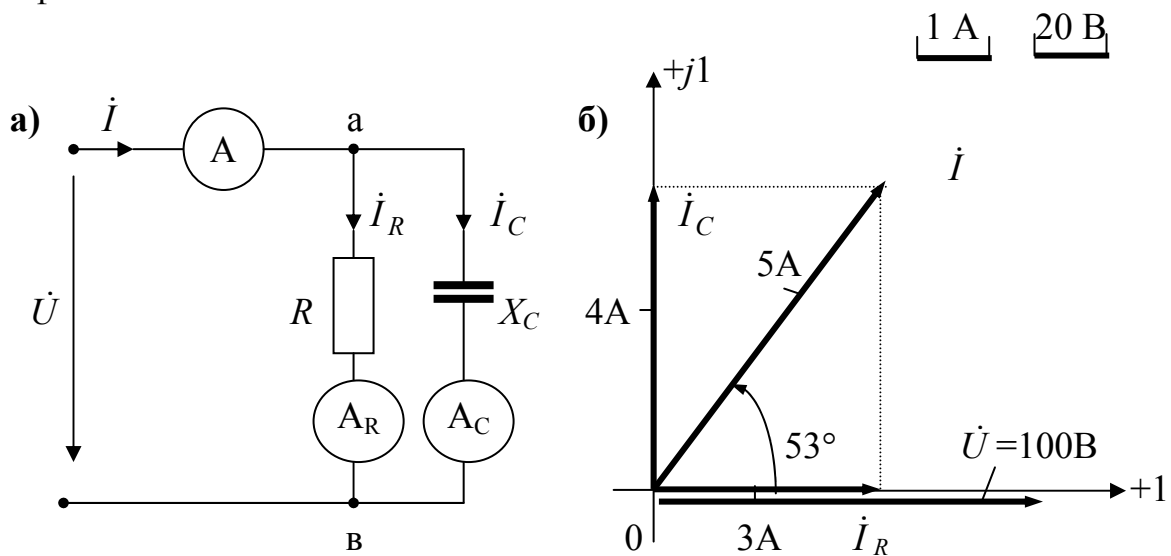


Рис.4.9

Вариант решения через проводимости ветвей.

1. Находим комплексные проводимости ветвей

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{33,3} = 0,03 \text{ См}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{-j25} = +j0,04 \text{ См}.$$

2. Находим комплексную проводимость всей цепи:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = 0,03 + j0,04 = 0,05e^{+j53^\circ} \text{ См}.$$

3. Определяем комплексный ток цепи, используя формулу (4.3)

$$\dot{I} = \dot{U} \underline{Y} = 100e^{j\psi_u} \cdot 0,05e^{+j53^\circ} = 5e^{+j53^\circ} = 5 \cos 53^\circ + j \sin 53^\circ = (3 + j4) \text{ A}.$$

Начальная фаза напряжения ψ_u в условиях примера не задана и для упрощения расчетов принята здесь равной нулю, так как ее величина не влияет на конечный результат. Действующее значение общего тока цепи $I=5\text{A}$ соответствует показанию амперметра А.

4. Определяем комплексный ток в ветви с активным сопротивлением: $\dot{I}_R = \dot{U} \underline{Y}_R = 100 \cdot 0,03 = 3 \text{ A}$. Здесь комплексный ток равен его действующему значению, которое соответствует показанию амперметра A_R .

5. Определяем комплексный ток в ветви с емкостным сопротивлением: $\dot{I}_C = \dot{U} \underline{Y}_C = 100e^{j0} \cdot j0,04 = j4 = 4e^{j90^\circ}$ А. В этой формуле действующее значение тока $I_C = 4$ А соответствует искомому показанию амперметра A_C .

6. Проверку решения осуществляем по 1-му закону Кирхгофа, составленному для узла (а) цепи: $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ}$ А. Полученная сумма соответствует току цепи $\dot{I}$, найденному выше иным способом. Таким образом, можно считать, что задача решена верно.

7. Векторная диаграмма цепи, построенная на комплексной плоскости, показана на рис.4.9,б и наглядно поясняет аналитическое решение.

8. Записываем синусоиды токов ветвей, используя результаты решения примера 4.9: $i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ)$ А; $i_R = 3\sqrt{2} \sin \omega t$ А; $i_C = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)$ А.

Заметим, что условия данного примера и полученные результаты тождественны примеру (3.9), рассчитанному с помощью векторной диаграммы.

Вариант решения через сопротивления ветвей.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}; \quad \dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_R}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_C}. \quad \text{Проверка: } \dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C.$$

Вариант решения с помощью первого закона Кирхгофа.

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_R}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_C}; \quad \dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C. \quad \text{Проверка: } \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

$$\text{где } \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}.$$

Предоставляем читателю возможность проделать все вычисления для последних двух вариантов решений и убедиться в том, что результаты расчетов всех трех вариантов совпадают между собой.

4.8. Расчет разветвленных цепей с одним источником энергии

Расчетные формулы цепей синусоидального тока со смешанным соединением R , L , C и одним источником энергии представлены в табл.4.4 позициями 4 и 5*.

Пример 4.14. К цепи с последовательно-параллельным соединением R , L , C (рис.4.10,а) приложено синусоидальное напряжение частотой $f = 150$ Гц и действующим значением $U = 100$ В. Параметры цепи известны: $R = 1$ Ом; $L = 1,06$ мГн; $C = 531$ мкФ.

Требуется определить показания всех электромагнитных амперметров и вольтметров, включенных в цепь; построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости.

Решение. 1. Определяем комплексное сопротивление всех трех ветвей цепи. В соответствии с табл.4.2 имеем

$$\underline{Z}_R = R = 1 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_L = jX_L = j\omega L = j942 \cdot 1,06 \cdot 10^{-3} = j1 \text{ Ом};$$

* Экспериментальное исследование разветвленной цепи синусоидального тока с одним источником энергии проводится в лабораторной работе № 2 [8].

$$\underline{Z}_C = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{942 \cdot 531 \cdot 10^{-6}} = -j2 \text{ Ом.}$$

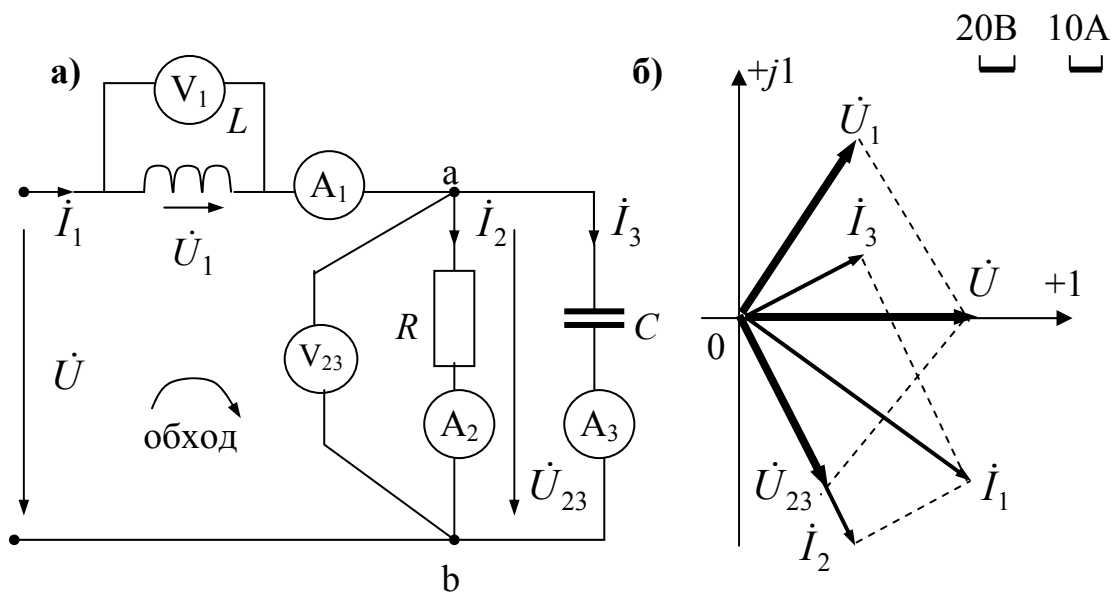


Рис.4.10

В этих формулах угловая частота цепи $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 150 = 942 \text{ 1/с.}$

2. Определяем комплексное сопротивление всей цепи в соответствии с поз.4, табл.4.4:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\Sigma} &= \underline{Z}_L + \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} \cdot \left(\frac{R + jX_C}{R + jX_C} \right) = jX_L + \frac{X_C^2 R - jX_C R^2}{R^2 + X_C^2} = \\ &= \frac{X_C^2 R}{R^2 + X_C^2} + j \left(X_L - \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} \right) = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma}. \quad \text{Здесь}^* \end{aligned}$$

$$R_{\Sigma} = \frac{X_C^2 R}{R^2 + X_C^2} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ Ом}; \quad X_{\Sigma} = \left(X_L - \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} \right) = 1 - \frac{2}{5} = 0,6 \text{ Ом}.$$

Таким образом, $\underline{Z}_{\Sigma} = 0,8 + j0,6 = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} e^{j \arctg(0,6/0,8)} = 1 e^{j37^\circ} \text{ Ом.}$

Заметим, что найденные R_{Σ} и X_{Σ} являются сопротивлениями эквивалентной последовательной цепи, схема которой представлена в табл.3.2, поз.1; если исходную цепь заменить на эквивалентную, то $\dot{U}$ и $\dot{I}$ на ее зажимах останутся неизменными.

3. Определяем комплексный ток цепи в соответствии с формулой (4.2)

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{\Sigma}} = \frac{100 e^{j\psi_u}}{1 e^{+j37^\circ}} = \frac{100 e^{j0}}{1 e^{+j37^\circ}} = 100 e^{-j37^\circ} = (80 - j60) \text{ А.}$$

В этой формуле начальную фазу напряжения ψ_u , не заданную в условии задачи, приняли (для простоты расчетов) равной нулю, так как от ее величины результат решения не зависит. Действующее значение тока $I_1 = 100 \text{ А}$, что соответствует показанию амперметра A_1 .

* Способ разделения вещественной и мнимой частей комплексной дроби изложен в примере 4.6.

4. Для определения комплексных токов $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ предварительно находим комплексное напряжение $\dot{U}_{23}$. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для левого контура цепи, выбрав направление его обхода по часовой стрелке, имеем $\dot{U}_1 + \dot{U}_{23} - \dot{U} = 0$. Отсюда находим, что $\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{U}_1$. В свою очередь по закону Ома $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_L = 100e^{-j37^\circ} \cdot j1 = 100e^{-j37^\circ} \cdot 1e^{+j90^\circ} = 100e^{+j53^\circ} = 100 \cos 53^\circ + j100 \sin 53^\circ = (60 + j80)$ В.

Таким образом, $\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{U}_1 = 100 - (60 + j80) = (40 - j80) = \sqrt{40^2 + 80^2} e^{j \arctg(-80/40)} = 89e^{-j63^\circ}$ В.

Модули комплексных напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_{23}$ (их действующие значения) $U_1 = 100$ В и $U_{23} = 89$ В определяют показания вольтметров V_1 и V_{23} .

5. Находим комплексные токи в активном и емкостном сопротивлениях

цепи:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_R} = \frac{89e^{-j63^\circ}}{1} = 89e^{-j63^\circ} = (40 - j80) \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_C} = \frac{89e^{-j63^\circ}}{-j2} = \frac{89e^{-j63^\circ}}{2e^{-j90^\circ}} = 44,5e^{+j27^\circ} = (40 + j20) \text{ А}.$$

Модули комплексных токов $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ (то есть их действующие значения $I_2 = 89$ А, $I_3 = 44,5$ А) определяют показания амперметров A_2 и A_3 .

6. Проверку решения осуществляем, используя 1-й закон Кирхгофа для узла (а) цепи: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (40 - j80) + (40 + j20) = (80 - j60)$ А. Полученное значение совпадает с результатом п.3 данного примера, и поэтому расчеты произведены верно.

7. Векторная диаграмма цепи, построенная на комплексной плоскости и показанная на рис.4.10,б, является графическим подтверждением правильности аналитического решения.

Пример 4.15. К цепи с параллельно-последовательным соединением RLC (рис.4.11,а) приложено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $U = 100$ В. Сопротивления цепи известны: $R = 1$ Ом; $X_L = 1$ Ом; $X_C = 2$ Ом. Требуется определить показания электромагнитных амперметров и вольтметров, включенных в цепь, и построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости.

Решение. Исследуемая цепь состоит из двух параллельно включенных ветвей. Рассчитаем ее, используя комплексные проводимости ветвей.

1. Комплексная проводимость левой ветви *

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{1}{R - jX_C} \left(\frac{R + jX_C}{R + jX_C} \right) = \frac{R + jX_C}{R^2 + X_C^2} = \frac{R}{R^2 + X_C^2} + j \frac{X_C}{R^2 + X_C^2} =$$

* Способ разделения вещественной и мнимой частей комплексной дроби изложен в примере 4.6.

$$= \frac{1 + j2}{5} = 0,2 + j0,4 = 0,45e^{j63^\circ} \text{ См.}$$

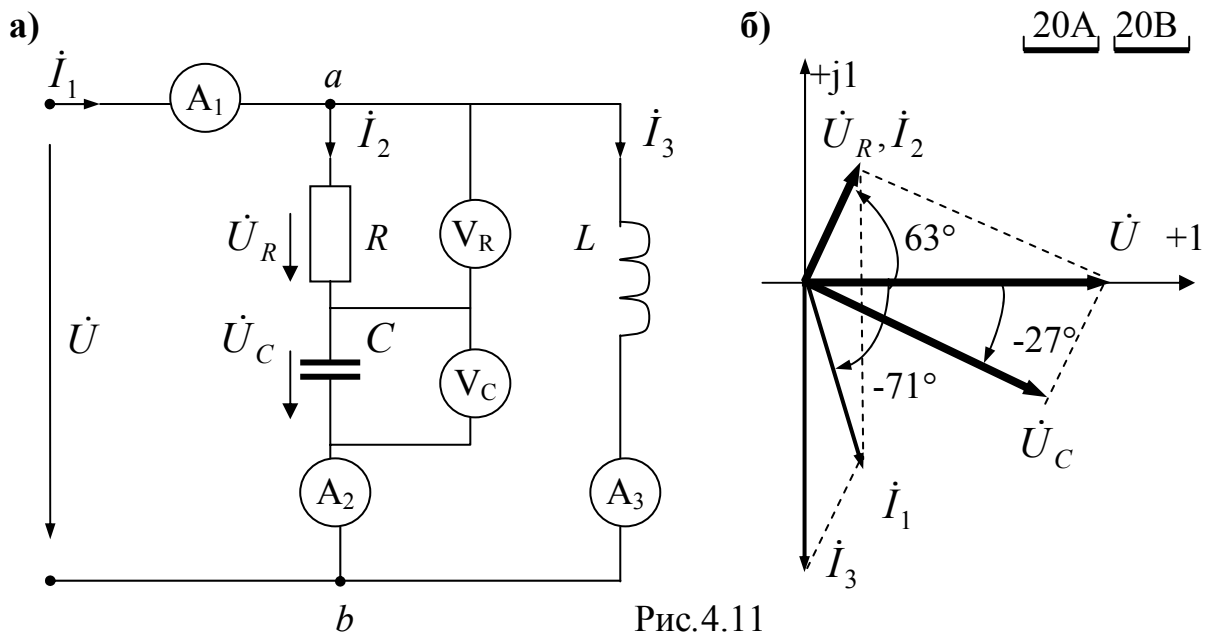


Рис.4.11

2. Комплексная проводимость правой ветви

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{+jX_L} = -j \frac{1}{X_L} = -j1 \text{ См.}$$

3. Комплексная проводимость всей цепи $\underline{Y}_\Sigma = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 =$

$$= \left(\frac{R}{R^2 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{R^2 + X_C^2} - \frac{1}{X_L} \right) = G_\Sigma + jb_\Sigma = 0,2 - j0,6 = 0,63e^{-j71^\circ} \text{ См.}$$

Здесь $0,2 = G_\Sigma$ См; $0,6 = b_\Sigma$ См. Знак (-) перед символом (j) указывает на индуктивный характер цепи.

Заметим, что G_Σ и b_Σ представляют собой проводимости эквивалентной параллельной цепи, схема которой представлена позицией 1 в табл.3.3; если исходную цепь заменить на эквивалентную, то $\dot{U}$ и $\dot{I}$ на зажимах цепи останутся неизменными.

4. Определяем комплексные токи во всех ветвях цепи:

а) общий ток $\dot{I}_1 = \dot{U} \underline{Y}_\Sigma = 100e^{j0} \cdot 0,63e^{-j71^\circ} = 63e^{-j71^\circ} = (20 - j60) \text{ А};$

б) ток в левой ветви $\dot{I}_2 = \dot{U} \underline{Y}_1 = 100 \cdot (0,2 + j0,4) = (20 + j40) = 45e^{+j63^\circ} \text{ А};$

в) ток в правой ветви $\dot{I}_3 = \dot{U} \underline{Y}_2 = 100 \cdot (-j1) = -j100 = 100e^{-j90^\circ} \text{ А.}$

В этих формулах начальная фаза напряжения принята равной нулю ($\psi_u = 0$).

5. Проверку расчетов осуществляем с помощью 1-го закона Кирхгофа, записанного для узла (а) цепи $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (20 + j40) + (-j100) = (20 - j60) \text{ А.}$ Эта величина совпадает с найденным ранее значением тока $\dot{I}_1$ иным способом, что свидетельствует о правильности решения.

6. Определяем показания амперметров A_1 , A_2 и A_3 .

Электромагнитные амперметры регистрируют действующее значение синусоидального тока, поэтому их показания соответствуют модулям соответствующих комплексных токов: $I_1 = 63 \text{ A}$; $I_2 = 45 \text{ A}$; $I_3 = 100 \text{ A}$.

7. Определяем напряжения $\dot{U}_R$ и $\dot{U}_C$, используя формулу (4.2) закона Ома:

$$\dot{U}_R = \dot{I}_2 Z_R = (20 + j40) \cdot 1 = (20 + j40) = 45e^{j63^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_2 Z_C = (20 + j40) \cdot (-j2) = (80 - j40) = 89e^{-j27^\circ} \text{ В}.$$

8. Определяем показания вольтметров V_R и V_C .

Электромагнитные вольтметры фиксируют действующие значения синусоидальных напряжений, поэтому их показания соответствуют модулям соответствующих комплексных напряжений: $U_R = 45 \text{ В}$; $U_C = 89 \text{ В}$, при этом

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = 100 \text{ В}.$$

9. Векторная диаграмма цепи, построенная на комплексной плоскости, показана на рис.4.11,б и графически подтверждает правильность аналитического решения.

4.9. Резонансные явления в разветвленных цепях

Понятия о резонансе напряжений и резонансе токов рассмотрены в главе 3 (3.11 и 3.13). Теперь дадим общее определение резонанса и сформулируем условия его возникновения.

Резонансом называется такой режим работы электрической цепи, при котором ток и напряжение этой цепи совпадают по фазе, несмотря на наличие в ней индуктивностей и емкостей. Таким образом, при этом режиме угол сдвига фаз между напряжением и током цепи равен нулю и цепь ведет себя как чисто активная

$$\varphi = 0. \quad (4.7)$$

Если цепь состоит из последовательного соединения R, L, C (рис.3.9,а) или путем эквивалентных преобразований может быть сведена к последовательной (пример 4.14), то из общего условия резонанса, следует, что при резонансе в такой цепи в соответствии с формулой (3.23)

$$X_{\Sigma} = 0, \quad (4.8)$$

т.е. реактивное сопротивление всей цепи равно нулю.

Если цепь состоит из параллельно соединенных R, L, C (рис.3.12,а) или путем эквивалентных преобразований может быть сведена к параллельной (пример 4.15), то из общего условия резонанса следует, что при резонансе в такой цепи в соответствии с формулой (3.30)

$$b_{\Sigma} = 0, \quad (4.9)$$

т.е. реактивная проводимость всей цепи равна нулю.

Условия (4.7), (4.8) и (4.9) позволяют найти резонансное уравнение цепи, устанавливающее связь между параметрами цепи и частотой, при которой в ней возможен резонанс.

Если исследуемая цепь путем преобразований приводится к последовательной, то следует найти комплексное сопротивление

$\underline{Z}_{\Sigma} = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma}$ и приравнять его мнимую часть к нулю. Если же исследуемая цепь путем преобразований приводится к параллельной, то следует найти ее комплексную проводимость $\underline{Y}_{\Sigma} = G_{\Sigma} + jb_{\Sigma}$ и приравнять мнимую часть к нулю. Заметим, что для нахождения X_{Σ} и b_{Σ} можно использовать также преобразования цепей, изложенные ниже в 4.10.

Пример 4.16. Определить резонансное уравнение для цепи с последовательно-параллельным соединением R, L, C (рис.4.10,а).

Решение. Данная цепь путем эквивалентных преобразований приводится к последовательной цепи, поэтому условием резонанса является соотношение (4.8). Для определения реактивного сопротивления X_{Σ} всей цепи следует найти комплексное сопротивление этой цепи и приравнять ее мнимую часть к нулю. Выражение $\underline{Z}_{\Sigma}$ в общем виде получено в примере 4.14. Приравняв реактивное сопротивление X_{Σ} к нулю, получаем резонансное уравнение, выраженное через сопротивления ветвей

$$X_{\Sigma} = X_L - \left(\frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} \right) = 0.$$

Для определения связи между параметрами цепи и частотой, воспользуемся соотношениями $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$ и получим

$$\omega L - \frac{\frac{1}{\omega C} R^2}{R^2 + 1/(\omega C)^2} = 0 \text{ или } \omega L - \frac{\omega C R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} = 0.$$

Сокращаем левую и правую часть уравнения на $\omega \neq 0$. Затем приводим дробь к общему знаменателю и приравниваем числитель к нулю, так как если числитель равен нулю, то и вся дробь равна нулю. В результате получаем резонансное уравнение, выраженное через параметры R, L, C и частоту ω

$$\omega^2 L C^2 R^2 + L - C R^2 = 0.$$

Если, в частности, параметры RLC цепи заданы, то резонансная частота определяется из этого уравнения следующим образом

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C R^2 - L}{C^2 R^2 L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{C R^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}.$$

В этой формуле $\rho = \sqrt{L/C}$ – волновое сопротивление цепи (контура, как говорят в радиотехнике).

Полученный результат показывает, что в отличие от цепи с последовательным или параллельным соединением R, L, C резонансная частота этой цепи не соответствует формулам (3.25) и (3.32). Она зависит не только от L и C , но также и от величины R . Очевидно, что если $L/C R^2 \geq 1$ ($\rho > R$), то резонанс в исследуемой цепи невозможен, поскольку ω_0 есть вещественное положительное число.

Пример 4.17. Определить резонансное уравнение для цепи с параллельно-последовательным соединением R, L, C (рис.4.11,а).

Решение. Данная цепь путем эквивалентных преобразований приводится к параллельной цепи, поэтому условием резонанса здесь является соотношение (4.9). Для нахождения реактивной проводимости цепи следует определить комплексную проводимость этой цепи и приравнять к нулю ее мнимую часть. Выражение для Y_{Σ} в общем виде найдено в примере 4.15. Приравнявая к нулю реактивную проводимость цепи, получаем резонансное уравнение, выраженное через сопротивления всех ветвей цепи

$$b_{\Sigma} = \left(\frac{X_C}{R^2 + X_C^2} - \frac{1}{X_L} \right) = 0.$$

Для определения связи между параметрами цепи и частотой, используем соотношения $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$ и получаем

$$\frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\omega C}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} - \frac{1}{\omega L} = 0.$$

Левую часть этого уравнения приводим к общему знаменателю и приравняем числитель к нулю. Тогда $\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R^2 - 1 = 0$.

Из этого уравнения можно определить любой из параметров цепи и частоту при резонансе. Если, в частности, параметры RLC известны, то резонансная частота ω_0 определяется следующим образом

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - C^2 R^2 \cdot \left(\frac{L}{L}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{CR^2}{L}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}}.$$

Здесь $\rho = \sqrt{L/C}$ – волновое сопротивление цепи (контура).

Полученный результат показывает, что резонансная частота исследуемой цепи зависит не только от L и C (как это имеет место в цепях с последовательным и параллельным соединением R, L, C), но и от активного сопротивления R цепи. Очевидно, что если $CR^2/L \geq 1$ ($R \geq \rho$), то резонанс в такой цепи невозможен, так как частота ω является заведомо положительным вещественным числом.

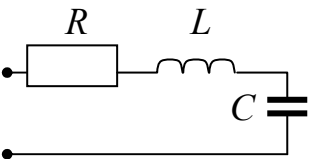
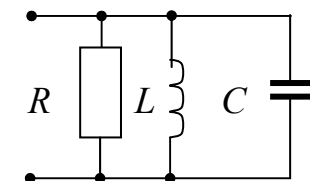
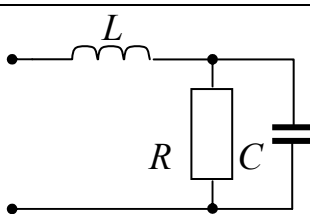
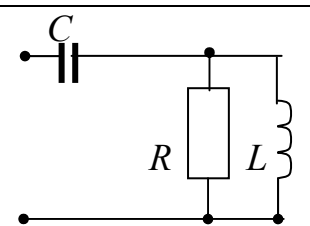
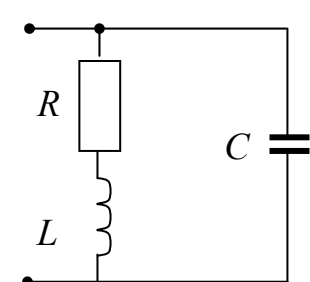
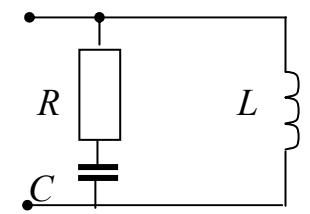
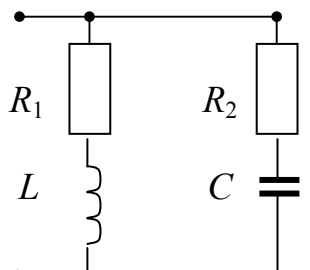
Результаты расчетов резонансных явлений в цепях с последовательным, параллельным и смешанным соединением R, L, C представлены в табл.4.5.

Пример 4.18. Определить резонансные частоты в цепи с последовательно-параллельным соединением двух индуктивностей и одной емкости (рис.4.12).

Решение. В такой цепи возможны два вида резонанса: резонанс токов на участке L_2, C и резонанс напряжений на зажимах всей цепи. При резонансе токов на участке L_2, C резонансная частота в соответствии с формулой (3.32)

Т а б л и ц а 4.5

**Резонансные уравнения и резонансные частоты цепей
с различными способами соединения R, L, C**

№ п/п	Схемы цепей	Резонансные уравнения	Резонансные частоты
1		$X_{\Sigma} = X_L - X_C = 0$ или $\omega^2 LC - 1 = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
2		$b_{\Sigma} = b_L - b_C = 0$ или $\omega^2 LC - 1 = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
3		$X_{\Sigma} = X_L - \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} = 0$ или $\omega^2 C^2 R^2 L - R^2 C + L = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}},$ где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$
4		$X_{\Sigma} = \frac{X_L R^2}{R^2 + X_L^2} - X_C = 0$ или $\omega^2 (LR^2 C - L^2) - R^2 = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}},$ где $\rho = \sqrt{L/C}$
5		$b_{\Sigma} = \frac{1}{X_C} - \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = 0$ или $\omega^2 CL^2 - L + CR^2 = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\rho^2}},$ где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$
6		$b_{\Sigma} = \frac{X_C}{R^2 + X_C^2} - \frac{1}{X_L} = 0$ или $\omega^2 (LC - C^2 R^2) - 1 = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}},$ где $\rho = \sqrt{L/C}$
7		$b_{\Sigma} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = 0$ или $\omega^2 (L^2 C - R_2^2 C^2 L) = L - R^2 C$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1 - (R_1^2 / \rho^2)}{1 - (R_2^2 / \rho^2)}},$ где $\rho = \sqrt{L/C}$

определяется уравнением $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_2 C}$. Кроме того, в цепи возможен резонанс напряжений при условии, что на участке ab цепи преобладает емкость.

Такое положение имеет место при частоте большей, чем ω_{01} (см. резонансные кривые цепи с параллельным соединением индуктивности и емкости на рис.3.14). Поэтому резонансная частота всей цепи при резонансе напряжений должна быть больше ($\omega_{02} > \omega_{01}$) частоты резонанса тока.

Для определения ω_{02} надо найти реактивное сопротивление цепи и приравнять его к нулю.

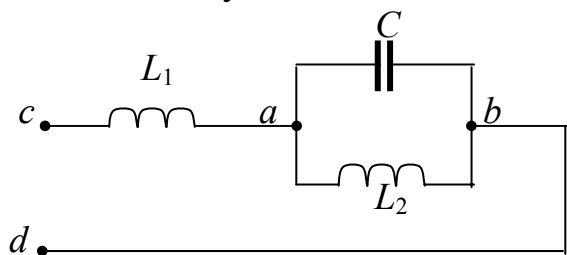


Рис.4.12

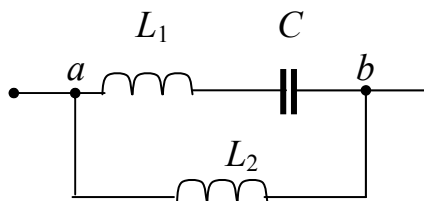


Рис.4.13

В нашей цепи нет активных сопротивлений, поэтому $\underline{Z}_\Sigma = jX_\Sigma$:

$$\underline{Z}_\Sigma = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)} = j\omega L_1 - j \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = j \left(\omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} \right).$$

Приравнявая к нулю реактивное сопротивление последовательной цепи, получаем следующее резонансное уравнение:

$$\omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = 0 \quad \text{или} \quad L_1 - \frac{L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = 0$$

(в последней формуле левую и правую часть уравнения сократили на $\omega \neq 0$).

Тогда резонансное уравнение цепи $\omega^2 L_1 L_2 C - L_1 - L_2 = 0$.

Отсюда находим частоту резонанса напряжений всей цепи:

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C}} = \sqrt{\frac{1}{L_\Sigma C}},$$

где $L_\Sigma = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ - результирующая индуктивность цепи при резонансе напряжений. Очевидно, что $L_\Sigma < L_2$, и поэтому частота резонанса напряжений всей цепи больше частоты резонанса тока на участке L_2, C , что соответствует отмеченной выше физике явлений.

Пример 4.19. Определить резонансные частоты цепи при параллельно-последовательном соединении двух индуктивностей и емкости (рис.4.13).

Решение. В рассматриваемой цепи возможны два вида резонанса: резонанс напряжений на участке с последовательным соединением L_1, C и резонанс токов всей цепи.

При резонансе напряжений с последовательным соединением L_1, C в соответствии с формулой (3.25) имеем

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}.$$

Кроме этого, возможен резонанс токов всей цепи, при условии, что на участке L_1, C преобладает емкость. Такое положение имеет место при частоте, меньшей, чем ω_{01} (см. резонансные кривые для цепи с последовательным соединением L_1, C , представленные на рис.3.11). Поэтому здесь резонансная частота $\omega_{02} < \omega_{01}$.

Для определения частоты ω_{02} находим резонансное уравнение всей цепи из условия, что реактивная проводимость цепи при таком резонансе равна нулю ($b_{\Sigma} = 0$):

$$\begin{aligned} Y_{\Sigma} = jb_{\Sigma} &= \left[\frac{1}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)} + \frac{1}{j\omega L_2} \right] = -j \frac{\omega C}{\omega^2 L_1 C - 1} - j \frac{1}{\omega L_2} = \\ &= -j \left[\frac{\omega C}{\omega^2 L_1 C - 1} + \frac{1}{\omega L_2} \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая реактивную проводимость цепи к нулю, получаем резонансное уравнение

$$\frac{\omega C}{\omega^2 L_1 C - 1} + \frac{1}{\omega L_2} = 0 \quad \text{или} \quad \omega^2 L_2 C + \omega^2 L_1 C - 1 = 0.$$

Отсюда находим частоту резонанса токов всей цепи:

$$\omega^2 (L_2 C + L_1 C) = 1 \quad \text{или} \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{L_{\Sigma} C},$$

где $L_{\Sigma} = L_1 + L_2$ – результирующая индуктивность цепи при резонансе токов. Очевидно, что $L_{\Sigma} > L_1$, и поэтому частота резонанса напряжений меньше частоты резонанса тока ($\omega_{02} < \omega_{01}$), что соответствует рассмотренной выше физике явлений.

4.10. Эквивалентные преобразования цепей

Понятие об эквивалентных преобразованиях рассмотрено в 3.17 главы 3. В пособии рассматриваются следующие виды таких преобразований: 1) преобразование цепи с последовательным соединением активного и реактивного сопротивлений в цепь с параллельным соединением активной и реактивной проводимостью, а также обратное преобразование; 2) преобразование соединения сопротивлений звездой в соединение

сопротивлений треугольником, а также обратное преобразование; 3) преобразование источника ЭДС в источник тока и обратное преобразование.

1. Преобразование последовательной цепи в эквивалентную параллельную и обратное преобразование

При таком преобразовании на зажимах цепи должны остаться неизменными $\dot{U}$ и $\dot{I}$. Отсюда следует, что у эквивалентных цепей $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$ - взаимнообратные величины

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} ; \quad \underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \quad \text{или} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} .$$

Таким образом, для нахождения проводимостей эквивалентной параллельной цепи следует по известному $\underline{Z}$ определить $\underline{Y}$, а для нахождения сопротивлений эквивалентной последовательной цепи по известной $\underline{Y}$ найти $\underline{Z}$.

Пример 4.20. Дана цепь с последовательным соединением R и X (табл.3.2, поз.1). Определить проводимости G и b эквивалентной параллельной цепи (табл.3.3, поз.1).

Решение. Комплексное сопротивление $\underline{Z}$ последовательной цепи $\underline{Z} = R + jX$. Для эквивалентной параллельной цепи имеем $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} \cdot \left(\frac{R - jX}{R - jX} \right) = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jb$.

Таким образом, проводимости эквивалентной последовательной цепи

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{и} \quad b = -\frac{X}{R^2 + X^2} .$$

Заметим, что знак (+) у мнимой части комплексного сопротивления и знак (-) у мнимой части комплексной проводимости указывает на индуктивный характер цепи, а противоположные знаки – на емкостной характер.

У рассмотренных эквивалентных цепей сопротивления R , X и проводимости G , b – не обратные величины. Взаимнообратными являются только $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$, а также полное сопротивление z и полная проводимость y . В самом деле, пусть величины активного и реактивного сопротивления последовательной цепи составляют $R = 3$ Ом и $X = 4$ Ом. Тогда величины проводимостей эквивалентной параллельной цепи оказываются равными $G = 0,12$ См и $b = 0,16$ См. Эти значения G и b , как видим, не являются обратными величинами исходных R и X , так как $1/G = R' = 8,33$ Ом и $1/b = X' = 6,25$ Ом. Однако полное сопротивление z последовательной цепи $z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{25} = 5$ Ом и полная проводимость y эквивалентной параллельной цепи $y = \sqrt{G^2 + b^2} = \sqrt{0,12^2 + 0,16^2} = \sqrt{0,04} = 0,2$ См являются здесь взаимнообратными величинами.

Пример 4.21. Дана цепь с параллельным соединением активного R и емкостного X сопротивлений (табл.3.3, поз.2). Определить сопротивления R' и X' эквивалентной последовательной цепи (табл.3.2, поз.2).

Решение. Из условий эквивалентности этих цепей следует, что комплексное сопротивление последовательной цепи есть обратная величина комплексной проводимости этой цепи $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$.

$$\text{Здесь } \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_X} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-jX} = \frac{1}{R} + j\frac{1}{X} = G + jb, \quad \text{где}$$

$G = 1/R$ - активная проводимость, а $b = 1/X$ - реактивная проводимость исходной параллельной цепи. Тогда комплексное сопротивление этой цепи

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jb} \cdot \left(\frac{G - jb}{G - jb} \right) = \frac{G - jb}{G^2 + b^2} = \frac{G}{G^2 + b^2} - j \frac{b}{G^2 + b^2} = R' - jX'.$$

$$\text{Здесь } R' = \frac{G}{G^2 + b^2} \text{ и } X' = \frac{b}{G^2 + b^2} - \text{соответственно активное и}$$

реактивное сопротивления эквивалентной последовательной цепи.

Пусть, например, известны величины активного и реактивного сопротивлений исходной параллельной цепи: $R = 33,3 \text{ Ом}$ и $X = 25 \text{ Ом}$. Тогда активная и реактивная проводимости ветвей этой цепи составляет $G = 1/R = 0,03 \text{ См}$ и $b = 1/X = 0,04 \text{ См}$. При этом величины активного и емкостного сопротивлений эквивалентной последовательной цепи окажутся равными:

$$R' = \frac{b}{G^2 + b^2} = \frac{0,03}{0,03^2 + 0,04^2} = \frac{0,03}{0,0025} = 12 \text{ Ом}; \quad X' = \frac{b}{G^2 + b^2} = \frac{0,04}{0,0025} = 16 \text{ Ом}.$$

Здесь также как и в предыдущем примере, эти сопротивления не взаимнообратные с исходными сопротивлениями R и X . Взаимнообратными являются только полное сопротивление z и полная проводимость y :
 $z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом}; \quad y = \sqrt{G^2 + b^2} = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2} = 0,05 \text{ См}.$

Пример 4.22. В условиях примера 4.14 (рис.4.10,а) определить активное, реактивное и полное сопротивление всей цепи, используя формулы преобразований параллельного участка цепи в эквивалентный последовательный участок.

Решение. 1. Преобразуем участок ab (рис.4.10,а) с параллельным соединением R и C в эквивалентный участок с последовательным соединением этих элементов и находим его активное и реактивное сопротивления, используя формулы примера 4.21

$$R_{\text{Э}} = \frac{G}{G^2 + b^2} = \frac{1}{1^2 + 0,5^2} = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ Ом}; \quad X_{\text{СЭ}} = \frac{b}{G^2 + b^2} = \frac{0,5}{1,25} = 0,4 \text{ Ом}.$$

В этих формулах $G = 1/R = 1/1 = 1 \text{ Ом}$; $b = 1/X_C = 1/2 = 0,5 \text{ Ом}$.

2. Определяем активное, реактивное и полное сопротивления образовавшейся последовательной цепи, используя формулу 3.22.

$$R = R_{\text{Э}} = 0,8 \text{ Ом}; \quad X = X_L - X_{\text{СЭ}} = 1 - 0,4 = 0,6 \text{ Ом}; \quad z = \sqrt{R^2 + X^2} = 1 \text{ Ом}.$$

Заметим, что полученные данные соответствуют результатам расчета сопротивления z в примере 4.14 символическим методом.

Пример 4.23. В условиях примера 4.15 (рис.4.11,а) определить активную, реактивную и полную проводимости всей цепи, используя формулы преобразований последовательного участка цепи в эквивалентный параллельный участок.

Решение. 1. Преобразуем участок ab (рис.4.11,а) с последовательным соединением R и C в эквивалентный участок с параллельным соединением этих элементов и находим его активную и реактивную проводимости, используя формулы примера 4.20

$$G_{\Sigma} = \frac{R}{R^2 + X_C^2} = \frac{1}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ См} \text{ и } b_{C\Sigma} = -\frac{X_C}{R^2 + X_C^2} = -\frac{2}{5} = -0,4 \text{ См.}$$

2. Определяем активную, реактивную и полную проводимости образовавшейся параллельной цепи, используя формулу (3.28).

$$G = G_{\Sigma} = 0,2 \text{ См}; \quad b = b_L - b_{C\Sigma} = 1 - 0,4 = 0,6 \text{ См}; \quad y = \sqrt{G^2 + b^2} = 0,63 \text{ См.}$$

Заметим, что полученные данные соответствуют результатам расчета проводимости y в примере 4.15 символическим методом.

2. Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду сопротивлений и обратное преобразование

В некоторых разветвленных цепях сопротивления ветвей соединены между собой таким образом, что цепь не может быть непосредственно преобразована ни к чисто последовательному, ни к чисто параллельному соединению. Такими являются соединения звездой (условное обозначение $\star$) и треугольником (условное обозначение Δ), показанные на рис.4.14.

Между сопротивлениями звезды и сопротивлениями эквивалентного треугольника имеют место следующие соотношения*.

а). Если известны сопротивления треугольника $\underline{Z}_{AB}, \underline{Z}_{BC}, \underline{Z}_{CA}$, то для сопротивления эквивалентной звезды получаем

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_{AB} \underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}}; \underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_{BC} \underline{Z}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}}; \underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_{CA} \underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}}. \quad (4.10)$$

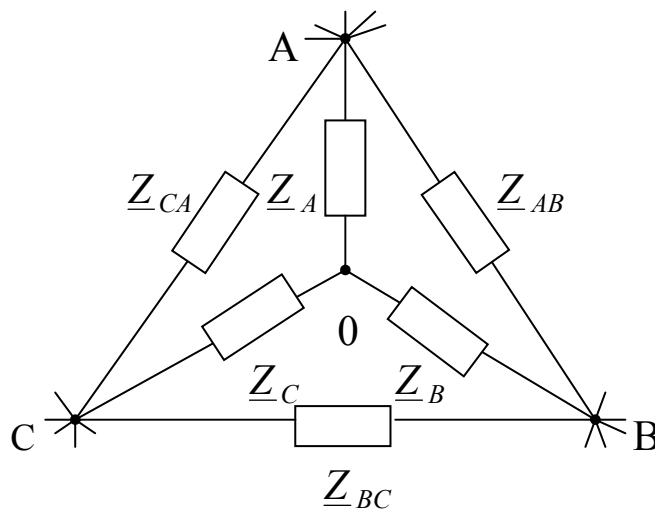


Рис.4.14

* Подробный вывод нижеприведенных формул, вытекающих из условий эквивалентности, имеется в [1-4].

При одинаковых комплексных сопротивлениях треугольника ($\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_{\Delta}$) комплексные сопротивления эквивалентной звезды ($\underline{Z}_{\lambda}$) также одинаковы и при этом

$$\underline{Z}_{\lambda} = \frac{\underline{Z}_{\Delta}}{3}. \quad (4.10 \text{ а})$$

б). Если известны сопротивления звезды $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$, то из условия эквивалентности этих соединений получаем для сопротивлений треугольника

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= \underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \frac{\underline{Z}_A \underline{Z}_B}{\underline{Z}_C}; & \underline{Z}_{BC} &= \underline{Z}_B + \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_B \underline{Z}_C}{\underline{Z}_A}; \\ \underline{Z}_{CA} &= \underline{Z}_C + \underline{Z}_A + \frac{\underline{Z}_C \underline{Z}_A}{\underline{Z}_B}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

При одинаковых комплексных сопротивлениях звезды ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_{\lambda}$) комплексные сопротивления эквивалентного треугольника ($\underline{Z}_{\Delta}$) также одинаковы и при этом

$$\underline{Z}_{\Delta} = 3\underline{Z}_{\lambda}. \quad (4.11 \text{ а})$$

Пример 4.24. Для цепи, показанной на рис.4.15,а, известно: $\dot{E} = 30 \text{ В}$; $\underline{Z}_0 = 0,8 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_5 = 3 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_3 = 1 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_4 = 2 \text{ Ом}$. Требуется определить комплексный ток $\dot{I}$ источника ЭДС.

Решение. Представленная схема представляет собой измерительный мост, состоящий из комбинаций звезд и треугольников. Соединения сопротивлений $\underline{Z}_1, \underline{Z}_3$ и $\underline{Z}_5$, а также $\underline{Z}_2, \underline{Z}_4$ и $\underline{Z}_5$ представляют собой звезды, а комбинации сопротивлений $\underline{Z}_1, \underline{Z}_5, \underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_3, \underline{Z}_4, \underline{Z}_5$ представляют собой треугольники. Ток $\dot{I}$ такой цепи легко рассчитать, если заменить одну из звезд цепи на эквивалентный треугольник или один из треугольников цепи на эквивалентную звезду. Один из вариантов решения следующий:

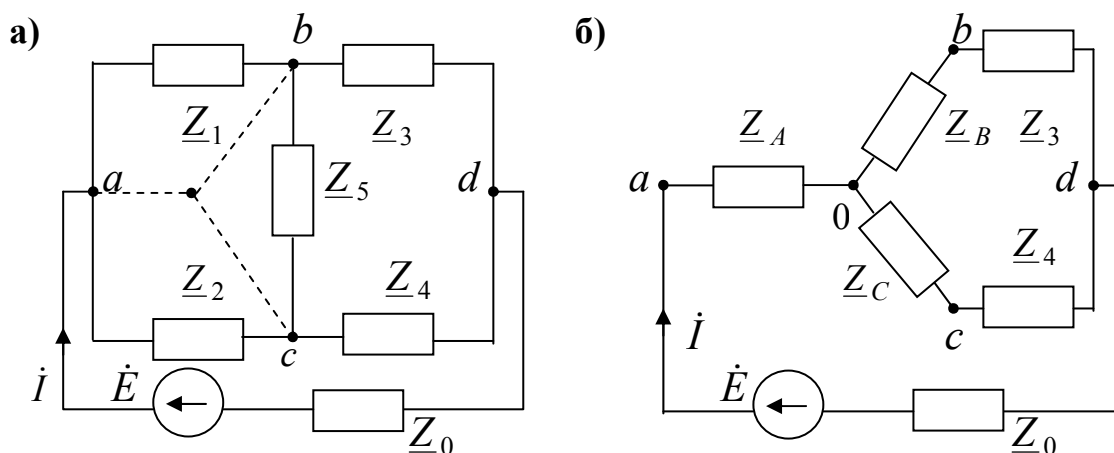


Рис.4.15

а). Заменяем треугольник $\underline{Z}_1, \underline{Z}_5, \underline{Z}_2$ на эквивалентную звезду $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$; при этом мостовая схема преобразуется в схему с последовательно-параллельным соединением элементов (рис.4.15,б).

б). Сопротивления треугольника $\underline{Z}_1, \underline{Z}_5, \underline{Z}_2$ одинаковы и поэтому сопротивления эквивалентной звезды в соответствии с формулой (4.10 а) составят: $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\Delta / 3 = 3/3 = 1$ Ом.

в). Находим сопротивление участка цепи относительно точек a и d

$$\underline{Z}_{ad} = \underline{Z}_A + \frac{(\underline{Z}_B + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_C + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_C + \underline{Z}_4} = 1 + \frac{(1+1)(1+2)}{1+1+1+2} = 1 + 1,2 = 2,2 \text{ Ом.}$$

г). Находим сопротивление всей цепи $\underline{Z}_\Sigma = \underline{Z}_0 + \underline{Z}_{ad} = 0,8 + 2,2 = 3$ Ом.

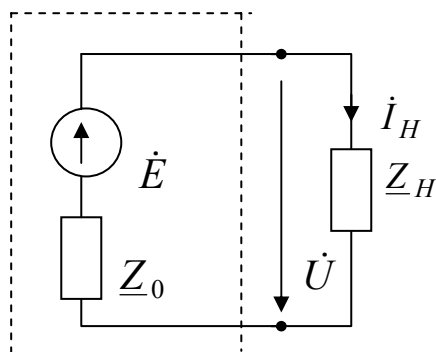
д). Находим ток источника ЭДС $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_\Sigma} = \frac{30}{3} = 10$ А.

Предлагаем читателю найти ток $\dot{I}$, предварительно преобразовав звезду $\underline{Z}_1, \underline{Z}_3, \underline{Z}_5$ в эквивалентный треугольник.

3. Преобразование источника ЭДС в эквивалентный источник тока и обратное преобразование

В теории цепей источники энергии изображают либо в виде источника ЭДС (последовательная цепь - рис.4.16,а), либо в виде источника тока (параллельная цепь - рис.4.16,б).

а)



б)

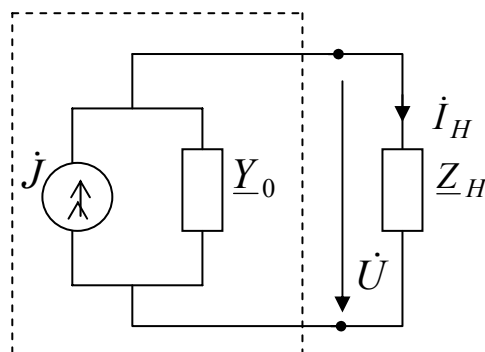


Рис.4.16

На этих схемах: $\dot{E}$ – комплексная ЭДС источника; $\underline{Z}_0$ – его комплексное внутреннее сопротивление; $\dot{J}$ – комплексный ток источника тока; $\underline{Y}_0$ – его комплексная внутренняя проводимость.

У источника ЭДС $\dot{E} = \text{const}$ и остается неизменной при всех режимах работы (от холостого хода до короткого замыкания). У источника тока $\dot{J} = \text{const}$ также не зависит от режима работы цепи.

Обе схемы источников равноценны и могут быть эквивалентно преобразованы друг в друга. Из условий эквивалентности (глава 3.15) вытекает, что у эквивалентных схем*

$$\dot{J} = \dot{E} / \underline{Z}_0 ; \quad \underline{Y}_0 = 1 / \underline{Z}_0 \quad \text{или} \quad \dot{E} = \dot{J} / \underline{Y}_0 ; \quad \underline{Z}_0 = 1 / \underline{Y}_0 . \quad (4.12)$$

* Вывод этих соотношений имеется в [1-4].

В цепях, где поддерживается неизменность напряжения у потребителей, источники энергии изображаются на схемах, как правило, в виде источников ЭДС, а в цепях со стабилизированным током – в виде источников тока.

Заметим, что идеальный источник ЭДС ($\underline{Z}_0=0$) и идеальный источник тока ($\underline{Y}_0=0$) эквивалентно преобразовать друг в друга невозможно.

Пример 4.25. Два источника ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ включены параллельно и работают на одно нагрузочное сопротивление $\underline{Z}_H$ (рис.4.17,а). Параметры источников и сопротивление нагрузки известны: $\dot{E}_1 = 120\text{ В}$; $\dot{E}_2 = 115\text{ В}$; $\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{02} = (1 + j2)\text{ Ом}$; $\underline{Z}_H = 10\text{ Ом}$. Требуется определить показания амперметра А и вольтметра V электромагнитной системы.

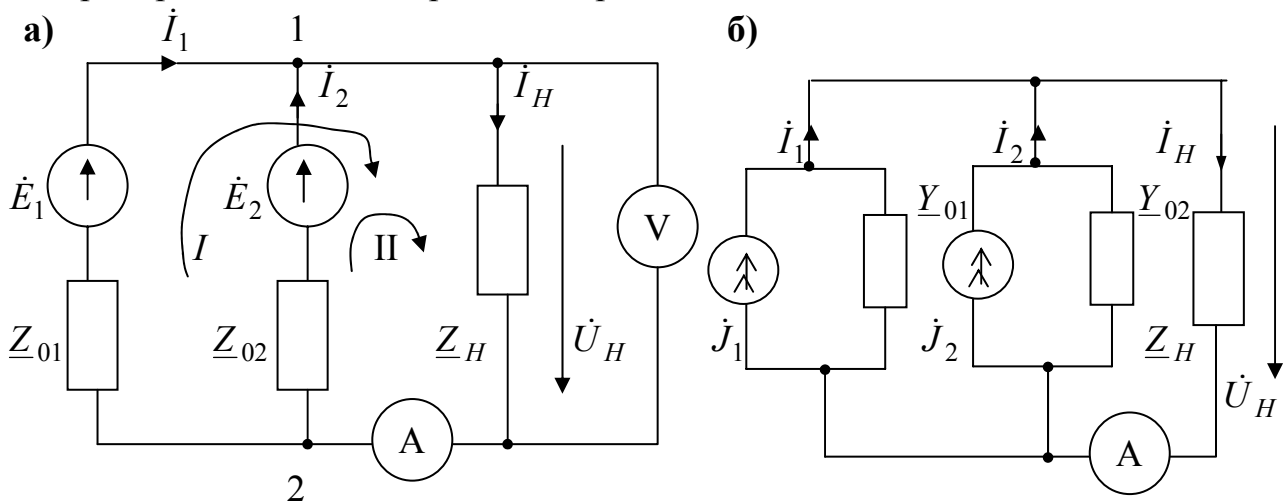


Рис.4.17

Решение. Используем эквивалентные преобразования источников ЭДС в источники токов и обратные преобразования.

1. Преобразуем оба источника ЭДС в эквивалентные источники тока (рис.4.17,б), воспользовавшись соотношениями (4.12)

$$\dot{J}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_{01}} = \frac{120}{1 + j2} = (24 - j48)\text{ А}; \quad \underline{Y}_{01} = \frac{1}{\underline{Z}_{01}} = \frac{1}{1 + j2} = (0,2 - j0,4)\text{ См};$$

$$\dot{J}_2 = \frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_{02}} = \frac{150}{1 + j2} = (23 - j46)\text{ А}; \quad \underline{Y}_{02} = \frac{1}{\underline{Z}_{02}} = \frac{1}{1 + j2} = (0,2 - j0,4)\text{ См}.$$

2. Объединяем эти источники тока в один по известным соотношениям для цепи с параллельным соединением элементов (табл.4.4, поз.3)

$$\dot{J} = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = (47 - j94)\text{ А}; \quad \underline{Y}_0 = \underline{Y}_{01} + \underline{Y}_{02} = (0,4 - j0,8)\text{ См}.$$

В результате получаем схему, представленную на рис.4.16,б.

3. Преобразуем результирующий источник тока $\dot{J}$ в эквивалентный источник ЭДС, воспользовавшись соотношениями (4.12)

$$\dot{E} = \frac{\dot{J}}{\underline{Y}_0} = \frac{47 - j94}{0,4 - j0,8} = 117,5\text{ В}; \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_0} = \frac{1}{0,4 - j0,8} = (0,5 - j1)\text{ Ом}$$

и получаем последовательную цепь (рис.4.16,а), ток которой определяется из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_H} = \frac{117,5}{10,5 + j1} = (11,08 - j1,056) = 11,13e^{-j5,5^\circ} \text{ А.}$$

Модуль этого тока $I_H = 11,13 \text{ А}$ соответствует показанию амперметра А. Комплексное напряжение на нагрузке

$$\dot{U}_H = \dot{I}_H \underline{Z}_H = (11,08 - j1,056) \cdot 10 = 110,8 - j10,56 = 111,3e^{-j5,5^\circ} \text{ В.}$$

Его модуль $U_H = 111,3 \text{ В}$ соответствует показанию вольтметра V.

4. Для проверки решения найдем комплексные токи первого $\dot{I}_1$ и второго $\dot{I}_2$ источника и затем применим первый закон Кирхгофа к узлу (1) цепи.

Комплексный ток $\dot{I}_1$ определяется на основании 2-го закона Кирхгофа, для контура [I], образованного ветвью первого источника и сопротивлением $\underline{Z}_H$. Обходя этот контур по часовой стрелке, получаем $\dot{E}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{01} + \dot{U}_H$, откуда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_H}{\underline{Z}_{01}} = \frac{120 - (110,8 - j10,56)}{1 + j2} = \frac{9,2 + j10,56}{1 + j2} \cdot \frac{1 - j2}{1 - j2} = \frac{30,32 - j7,84}{5} = (6,06 - j1,56) \text{ А.}$$

Комплексный ток $\dot{I}_2$ определяется по второму закону Кирхгофа, составленного для контура [II], образованного ветвью второго источника и сопротивлением $\underline{Z}_H$. Обходя этот контур по часовой стрелке, получаем

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_H}{\underline{Z}_{02}} = \frac{115 - (110,8 - j10,56)}{1 + j2} = \frac{4,2 + j10,56}{1 + j2} \cdot \frac{1 - j2}{1 - j2} = \frac{25,32 - j2,16}{5} = (5,06 - j0,43) \text{ А.}$$

Применяя первый закон Кирхгофа к узлу (1) цепи, находим $\dot{I}_H = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (6,06 - j1,56) + (5,06 + j0,43) = (11,12 - j1,13) \text{ А}$. Полученный результат совпадает со значением тока $\dot{I}_H$, найденным выше другим способом. Таким образом, задача решена верно.

4.11. Дополнительные задания к главе 4. Вопросы и примеры для самопроверки

1. Известны напряжение и ток на зажимах некоторого двухполюсника $u = 282 \sin(942t - 20^\circ) \text{ В}$; $i = 14,1 \sin(942t - 50^\circ)$. Записать ток и напряжение этого двухполюсника в виде комплексных действующих значений в показательной и алгебраической формах записи.

Ответы: $\dot{U} = 200e^{-j20^\circ} = (188 - j68,4) \text{ В}$; $\dot{I} = 10e^{j50^\circ} = (6,43 - j7,7) \text{ А}$.

2. Известны комплексный ток и комплексное напряжение на зажимах некоторого двухполюсника $\dot{I} = 10e^{j60^\circ}$ А; $\dot{U} = 100e^{j30^\circ}$ В. Найти мгновенные значения тока и напряжения, если частота цепи $f = 50$ Гц.

Ответы: $i = 14,1 \sin(314t + 60^\circ)$ А; $u = 141 \sin(314t + 30^\circ)$ В.

3. В условиях задания 1 найти активное, реактивное и полное сопротивления эквивалентной последовательной цепи.

Ответы: $R = 17,3$ Ом; $X = 10$ Ом; $z = 20$ Ом.

4. В условиях задания 1 найти активную, реактивную и полную проводимости эквивалентной параллельной цепи.

Ответы: $G = 0,043$ См; $b = 0,025$ См; $y = 0,05$ См.

5. В условиях задания 1 найти активную, реактивную и полную мощности двухполюсника.

Ответы: $P = 1732$ Вт; $Q = 1000$ вар; $S = 2000$ ВА.

6. Рассчитать цепь примера 3.17 символическим методом.

7. Вывести выражение резонансной частоты для цепи, представленной в табл.4.5, поз.6, если параметры R , L и C всех ее элементов известны.

8. Вывести выражение резонансной частоты для цепи, представленной в табл.4.5 поз.7, если параметры R , L и C всех ее элементов известны.

9. Для последовательной цепи (табл.3.2, поз.1) известны активное и реактивное сопротивления ее элементов $R = 3$ Ом, $X = 4$ Ом. Определить активную и реактивную проводимости эквивалентной параллельной цепи (табл.3.3, поз.1).

Ответы: $G_{\Sigma} = 0,12$ См; $b_{\Sigma} = 0,16$ См.

10. Комплексные сопротивления всех трех ветвей треугольника (рис.4.14) одинаковы $\underline{Z}_{\Delta} = (3 + j9)$ Ом. Определить комплексные сопротивления эквивалентной звезды.

Ответы: $\underline{Z}_{\text{зв}} = (1 + j3)$ Ом.

11. Известны параметры источника ЭДС $\dot{E} = j10$ В, $\underline{Z}_0 = -j1$ Ом. Определить параметры эквивалентного источника тока.

Ответы: $\dot{J} = -10$ А; $\underline{Y} = +j1$ См.

12. Определить реактивное сопротивление цепи, представленной в табл.4.5 поз.4, используя формулы преобразования параллельного участка R, L в эквивалентный последовательный участок.

13. Определить реактивную проводимость цепи, представленной в табл.4.5 поз.5, используя формулы преобразования последовательного участка R, L в эквивалентный параллельный участок.

14. Ответить на вопросы 7,8,10 любого из шести вариантов раздела 2 сборника тестовых карт [6].

15. Ответить на вопросы 1,2,3 любого из шести вариантов раздела 3 сборника тестовых карт [6].

16. Рассмотреть примеры с решениями 2; 3,а; 3,б; 4,а; 4,б; из методического сборника [7].

Глава 5

Методы расчета сложных цепей синусоидального тока

5.1. Введение

Сложной называют электрическую цепь, имеющую разветвленную структуру и содержащую несколько источников энергии (2.7).

Существует целый ряд методов расчета таких цепей. Все они основаны на законах Кирхгофа. В данном учебном пособии рассматриваются следующие: а) метод расчета, основанный на непосредственном применении 1-го и 2-го законов Кирхгофа; б) метод контурных токов; в) метод узловых напряжений; г) метод эквивалентного источника; д) метод наложения^{*}.

5.2. Метод расчета, основанный на непосредственном применении 1-го и 2-го законов Кирхгофа

Для расчета цепи этим методом (2.7 гл.2) надо составить систему уравнений, общее число которых соответствует числу неизвестных токов (т.е. числу ветвей цепи).

Сначала составляют уравнения по первому закону Кирхгофа, (как более простые в написании). При этом число таких уравнений берется на единицу меньше общего числа узлов цепи (последнее уравнение есть следствие всех предыдущих и не вносит ничего нового). Оставшиеся уравнения (до полной системы) составляют по второму закону Кирхгофа для любых произвольно выбранных контуров цепи.

Предварительно следует задать (произвольно) направление комплексных токов во всех ветвях цепи и направление обходов выбранных контуров. Произвольность этого выбора не влияет на конечный результат расчета.

При составлении уравнений по 1-му закону Кирхгофа (в соответствии с 4.5 гл.4) все комплексные токи, направленные к узлу цепи берутся со знаком (+), а направленные от узла – со знаком (–).

При составлении уравнений по 2-му закону Кирхгофа (в соответствии с 4.5 гл.4) все комплексные ЭДС и токи, совпадающие по направлению с выбранным направлением обхода контура, берутся со знаком (+), а не совпадающие с ним – со знаком (–).

Пример 5.1. Для цепи, изображенной на рис.5.1,а, известны все $\dot{E}$ и все $\underline{Z}$. Требуется определить комплексные токи всех ветвей, непосредственно используя первый и второй законы Кирхгофа.

Решение. В данной цепи шесть ветвей и, следовательно, шесть неизвестных токов. Поэтому для их определения необходимо составить систему из шести уравнений.

^{*} Экспериментальное исследование сложной цепи синусоидального тока осуществляется в лабораторной работе N 3 [8].

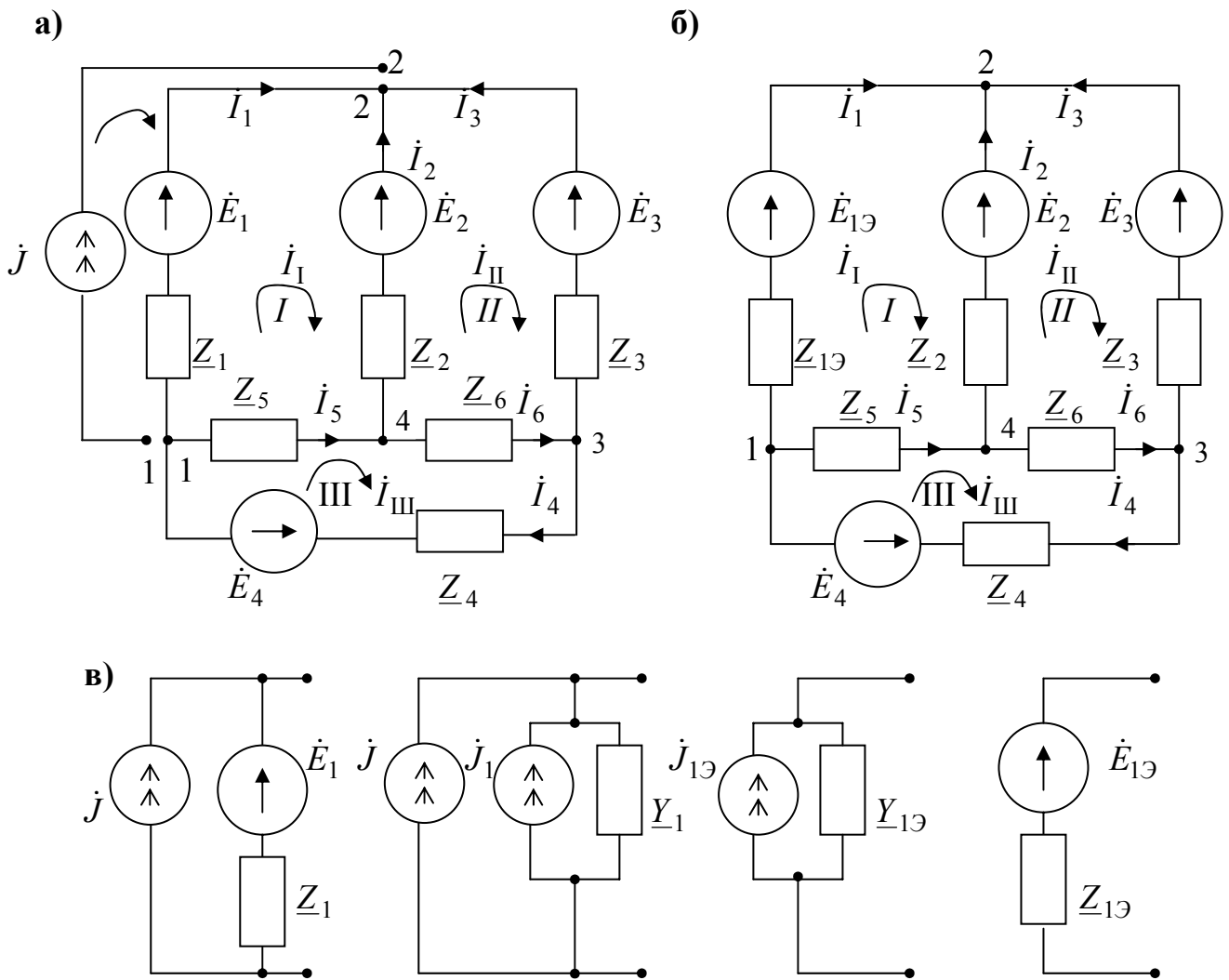


Рис.5.1

По 1-му закону Кирхгофа составляем три уравнения для узлов 1, 2 и 3 (всего в цепи четыре узла). Оставшиеся три уравнения составляем по 2-му закону Кирхгофа для контуров I, II, III. Принятые при этом направления комплексных токов во всех ветвях цепи, а также выбранные контуры и направления их обходов показаны на рис.5.1,а. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{для узла 1} && -\dot{I}_1 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0, \\
 &\text{для узла 2} && \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0, \\
 &\text{для узла 3} && -\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 0, \\
 &\text{для контура I} && \dot{I}_1 \underline{Z}_1 - \dot{I}_2 \underline{Z}_2 - \dot{I}_5 \underline{Z}_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2, \\
 &\text{для контура II} && \dot{I}_2 \underline{Z}_2 - \dot{I}_3 \underline{Z}_3 - \dot{I}_6 \underline{Z}_6 = \dot{E}_2 - \dot{E}_3, \\
 &\text{для контура III} && \dot{I}_4 \underline{Z}_4 + \dot{I}_5 \underline{Z}_5 + \dot{I}_6 \underline{Z}_6 = -\dot{E}_4.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Решая эту систему, находим комплексные токи во всех ветвях цепи.

Если схема содержит источник тока (например, источник тока $\dot{J}$, который подключается к узлам 1 и 2 цепи), то его влияние на работу цепи можно учесть двумя способами. Во-первых – преобразовать этот источник тока в эквивалентный источник ЭДС, в соответствии с рассмотренными в гл.4 правилами и получить цепь, схема которой представлена на рис.5.1,б.

Последовательность преобразования участка схемы с параллельным соединением источника тока $\dot{J}$ и источника ЭДС $\dot{E}_1$ в эквивалентный источник $E_{1Э}$ показана для этого случая на рис.5.1,в. Здесь $\dot{J}_1 = \dot{E}_1 / \underline{Z}_1$, $\underline{Y}_1 = 1 / \underline{Z}_1$, $\dot{J}_{1Э} = \dot{J} + \dot{J}_1$, $\underline{Y}_{1Э} = \underline{Y}_1$, $\dot{E}_{1Э} = \dot{I}_Э / \underline{Y}_{1Э}$, $\underline{Z}_{1Э} = 1 / \underline{Y}_{1Э}$. Во-вторых – непосредственно учесть наличие источника тока $\dot{J}$ в уравнениях, составленных по первому закону Кирхгофа для тех узлов цепи, к которым этот источник подсоединен. В нашем примере изменятся только уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 2. Для узла 1 получим $-\dot{I}_1 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 - \dot{J} = 0$, а для узла 2 $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{J} = 0$. При решении системы (5.1) известный ток $\dot{J}$ следует перенести здесь в правую часть указанных уравнений с противоположным знаком.

Пример 5.2. Два источника энергии (рис.5.2,а) работают параллельно на одну нагрузку. Параметры источников и нагрузки известны: $\dot{J}_1 = (24 - j48)$ А; $\underline{Y}_{01} = (0,2 - j0,4)$ См; $\dot{E}_2 = 115$ В; $\underline{Z}_{02} = (1 + j2)$ Ом; $\underline{Z}_H = 10$ Ом. Требуется определить комплексные токи всех ветвей цепи, используя непосредственно 1-й и 2-й законы Кирхгофа.

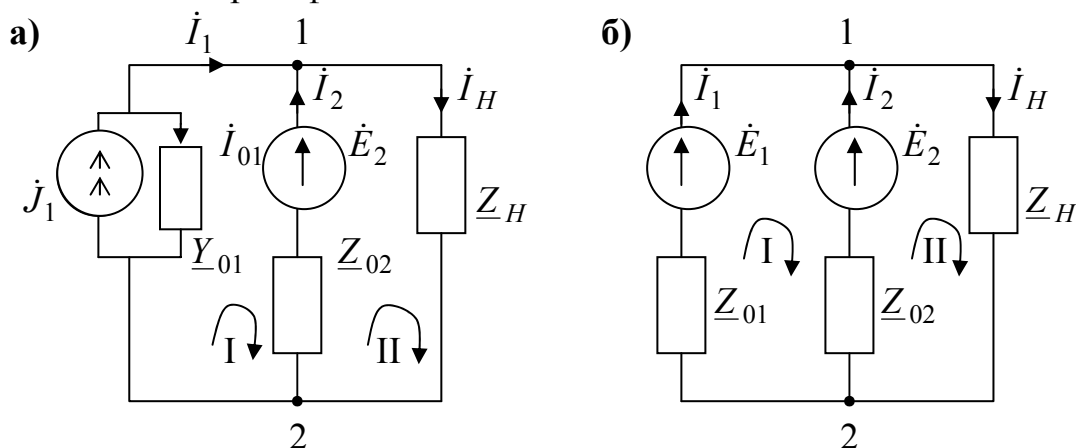


Рис.5.2

Решение. Возможны два варианта решения этой задачи: с преобразованием источника тока в эквивалентный источник ЭДС и без такого преобразования.

Расчет цепи примера 5.2 с предварительным преобразованием источника тока в эквивалентный источник ЭДС.

1. Преобразуем источник тока на схеме рис.5.2,а в эквивалентный источник ЭДС, воспользовавшись правилами, изложенными в главе 4:

$$\dot{E}_1 = \dot{J}_1 \underline{Z}_{01} = (24 - j48) (1 + j2) = 24 - j48 + j48 + 96 = 120 \text{ В};$$

$$\underline{Z}_{01} = 1 / \underline{Y}_{01} = 1 / (0,2 - j0,4) = (1 + j2) \text{ Ом}.$$

При этом схема цепи приобретает вид, показанный на рис.5.2,б. В этой цепи три неизвестных тока и, следовательно, система уравнений должна содержать три уравнения: одно по первому закону Кирхгофа (в цепи два узла), а оставшиеся два – по второму закону Кирхгофа.

2. Выбираем направления комплексных токов во всех ветвях цепи и направления обхода двух произвольно выбранных контуров так, как это показано на рис.5.2,б.

3. Составляем систему уравнений по образцу примера 5.1 и получаем

$$\begin{array}{l} \text{узел 1} \\ \text{контур I} \\ \text{контур II} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_H = 0 \\ \dot{I}_1 \underline{Z}_{01} - \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} + \dot{I}_H \underline{Z}_H = \dot{E}_2 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

4. Понижаем порядок системы уравнений. С этой целью выразим ток $\dot{I}_2$ через $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_H$. Из первого уравнения находим, что $\dot{I}_2 = \dot{I}_H - \dot{I}_1$. Подставляем это значение $\dot{I}_2$ во второе и третье уравнения и получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 \underline{Z}_{01} - (\dot{I}_H - \dot{I}_1) \underline{Z}_{02} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ (\dot{I}_H - \dot{I}_1) \underline{Z}_{02} + \dot{I}_H \underline{Z}_H = \dot{E}_2 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{02}) - \dot{I}_H \underline{Z}_{02} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ -\dot{I}_1 \underline{Z}_{02} + \dot{I}_H (\underline{Z}_{02} + \underline{Z}_H) = \dot{E}_2 \end{array} \right.$$

Подставляя численные значения известных величин, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 (2+j4) - \dot{I}_H (1+j2) = 5 \\ -\dot{I}_1 (1+j2) + \dot{I}_H (11+j2) = 115 \end{array} \right.$$

5. Решаем полученную систему уравнений и находим точки $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_H$. Для этого воспользуемся теорией определителей.

Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2+j4) & -(1+j2) \\ -(1+j2) & (11+j2) \end{vmatrix} = (2+j4)(11+j2) - (1+j2)(1+j2) = 22+j44+j4-8- \\ - (1+j2+j2-4) = 17+j44 = 47,2e^{j68,8^\circ}.$$

Первый дополнительный определитель получается из главного заменой первого столбца свободными членами:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -(1+j2) \\ 115 & (11+j2) \end{vmatrix} = 5(11+j2) + 115(1+j2) = \\ = 55+j10+115+j230 = 170+j240 = 294e^{j54,7^\circ}.$$

Второй дополнительный определитель получается из главного заменой второго столбца свободными членами:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (2+j4) & 5 \\ -(1+j2) & 115 \end{vmatrix} = 115(2+j4) + 5(1+j2) = \\ = 230 + j460 + 5 + j10 = 235 + j470 = 525e^{j63,4^\circ}.$$

Искомые токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_H$

$$\dot{I}_1 = \Delta_1 / \Delta = 294e^{j54,7^\circ} / 47,2e^{j68,8^\circ} = 6,23e^{-j14^\circ} = (6,04 - j1,52) \text{ А};$$

$$\dot{I}_H = \Delta_2 / \Delta = 525,5e^{j63,4^\circ} / 47,2e^{j68,8^\circ} = 11,1e^{-j5,4^\circ} = (11,06 - j1,04) \text{ А}.$$

6. Находим комплексный ток $\dot{I}_2$ из уравнения, составленного по 1-му закону Кирхгофа для узла 1

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_H - \dot{I}_1 = (11,06 - j1,04) - (6,04 - j1,52) = (5,02 + j0,48) = 5,04e^{j5,5^\circ} \text{ А}.$$

7. Проверку решения осуществляем, используя 2-й закон Кирхгофа для любого из контуров цепи. Предоставляем читателю возможность проделать это самостоятельно. Заметим, что найденный ток нагрузки $\dot{I}_H$ совпадает с его значением, полученным в примере 4.2 гл.4.

Расчет цепи примера 5.2 без преобразования источника тока в эквивалентный источник ЭДС.

В цепи на рис.5.2,а – три неизвестных тока: $\dot{I}_{01}$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_H$. Здесь $\dot{I}_{01}$ – ток во внутренней проводимости источника тока. Он связан с токами $\dot{J}$ и $\dot{I}_1$ соотношением, вытекающим из первого закона Кирхгофа: $\dot{J}_1 - \dot{I}_{01} = \dot{I}_1$ или $\dot{I}_{01} = \dot{J}_1 - \dot{I}_1$. Направления токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_H$ принимаем здесь такими же, как и на рис.5.2,б.

Для расчета такой цепи составляем три уравнения по законам Кирхгофа аналогично предыдущему случаю и с учетом того, что $\underline{Z}_{01} = 1/\underline{Y}_{01}$, а $\dot{I}_1 = \dot{J}_1 - \dot{I}_{01}$, получаем

$$\begin{cases} (\dot{J}_1 - \dot{I}_{01}) + \dot{I}_2 - \dot{I}_H = 0 \\ -\dot{I}_{01} \underline{Z}_{01} - \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} = -\dot{E}_2 \\ \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} + \dot{I}_H \underline{Z}_H = \dot{E}_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Решая полученную систему уравнений, находим искомые токи $\dot{I}_{01}$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_H$, а также $\dot{I}_1 = \dot{J}_1 - \dot{I}_{01}$. Результат решения должен в точности соответствовать расчету, выполненному с предварительным преобразованием источника тока в эквивалентный источник ЭДС. Для доказательства этого утверждения, покажем, что система уравнений (5.3) тождественна системе уравнений (5.2): а) третье уравнение (5.3) тождественно первому уравнению (5.2), так как правый контур цепи остался без изменений при указанных выше преобразованиях источника тока; б) первое уравнение (5.3) тождественно первому уравнению (5.2) поскольку $\dot{J}_1 - \dot{I}_{01} = \dot{I}_1$; в) второе уравнение (5.3) с учетом того, что $\dot{I}_{01} = \dot{J}_1 - \dot{I}_1$, получает вид $-(\dot{J}_1 - \dot{I}_1) \underline{Z}_{01} - \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} = -\dot{E}_2$ или $-\dot{J}_1 \underline{Z}_{01} + \dot{I}_1 \underline{Z}_{01} - \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} = -\dot{E}_2$. Здесь $\dot{J}_1 \underline{Z}_{01} = \dot{E}_1$ – ЭДС эквивалентного источника. Перенеся эту известную величину в правую часть, получаем $\dot{I}_1 \underline{Z}_{01} - \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} = -\dot{E}_2 + \dot{E}_1$, что полностью соответствует второму уравнению системы (5.2). Предоставляем читателю возможность самостоятельно произвести все вычисления и убедиться в том, что результаты обоих вариантов расчета одинаковы.

5.3. Метод контурных токов

В основе метода лежит представление о независимых контурах, по которым протекают независимые друг от друга контурные токи.

Независимым называется контур, который (при определенном порядке нумерации) содержит хотя бы одну новую ветвь.

На рис.5.1,а показана схема сложной цепи, в которой можно насчитать семь контуров (1.2 гл.1). Если рассматривать эти контуры в порядке I, II, III и далее, то независимыми окажутся только контуры I, II, III, поскольку каждый из них содержит новые ветви, не рассмотренные ранее. Так, в контуре I все ветви новые; в контуре II новыми являются ветви $\underline{Z}_3$ и $\underline{Z}_6$; в контуре III новой является ветвь $\underline{Z}_4$. Все остальные четыре контура цепи не содержат новых ветвей и в расчете не участвуют.

В каждом из трех независимых контуров цепи протекает свой контурный ток. На рис.5.1,а показаны произвольно (по часовой стрелке) принятые направления действия контурных токов $\dot{I}_I$, $\dot{I}_{II}$ и $\dot{I}_{III}$ в независимых контурах цепи.

Контурные токи – промежуточные неизвестные данного метода расчета. Относительно них составляется система уравнений (используется второй закон Кирхгофа). Легко заметить, что контурных токов меньше, чем токов в ветвях цепи. Это позволяет понизить порядок системы уравнений по сравнению с решением задачи по 1-му и 2-му законам Кирхгофа.

Методику составления уравнений для контурных токов рассмотрим на примере контура I. Составим для него уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_I (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{II} \underline{Z}_2 - \dot{I}_{III} \underline{Z}_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \quad (5.4)$$

В левой части этого уравнения представлены все напряжения первого контура. Здесь $\dot{I}_I (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5)$ – напряжение, создаваемое первым контурным током во всех сопротивлениях первого контура; $\dot{I}_{II} \underline{Z}_2$ – напряжение, создаваемое в сопротивлении $\underline{Z}_2$ первого контура током $\dot{I}_{II}$ второго контура, действующим противоположно току $\dot{I}_I$ и поэтому взятое со знаком (-); $\dot{I}_{III} \underline{Z}_5$ – напряжение, создаваемое в сопротивлении $\underline{Z}_5$ первого контура током $\dot{I}_{III}$ третьего контура, действующим противоположно току $\dot{I}_I$ и поэтому также взятое в уравнении со знаком (-).

Правая часть уравнения (5.4) состоит из алгебраической суммы ЭДС первого контура. Здесь $\dot{E}_1$ направлена согласно (в одну сторону) с направлением тока $\dot{I}_I$ и, следовательно, входит в уравнение со знаком (+), а $\dot{E}_2$ направлена встречно контурному току $\dot{I}_I$ и имеет знак (-).

Обобщим изложенное выше на всю систему уравнений цепи:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \dot{I}_I + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{II} + \underline{Z}_{13} \dot{I}_{III} = \dot{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21} \dot{I}_I + \underline{Z}_{22} \dot{I}_{II} + \underline{Z}_{23} \dot{I}_{III} = \dot{E}_{22} \\ \underline{Z}_{31} \dot{I}_I + \underline{Z}_{32} \dot{I}_{II} + \underline{Z}_{33} \dot{I}_{III} = \dot{E}_{33} \end{cases} \quad (5.5)$$

Сумму сопротивлений каждого контура будем называть *собственным сопротивлением контура* и обозначать для сокращения записи одним сопротивлением с двойным индексом вида $\underline{Z}_{KK}$. Для нашего примера имеем следующие собственные сопротивления контуров: $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_6$; $\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_4$. Все собственные сопротивления входят в уравнения (5.5) со знаком (+).

Сумму сопротивления общих для любых двух смежных независимых контуров будем называть *взаимным сопротивлением* контуров и обозначать его двойной индексацией вида $\underline{Z}_{KM}$. Взаимные сопротивления входят в уравнение для каждого независимого контура со знаком (+), если контурные токи смежных контуров направлены в них в одну сторону (согласно) и со знаком (-), – если в разные стороны (встречно). В нашем примере взаимное сопротивление первого и второго контуров $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_2$; взаимное сопротивление первого и третьего контуров $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_5$; взаимное

сопротивление второго и третьего контуров $Z_{23} = Z_{32} = -Z_6$. Все они взяты со знаком $(-)$ потому, что контурные токи в каждом из смежных контуров направлены встречно друг другу.

Алгебраическую сумму ЭДС каждого независимого контура будем обозначать одной буквой с двойным индексом вида $\dot{E}_{KK}$. Те ЭДС этой суммы, направления которых совпадают с направлением действия контурного тока, берутся со знаком $(+)$, а остальные – со знаком $(-)$. В нашем примере алгебраическая сумма ЭДС первого независимого контура $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$; второго $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2 - \dot{E}_3$ и третьего $\dot{E}_{33} = -\dot{E}_4$.

Решая полученную систему уравнений, находим контурные токи $\dot{I}_I, \dot{I}_{II}$ и $\dot{I}_{III}$. Однако на этом решение задачи не завершается, поскольку надо найти еще токи во всех ветвях цепи.

Во внешних ветвях (в нашем примере это ветви с сопротивлением Z_1, Z_3 и Z_4) их токи равны контурным (с учетом знака).

Во внутренних (смежных) ветвях (Z_2, Z_5 и Z_6) токи ветвей (в соответствии с первым законом Кирхгофа) равны алгебраической сумме контурных токов смежных контуров. В нашем примере (рис.5.1,а): токи внешних ветвей $\dot{I}_1 = \dot{I}_I, \dot{I}_3 = -\dot{I}_{II}, \dot{I}_4 = \dot{I}_{III}$; токи внутренних ветвей $\dot{I}_2 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_I, \dot{I}_5 = \dot{I}_{III} - \dot{I}_I, \dot{I}_6 = \dot{I}_{III} - \dot{I}_{II}$.

Если в цепи имеется источник тока (как это показано на рис.5.1,а между узлами 1 и 2), его можно преобразовать в эквивалентный источник ЭДС по известным из предыдущего изложения правилам. Если этого не делать, тогда следует произвольно выбрать в цепи контур, через который замыкается известный ток $\dot{J}$ источника (следует выбрать самый простой – для облегчения расчетов). Это будет контур с известным током и его введение не вызовет повышение порядка системы уравнений. На его сопротивлениях возникают напряжения вида $\underline{Z}\dot{J}$, величины которых известны из условий задачи, и которые следует учесть (со знаком "+" или "-") в уравнениях для тех независимых контуров в состав которых входят эти сопротивления. При этом, если ток $\dot{J}$ совпадает с контурным током смежного контура, напряжение $\dot{J}\underline{Z}$ берется со знаком $(+)$, а если не совпадает – со знаком $(-)$.

Для схемы на рис.5.1,а выбираем контур для тока $\dot{J}$ образованный ветвью с сопротивлением Z_1 и ветвью с источником тока. При этом известный ток $\dot{J}$ создает на сопротивлении Z_1 напряжение $\dot{J}Z_1$, направленное противоположно контурному току $\dot{I}_I$. Поэтому оно входит в первое уравнение системы (5.5) со знаком $(-)$: $\dot{I}_I Z_{11} + \dot{I}_{II} Z_{12} + \dot{I}_{III} Z_{13} - \dot{J} Z_1 = \dot{E}_{11}$. При решении задачи напряжение $\dot{J}Z_1$ следует перенести (как известную величину) в правую часть уравнения с противоположным знаком.

Пример 5.3. В условиях примера 5.2 определить токи во всех ветвях цепи методом контурных токов.

Решение. Расчет может быть выполнен как с предварительным преобразованием источника тока в эквивалентный источник ЭДС, так и без

такого преобразования. Для удобства составления уравнений на рис.5.3 повторены схемы цепей рис.5.2.

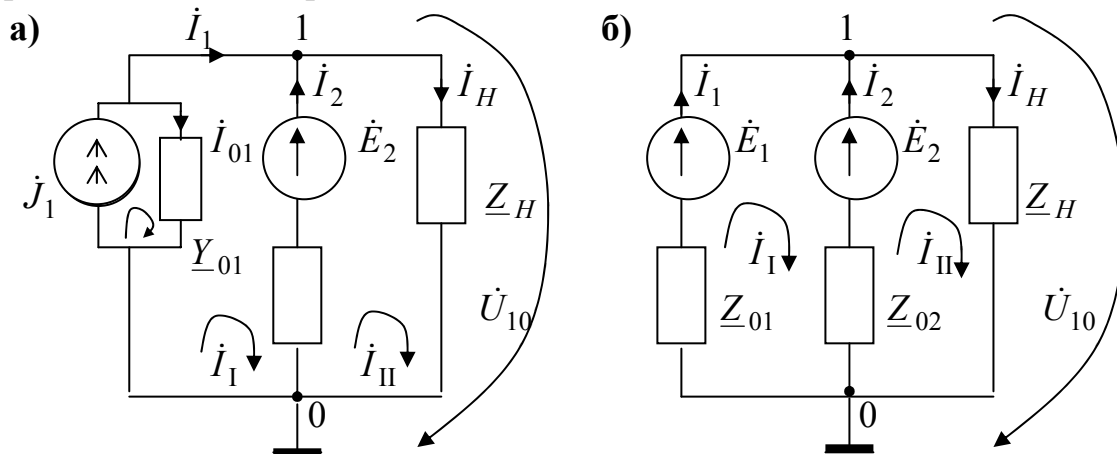


Рис.5.3

Расчет цепи примера 5.3 с предварительным преобразованием источника тока в эквивалентный источник ЭДС.

1. Находим параметры эквивалентного источника ЭДС

$$\dot{E}_1 = \dot{J} / \underline{Y}_{01} = 120 \text{ В}; \quad \underline{Z}_{01} = 1 / \underline{Y}_{01} = (1 + j2) \text{ Ом}.$$

2. Выбираем (произвольно) направления токов во всех ветвях цепи ($\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_H$), как это показано на рис.5.3,б.

3. Выбираем в качестве независимых контуры I и II и направления контурных токов $\dot{I}_I$ и $\dot{I}_{II}$ в них, как это показано на рис.5.3,б.

4. Составляем систему уравнений по образцу формул (5.5)

$$\begin{cases} \dot{I}_I \underline{Z}_{11} + \dot{I}_{II} \underline{Z}_{12} = \dot{E}_{11}; \\ \dot{I}_I \underline{Z}_{21} + \dot{I}_{II} \underline{Z}_{22} = \dot{E}_{22} \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \dot{E}_{11} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = 120 - 115 = 5 \text{ В}; & \dot{E}_{22} &= \dot{E}_2 = 115 \text{ В}; \\ \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{02} = (1 + j2) + (1 + j2) = (2 + j4) \text{ Ом}; & \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_{02} + \underline{Z}_H = (1 + j2) + 10 = (11 + j2) \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_{02} = -(1 + j2) \text{ Ом}. \end{aligned}$$

5. Рассчитываем контурные токи $\dot{I}_I$ и $\dot{I}_{II}$, воспользовавшись теорией определителей.

Главный определитель системы

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2 + j4) & -(1 + j2) \\ -(1 + j2) & (11 + j2) \end{vmatrix} = \\ &= (2 + j4)(11 + j2) - (1 + j2)(1 + j2) = 17 + j44 = 47,2e^{j68,8^\circ}. \end{aligned}$$

Первый дополнительный определитель получаем из главного заменой первого столбца свободными членами уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \dot{E}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -(1 + j2) \\ 115 & (11 + j2) \end{vmatrix} = \\ &= 5(11 + j2) + 115(1 + j2) = 170 + j240 = 294e^{j54,7^\circ}. \end{aligned}$$

Второй дополнительный определитель получаем из главного заменой второго столбца свободными членами уравнений.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \dot{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21} & \dot{E}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + j4 & 5 \\ -(1 + j2) & 115 \end{vmatrix} =$$

$$= 115(2 + j4) + 5(1 + j2) = 235 + j470 = 525,5e^{j63,4^\circ}.$$

Теперь определяем контурные токи цепи

$$\dot{I}_I = \Delta_1 / \Delta = 294e^{j54,7^\circ} / 47,2e^{j68,8^\circ} = 6,23e^{-j14,1^\circ} = 6,04 - j1,52 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{II} = \Delta_2 / \Delta = 525,5e^{j63,4^\circ} / 47,2e^{j68,8^\circ} = 11,1e^{-j5,4^\circ} = 11,06 - j1,04 \text{ А}.$$

6. Находим токи во всех ветвях цепи. Ток $\dot{I}_I$ в левой ветви цепи равен контурному току, так как совпадает с ним по направлению: $\dot{I}_I = \dot{I}_I = (6,04 - j1,52) \text{ А}$. Ток $\dot{I}_H$ в правой ветви цепи равен контурному току $\dot{I}_{II}$, поскольку совпадает с ним по направлению: $\dot{I}_H = \dot{I}_{II} = (11,06 - j1,04) \text{ А}$. Ток в средней ветви $\dot{I}_2$ равен алгебраической сумме контурных токов: $\dot{I}_2 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_I = (11,06 - j1,04) - (6,04 - j1,52) = (5,02 + j0,48)$. Здесь ток $\dot{I}_{II}$ взят со знаком (+), так как он совпадает по направлению с током ветви $\dot{I}_2$, а контурный ток $\dot{I}_I$ взят со знаком (−), так как его направление противоположно $\dot{I}_2$.

7. Проверку решения производим, воспользовавшись 1-м законом Кирхгофа для узла (1) исследуемой цепи. Предоставляем читателю возможность проделать это самостоятельно.

Расчет цепи примера 5.3 без предварительного преобразования источника тока в эквивалентный источник ЭДС

1. Выбираем направления токов во всех ветвях цепи, показанной на рис.5.3,а (такими же, как и на рис.5.3,б).

2. Выбираем независимые контуры такими же, как и в предыдущем расчете, направив контурные токи в них, как и раньше, по часовой стрелке.

3. Выбираем для известного тока $\dot{J}_1$ простой контур, состоящий из источника тока и сопротивления $\underline{Z}_{01} = 1/\underline{Y}_{01}$; направление контурного тока в нем принимаем по направлению действия $\dot{J}_1$, т.е. по часовой стрелке. Этот ток создает в сопротивлении $\underline{Z}_{01}$ напряжение $\dot{J}_1 \underline{Z}_{01}$, величина которого известна из условия задачи и должна быть учтена в уравнении для первого независимого контура. При этом в процессе решения системы это напряжение должно быть перенесено в правую часть уравнения с обратным знаком.

4. Составляем систему уравнений по образцу формул (5.5) и получаем

$$\begin{cases} \dot{I}_I \underline{Z}_{11} + \dot{I}_{II} \underline{Z}_{12} - \dot{J} \underline{Z}_{01} = \dot{E}_{11} \\ \dot{I}_I \underline{Z}_{21} + \dot{I}_{II} \underline{Z}_{22} = \dot{E}_{22} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{I}_I \underline{Z}_{11} + \dot{I}_{II} \underline{Z}_{12} = \dot{E}_{11} + \dot{J} \underline{Z}_{01} \\ \dot{I}_I \underline{Z}_{21} + \dot{I}_{II} \underline{Z}_{22} = \dot{E}_{22} \end{cases} \quad (5.7)$$

Здесь, как и в предыдущем варианте расчета, $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{02} = (2 + j4) \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{02} + \underline{Z}_H = (11 + j2) \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(1 + j2) \text{ Ом}$, $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2 = 115 \text{ В}$. Однако сумма ЭДС первого контура не соответствует предыдущему варианту расчета и составляет $\dot{E}_{11} = -\dot{E}_2 = -115 \text{ В}$.

5. Система уравнений (5.7) тождественна системе уравнений (5.6), так как в соответствии с формулой преобразования источника тока в эквивалентный

источник ЭДС $j_1 Z_{01} = \dot{E}_1 = 120$ В и правая часть первого уравнения $\dot{E}_{11} + j Z_{01} = -115 + 120 = 5$ В такая же как в предыдущем примере. Поэтому дальнейшее решение такое же, как и в предыдущем варианте расчета. Заметим, что результаты расчета данной цепи методом контурных токов совпадают с результатами ее расчета непосредственно по 1-му и 2-му законам Кирхгофа, полученными в примере 5.2.

5.4. Метод узловых напряжений (узловых потенциалов)

Метод * основан на положении о том, что токи во всех ветвях сложной цепи можно рассчитать, если известны напряжения на всех ее ветвях.

На рис.5.4,а представлена схема некоторой сложной цепи, имеющей шесть ветвей. Рассмотрим одну из ветвей этой цепи, расположенную между любыми двумя узлами "k" и "m" (рис.5.4,б). Применив второй закон Кирхгофа, и учитывая, что $Y_{km} = 1/Z_{km}$, получаем $\dot{I}_{km} Z_{km} - \dot{U}_{km} = \dot{E}_{km}$ или

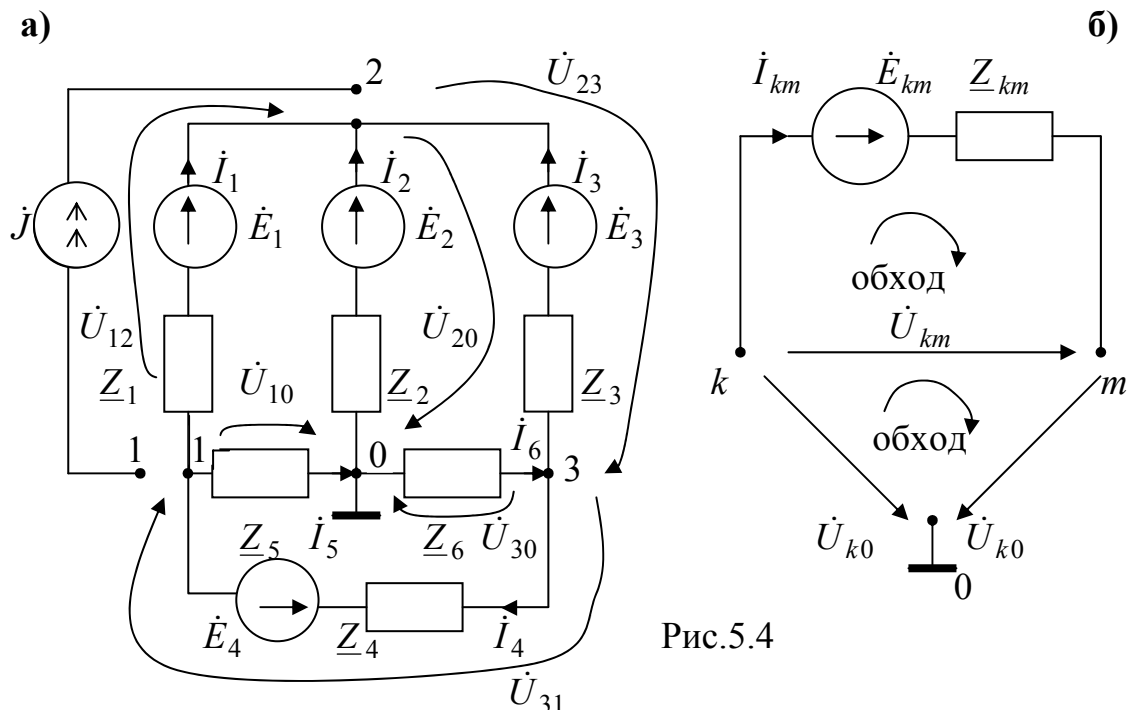


Рис.5.4

$$\dot{I}_{km} = (\dot{E}_{km} + \dot{U}_{km}) / Z_{km} = Y_{km} (\dot{E}_{km} + \dot{U}_{km}) . \quad (5.8)$$

В этой формуле ток, напряжение и ЭДС обозначены двойными индексами. При этом все они направлены (для удобства записи) от узла "k" к узлу "m". Если реальные токи, напряжения и ЭДС окажутся направлены в противоположную сторону, то они войдут в уравнение (5.8) с обратным знаком (со знаком "-"). Здесь $\dot{E}_{km}$ и Z_{km} – известные из условия задачи величины. Если, кроме того, найти напряжение $\dot{U}_{km}$, то ток $\dot{I}_{km}$ в этой ветви также будет найден.

В нашей схеме шесть ветвей и, следовательно, шесть неизвестных напряжений. Для их нахождения необходимо предварительно найти только те из них, которые действуют между каждым из узлов цепи и опорным узлом "O" (выбираются произвольно). Они называются *узловыми напряжениями*.

* В учебной литературе нет единого мнения по поводу названия этого метода.

Для схемы рис.5.4,а узловыми являются напряжения $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$ и $\dot{U}_{30}$. Все они направлены к опорному узлу "О". Если узловые напряжения известны, то напряжения между всеми остальными узлами легко находятся в соответствии со вторым законом Кирхгофа (рис.5.4,б) по формуле

$$\dot{U}_{km} = \dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}. \quad (5.8 \text{ а})$$

В нашем примере $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}$; $\dot{U}_{31} = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10}$; $\dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}$.

Заметим, что если опорный узел "0" заземлить, т.е. принять его электрический потенциал равным 0, то тогда узловые напряжения $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$ и $\dot{U}_{30}$ будут являться также электрическими потенциалами узлов 1, 2 и 3.

Узловые напряжения являются промежуточными неизвестными данного метода расчета. Относительно них составляется система уравнений. При этом используется первый закон Кирхгофа. Очевидно, что узловых напряжений меньше, чем токов ветвей. Поэтому данный метод позволяет существенно понизить порядок системы уравнений по сравнению с непосредственным применением 1-го и 2-го законов Кирхгофа. Рассмотрим составление системы уравнений по методу узловых напряжений. Согласно 1-му закону Кирхгофа, алгебраическая сумма комплексных токов, подходящих к любому узлу цепи, равна нулю. Каждый из этих токов определяется формулой (5.8). Тогда для каждого узла цепи имеем

$$\Sigma I_{km} = \Sigma \dot{E}_{km} \underline{Y}_{km} + \Sigma \dot{E}_{km} \dot{U}_{km} = 0, \quad \text{или} \quad \Sigma \underline{Y}_{km} (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) = -\Sigma \dot{E}_{km} \underline{Y}_{km}.$$

Здесь: $\Sigma \dot{E}_{km} \underline{Y}_{km}$ – сумма произведений ЭДС на проводимость всех ветвей, подходящих к рассматриваемому узлу цепи. Эти величины известны из условий задачи; $\Sigma \underline{Y}_{km} (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0})$ – сумма произведений проводимости ветвей на напряжения ветвей, где $\underline{Y}_{km}$ – известные из условий задачи величины, а $\dot{U}_{k0}$ и $\dot{U}_{m0}$ – неизвестные узловые напряжения.

Опуская ряд несложных промежуточных преобразований * получаем в результате систему уравнений относительно неизвестных узловых напряжений цепи в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} \underline{Y}_{11} + \dot{U}_{20} \underline{Y}_{12} + \dot{U}_{30} \underline{Y}_{13} &= \dot{J}_{11} \\ \dot{U}_{10} \underline{Y}_{21} + \dot{U}_{20} \underline{Y}_{22} + \dot{U}_{30} \underline{Y}_{23} &= \dot{J}_{22} \\ \dot{U}_{10} \underline{Y}_{31} + \dot{U}_{20} \underline{Y}_{32} + \dot{U}_{30} \underline{Y}_{33} &= \dot{J}_{33} \end{aligned} \right\}, \quad (5.9)$$

где $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$, $\dot{U}_{30}$ – *неизвестные узловые напряжения*; $\underline{Y}_{11}$ $\underline{Y}_{22}$ $\underline{Y}_{33}$ – *собственные проводимости узлов*, т.е. сумма проводимости всех ветвей, подходящих к данному узлу цепи; в уравнения (5.9) они *всегда входят со знаком (+)*; $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$; $\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31}$; $\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32}$ – *взаимные проводимости узлов*, т.е. сумма проводимости всех ветвей цепи, находящихся между узлами 1-2, 1-3 и 2-3; их численные значения *всегда входят в уравнения (5.9) со знаком (-)*; $\dot{J}_{11}$, $\dot{J}_{22}$, $\dot{J}_{33}$ – *известные из условий задачи величины*, представляющие собой сумму произведений ЭДС на проводимость ($\Sigma \dot{E} \underline{Y}$) всех ветвей, подходящих к

* Подробный вывод этих уравнений имеется в [1], [2], [3], [4].

данному узлу. Если при этом $\dot{E}$ направлена к узлу, то произведение $\dot{E}\underline{Y}$ этой ветви берется со знаком (+), а если $\dot{E}$ направлена от узла, – со знаком (–). Заметим, что произведение $\dot{E}\underline{Y}$ каждой ветви можно рассматривать как ток эквивалентного источника тока этой ветви.

Решая полученную систему уравнений, находим узловые напряжения $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$, $\dot{U}_{30}$, затем напряжения на всех ветвях цепи в соответствии с формулой (5.8,а) и, наконец, токи во всех ее ветвях, используя формулу (5.8).

Если разветвленная цепь имеет только два узла (например, трехфазная цепь, соединенная звездой), то система (5.9) превращается в одно уравнение следующего вида:

$$\dot{U}_{10}\underline{Y}_{11} = \dot{J}_{11}. \quad (5.9 \text{ а})$$

Пример 5.4. Составить систему уравнений по методу узловых напряжений и определить комплексные токи во всех шести ветвях цепи, представленной на рис.5.4,а.

Решение. 1. Предварительно выбираем (произвольно) направления токов во всех ветвях цепи, как это показано на рис.5.4,а.

2. Выбираем (произвольно) в качестве опорного узел номер 4 цепи и обозначаем его индексом "0". В нашей цепи четыре узла и, следовательно, три узловых напряжения: $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$, $\dot{U}_{30}$. Их направление к опорному узлу показано на схеме стрелками.

3. Система уравнений относительно неизвестных узловых напряжений соответствует формулам (5.9). Здесь собственные проводимости узлов: $\underline{Y}_{11} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_5 + 1/\underline{Z}_4$, $\underline{Y}_{22} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3$, $\underline{Y}_{33} = 1/\underline{Z}_3 + 1/\underline{Z}_6 + 1/\underline{Z}_4$; взаимные проводимости узлов: $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -1/\underline{Z}_1$, $\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = -1/\underline{Z}_4$, $\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -1/\underline{Z}_3$; свободные члены уравнений: $\dot{J}_{11} = -\dot{E}_1/\underline{Z}_1 - \dot{E}_4/\underline{Z}_4$, $\dot{J}_{22} = \dot{E}_1/\underline{Z}_1 + \dot{E}_2/\underline{Z}_2 + \dot{E}_3/\underline{Z}_3$, $\dot{J}_{33} = \dot{E}_4/\underline{Z}_4 - \dot{E}_3/\underline{Z}_3$.

Решая полученную систему уравнений, определяем неизвестные узловые напряжения $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$, $\dot{U}_{30}$, а затем и напряжения на всех остальных ветвях цепи. В соответствии с формулой $\dot{U}_{km} = \dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}$ и при заданных на рис.5.4,а направлениях напряжений ветвей имеем $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}$; $\dot{U}_{31} = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10}$; $\dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}$.

4. Находим токи во всех ветвях цепи, используя формулу (5.8). Ток $\dot{I}_1$ направлен от узла 1 к узлу 2, и поэтому при принятой индексации токов является током $[\dot{I}_{12}]$. Здесь в соответствии с формулой (5.8) узел $k=1$, а узел $m=2$. Тогда: $\dot{I}_1 = [\dot{I}_{12}] = \underline{Y}_{12} (\dot{E}_{12} + \dot{U}_{12}) = 1/\underline{Z}_1 [\dot{E}_1 + \dot{U}_{12}]$.

Аналогичным образом определяются токи во всех остальных ветвях цепи:

$$\dot{I}_2 = [\dot{I}_{02}] = \underline{Y}_{02} (\dot{E}_{02} + \dot{U}_{02}) = 1/\underline{Z}_2 [\dot{E}_2 - \dot{U}_{02}], \quad \text{где } \dot{U}_{02} = -\dot{U}_{20} \text{ и } \dot{E}_{02} = \dot{E}_2;$$

$$\dot{I}_3 = [\dot{I}_{32}] = \underline{Y}_{32} (\dot{E}_{32} + \dot{U}_{32}) = 1/\underline{Z}_3 [\dot{E}_3 - \dot{U}_{23}], \quad \text{где } \dot{U}_{32} = -\dot{U}_{23} \text{ и } \dot{E}_{32} = \dot{E}_3;$$

$$\dot{I}_4 = [\dot{I}_{31}] = \underline{Y}_{31} (\dot{E}_{31} + \dot{U}_{31}) = 1/\underline{Z}_4 [-\dot{E}_4 + \dot{U}_{31}], \quad \text{где } \dot{E}_{31} = -\dot{E}_4;$$

$$\dot{I}_5 = [\dot{I}_{10}] = \underline{Y}_{10} (\dot{E}_{10} + \dot{U}_{10}) = 1/\underline{Z}_5 [0 + \dot{U}_{10}] = \dot{U}_{10}/\underline{Z}_5, \quad \text{где } \dot{E}_{10} = 0;$$

$$\dot{I}_6 = [\dot{I}_{03}] = \underline{Y}_{03} (\dot{E}_{03} + \dot{U}_{03}) = 1/\underline{Z}_6 [0 - \dot{U}_{30}] = -\dot{U}_{30}/\underline{Z}_6, \quad \text{где } \dot{E}_{03} = 0.$$

При наличии в цепи источника тока его влияние учитываем в правой части уравнений (5.9) для тех узлов, к которым этот источник подключен. Ток источника, направленный к узлу входит в правую часть уравнения со знаком (+), а направленный от узла – со знаком (–). Если, например, к узлам цепи 1 и 2, представленной на рис.5.4,а, подключен источник тока $\dot{J}$, то система уравнений (5.9) приобретает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} \underline{Y}_{11} + \dot{U}_{20} \underline{Y}_{12} + \dot{U}_{30} \underline{Y}_{13} &= \dot{J}_{11} - \dot{J} \\ \dot{U}_{10} \underline{Y}_{21} + \dot{U}_{20} \underline{Y}_{22} + \dot{U}_{30} \underline{Y}_{23} &= \dot{J}_{22} + \dot{J} \\ \dot{U}_{10} \underline{Y}_{31} + \dot{U}_{20} \underline{Y}_{32} + \dot{U}_{30} \underline{Y}_{33} &= \dot{J}_{33} \end{aligned} \right\}. \quad (5.9 \text{ б})$$

Здесь ток $\dot{J}$ источника вошел в правую часть первого уравнения со знаком (–) потому, что он направлен от узла 1; ток $\dot{J}$ источника вошел в правую часть второго уравнения со знаком (+) потому, что он направлен к узлу 2; третье уравнение осталось без изменений потому, что к узлу 3 источник тока $\dot{J}$ не подсоединен.

Пример 5.5. Для цепи, схема которой дана в примере 5.3 на рис.5.3,а и при тех же исходных данных определить комплексные токи во всех ее ветвях методом узловых напряжений.

Решение. Вариант расчета с предварительным преобразованием источника тока в эквивалентный источник ЭДС

1. Преобразуем источник тока в эквивалентный источник ЭДС по правилам, изложенным в главе 4: $\dot{E}_1 = \dot{J}_0 / \underline{Y}_{01} = 120 \text{ В}$; $\underline{Z}_{01} = 1 / \underline{Y}_{01} = (1 + j2) \text{ Ом}$. В результате получаем схему, представленную на рис.5.3,б.

2. В данной цепи всего два узла и, следовательно, одно узловое напряжение $\dot{U}_{10}$, направленное на схеме от узла 1 цепи к узлу "0", принятому за опорный. В соответствии с уравнением (5.9,а) имеем: $\dot{U}_{10} \underline{Y}_{11} = \dot{J}_{11}$. Здесь: $\underline{Y}_{11} = 1 / \underline{Z}_{01} + 1 / \underline{Z}_{02} + 1 / \underline{Z}_H = 1 / (1 + j2) + 1 / (1 + j2) + 1 / 10 = 0,5 - j0,8 = 0,94 e^{-j58^\circ} \text{ См}$; $\dot{J}_{11} = \dot{E}_1 / \underline{Z}_{01} + \dot{E}_2 / \underline{Z}_{02} = 120 (0,2 - j0,4) + 115 (0,2 - j0,4) = (24 - j48) + (23 - j46) = 47 - j94 = 105 e^{-j63,4^\circ} \text{ А}$. Тогда узловое напряжение цепи $\dot{U}_{10} = \dot{J}_{11} / \underline{Y}_{11} = (47 - j94) / (0,5 - j0,8) = 105 e^{-j63,4^\circ} / 0,94 e^{-j58^\circ} = 111,7 e^{-j5,4^\circ} = (110,9 - j10,56) \text{ В}$.

3. Токи в ветвях цепи определяются в соответствии с формулой (5.8): $\dot{I}_1 = \underline{Y}_{01} (\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}) = (0,2 - j0,4) (120 - 110,9 + j10,56) = (6,04 - j1,49) \text{ А}$, где $\underline{Y}_{01} = 1 / \underline{Z}_{01}$; $\dot{I}_2 = \underline{Y}_{02} (\dot{E}_2 - \dot{U}_{10}) = (0,2 - j0,4) (115 - 110,9 + j10,56) = (5,4 + j0,47) \text{ А}$, где $\underline{Y}_{02} = 1 / \underline{Z}_{02}$; $\dot{I}_H = \underline{Y}_H (\dot{U}_{10}) = 0,1 (110,9 - j10,56) = (11,09 - j1,056) \text{ А}$, где $\underline{Y}_H = 1 / \underline{Z}_H$.

Заметим, что полученные значения токов совпадают с результатами решений примеров 5.2 и 5.3.

Вариант расчета без предварительного преобразования источника тока в эквивалентный источник ЭДС

Для цепи, изображенной на рис.5.3,а, составляем уравнение по образцу формулы (5.9) и получаем: $\dot{U}_{10} \underline{Y}_{11} = \dot{J}_{11}$, где по-прежнему $\underline{Y}_{11} = 1 / \underline{Y}_{01} + 1 / \underline{Y}_{02} + 1 / \underline{Z}_H$, а $\dot{J}_{11} = \dot{E}_2 / \underline{Z}_{02} + \dot{J}_1$. Здесь $\dot{J}_1$ – источник тока, подключенный к узлам "1" и "0".

Решая уравнение (5.9), находим узловое напряжение $\dot{U}_{10}$, а затем и токи во всех ветвях цепи. Полученные результаты должны в точности совпадать с первым вариантом расчета. В самом деле, преобразовывая источник ЭДС в эквивалентный источник тока по известным формулам, находим, что $\dot{J}_1 = \dot{E}_1 / \underline{Z}_{01} = \dot{E}_1 / \underline{Z}_{01}$, и тогда $\dot{J}_{11} = \dot{E}_2 / \underline{Z}_{02} + \dot{J}_1 = \dot{E}_2 / \underline{Z}_{02} + \dot{E}_1 / \underline{Z}_{01}$. Таким образом, полученная система уравнений полностью соответствует системе уравнений предыдущего варианта расчета.

5.5. Метод эквивалентного источника

Метод эквивалентного источника применяется для расчета тока в какой-либо одной выделенной ветви сложной цепи. В его основе лежит *теорема об эквивалентном источнике*, суть которой состоит в следующем: любая сколь угодно сложная электрическая цепь относительно выделенной ветви может быть представлена одним эквивалентным источником ЭДС или одним эквивалентным источником тока*.

Рассмотрим здесь метод расчета, основанный на эквивалентном преобразовании сложной цепи в эквивалентный источник ЭДС. На рис.5.5,а представлена сложная цепь со многими источниками и многими сопротивлениями в виде активного двухполюсника. Требуется определить ток $\dot{I}$ в выделенном из этой цепи сопротивлении $\underline{Z}$.

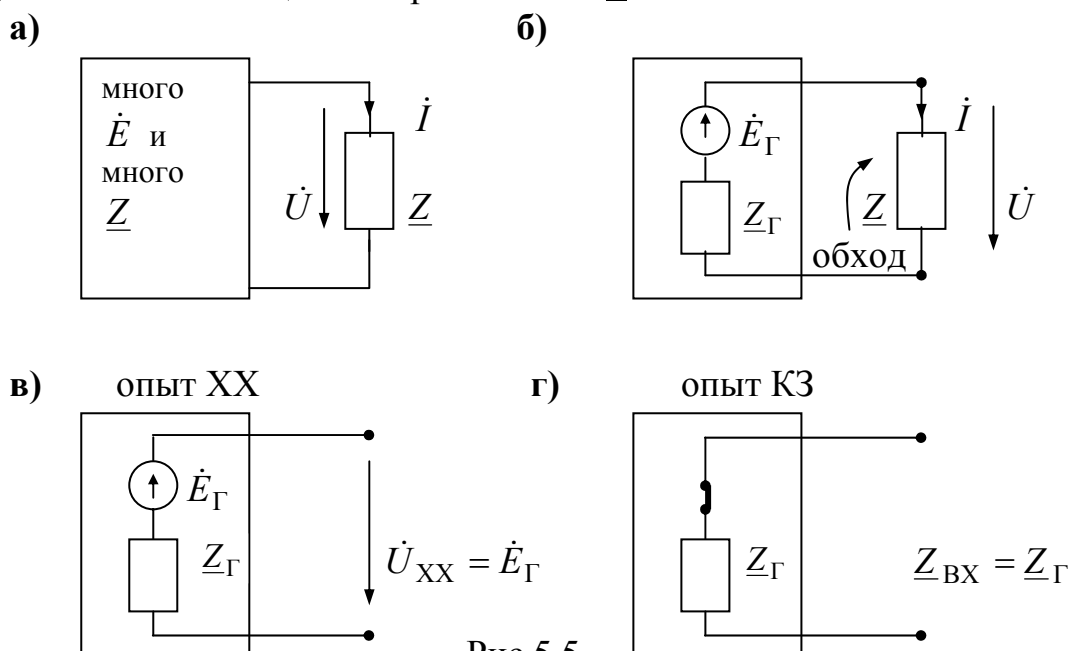


Рис.5.5

Представим двухполюсник в виде эквивалентного источника ЭДС, с параметрами $\dot{E}_G$ и $\underline{Z}_G$, (рис.5.5,б) и получим, что в соответствии со вторым законом Кирхгофа искомый ток цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_G}{\underline{Z}_G + \underline{Z}}. \quad (5.10)$$

* Подробное доказательство этой теоремы имеется в [1], [2], [3], [4].

Неизвестные величины $\dot{E}_Г$ и $\underline{Z}_Г$ можно найти из опыта холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ). При проведении опыта ХХ (рис.5.5,в) ветвь с сопротивлением $\underline{Z}$ размыкается и на ее зажимах возникает напряжение $\dot{U}_{ХХ}$, равное ЭДС эквивалентного генератора: $\dot{U}_{ХХ} = \dot{E}_Г$. При проведении опыта КЗ (рис.5.5,г) отключаются все ЭДС цепи и заменяются перемычками без сопротивления. Тогда входное сопротивление цепи становится равным сопротивлению эквивалентного генератора: $\underline{Z}_{ВХ} = \underline{Z}_Г$.

Пример 5.6. Для цепи, представленной в примере 5.2 схемой 5.2,б (эта схема повторена на рис.5.6,а) и при тех же исходных данных, определить ток в сопротивлении $\underline{Z}_H$ методом эквивалентного источника ЭДС. Исходные данные: $\dot{E}_1 = 120$ В; $\dot{E}_2 = 115$ В; $\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_{02} = (1 + j2)$ Ом; $\underline{Z}_H = 10$ Ом.

Решение. 1. Выделяем из схемы ветвь с сопротивлением $\underline{Z}_H$, а всю остальную часть цепи представляем в виде эквивалентного источника ЭДС (рис.5.6,а).

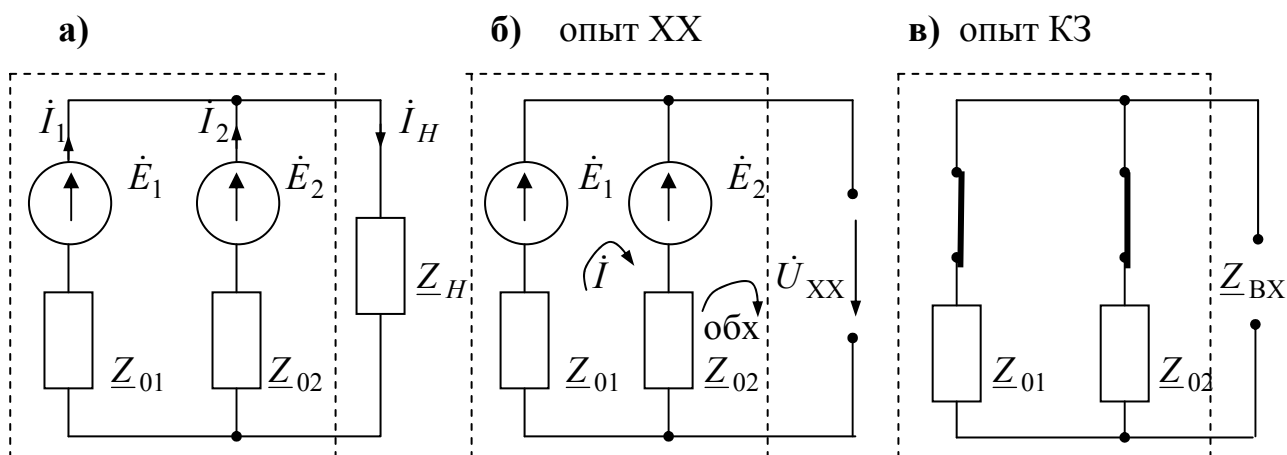


Рис.5.6

2. Проводим опыт холостого хода. Для этого, разомкнув ветвь $\underline{Z}_H$, находим напряжение $\dot{U}_{ХХ}$ на ее зажимах (рис.5.6,б). Исследуя образовавшуюся цепь, замечаем, что в левом ее контуре протекает ток $\dot{I}$, а в правом контуре – тока нет. Составляя уравнение по 2-му закону Кирхгофа для левого контура, получаем $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \dot{I}(\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{02})$. Откуда ток левого контура $\dot{I} = (\dot{E}_1 - \dot{E}_2) / 2\underline{Z}_{01} = 5 / (2 + j4) = (10 - j20) / 20 = (0,5 - j1)$ А. Составляя уравнение по 2-му закону Кирхгофа для правого контура цепи, получаем $\dot{E}_2 = \dot{U}_{ХХ} - \dot{I}\underline{Z}_{02}$, откуда напряжение холостого хода $\dot{U}_{ХХ} = \dot{E}_2 + \dot{I}\underline{Z}_{02} = 115 + (0,5 - j1)(1 + j2) = 115 + [0,5 - j0,1 + j0,1 + 2] = 115 + 2,5 = 117,5$ В. Это напряжение равно ЭДС эквивалентного генератора: $\dot{U}_{ХХ} = \dot{E}_Г = 117,5$ В.

3. Проводим опыт короткого замыкания. Для этого в схеме рис.5.6,б удаляем источники ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ и заменяем их короткозамкнутыми перемычками. Тогда получаем схему, показанную на рис.5.6,в, из которой находим, что

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{XX} = [(\underline{Z}_{01} \cdot \underline{Z}_{02}) / (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_{02})] = (0,5 + j1) \text{ Ом.} \quad (5.10)$$

4. Определяем ток в выделенной ветви цепи в соответствии с формулой

$$(5.10) \quad \dot{I}_H = [\dot{E}_T / (\underline{Z}_T + \underline{Z}_H)] = 117,5 / (0,5 + j1 + 10) = 117,5 / (10,5 + j1) = (1233,75 - j117,5) / 111,25 = (11,09 - j1,056) \text{ А.}$$

Заметим, что найденный ток $\dot{I}_H$ совпадает с его значением, полученным в результате решения этой задачи всеми другими, ранее рассмотренными методами расчета в примерах 4.2; 5.2; 5.3; 5.4 и 5.5.

Когда в цепи имеется источник тока (например, в схеме рис.5.2,а), то при решении задачи этот источник тока можно предварительно преобразовать в эквивалентный источник ЭДС и далее вести расчет цепи в изложенной выше последовательности. Если этого не делать, то при проведении опыта КЗ источник $\dot{E}_2$ заменяется короткозамкнутой перемычкой, а ветвь с источником тока $\dot{J}_1$ размыкается (его внутренняя проводимость $\underline{Y}_{01}$ остается в схеме). Представляем читателю возможность проделать все конкретные вычисления самостоятельно и получить результат, совпадающий с приведенным здесь решением.

Пример 5.7. Для цепи, представленной в примере 5.2 схемой 5.2,а и при тех же исходных данных, определить ток в сопротивлении $\underline{Z}_H$ методом эквивалентного источника тока.

Задачу решить самостоятельно. В качестве образца можно воспользоваться примером 10,6 из методического сборника [7]. Полученный результат должен в точности соответствовать результату решения примера 5.6.

5.6. Метод наложения

Этот метод расчета основан на фундаментальном физическом принципе суперпозиции. Применительно к электрическим цепям он формулируется следующим образом: *ток в любой ветви электрической цепи есть алгебраическая сумма токов в этой ветви от действия каждого из источников энергии этой цепи по отдельности.*

Применяя принцип наложения для расчета цепи, следует по очереди оставлять в ней только один источник энергии и для каждой такой схемы рассчитывать токи во всех ее ветвях. Реальные токи ветвей являются результатом наложения этих частных токов от действия каждого источника энергии по отдельности. При формировании схемы с одним каким-либо конкретным источником энергии все ЭДС остальных источников заменяют короткозамкнутыми перемычками, а у источников тока размыкают ветви с током, оставляя в цепи ветви с их внутренними проводимостями источников тока. Заметим, что метод наложения применим только к линейным электрическим цепям, у которых сопротивления ветвей не зависят от величины токов и напряжений и при всех преобразованиях цепей остаются постоянными величинами.

Пример 5.8. Для схемы, представленной на рис.5.2,б и при тех же исходных данных, что в примере 5.2, определить токи всех ветвей цепи, используя метод наложения. Исходные данные: $\dot{E}_1=120$ В; $\underline{Z}_{01}=(1+j2)$ Ом; $\dot{E}_2=115$ В; $\underline{Z}_{02}=(1+j2)$ Ом; $\underline{Z}_H=10$ Ом.

Решение. По очереди рассчитываем токи во всех ветвях цепи от каждого источника энергии по отдельности.

1. Оставляем в схеме только один источник ЭДС $\dot{E}_1$ и рассчитываем токи во всех ветвях от действия только этого источника (рис.5.7,а). Расчет этой схемы аналогичен расчету, проведенному в примере 4.14 гл.4.

Сопротивление всей цепи для источника $\dot{E}_1$:

$$\underline{Z}_{\Sigma}' = \underline{Z}_{01} + [(\underline{Z}_{02} \cdot \underline{Z}_H) / (\underline{Z}_{02} + \underline{Z}_H)] = 1 + j2 + [(1 + j2)(10)] / (1 + j2 + 10) = (2,2 + j3,6) \text{ Ом};$$

$$\text{ток } \dot{I}_1' = \dot{E}_1 / \underline{Z}_{\Sigma}' = 120 / (2,2 + j3,6) = (264 - j432) / 17,8 = (14,83 - j24,26) \text{ А};$$

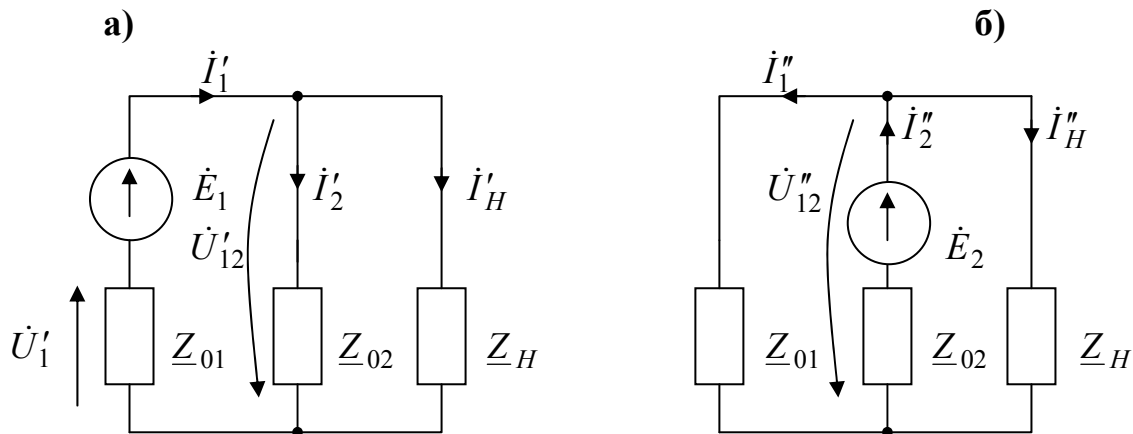


Рис.5.7

$$\text{напряжение } \dot{U}_{12}' = \dot{E}_1 - \dot{U}_1' = \dot{E}_1 - \dot{I}_1' \underline{Z}_{01} = 120 - (63,3 + j54) = (56,6 - j5,4) \text{ В};$$

$$\text{ток } \dot{I}_2' = \dot{U}_{12}' / \underline{Z}_{02} = (56,6 - j5,4) / (1 + j2) = (9,17 - j23,74) \text{ А};$$

$$\text{ток } \dot{I}_H' = \dot{U}_{12}' / \underline{Z}_H = (56,6 - j5,4) / 10 = (5,7 - j0,54) \text{ А}.$$

2. Оставляем в схеме только один источник $\dot{E}_2$ и рассчитываем токи во всех ее ветвях от действия только этого источника (рис.5.7,б).

Сопротивление всей цепи для источника $\dot{E}_2$:

$$\underline{Z}_{\Sigma}'' = \underline{Z}_{02} + [(\underline{Z}_{01} \cdot \underline{Z}_H) / (\underline{Z}_{01} + \underline{Z}_H)] = (2,2 + j3,6) \text{ Ом};$$

$$\text{ток } \dot{I}_2'' = \dot{E}_2 / \underline{Z}_{\Sigma}'' = 115 / (2,2 + j3,6) = 14,21 - j23,26 \text{ А};$$

$$\text{напряжение } \dot{U}_{12}'' = \dot{E}_2 - \dot{I}_2'' \underline{Z}_{02} = 115 - [(14,2 - j23,26)(1 + j2)] = (54,3 - j5,14) \text{ В};$$

$$\text{ток } \dot{I}_1'' = \dot{U}_{12}'' / \underline{Z}_{01} = (54,3 - j5,14) / (1 + j2) = (44 - j113,42) / 5 = (8,8 - j22,68) \text{ А};$$

$$\text{ток } \dot{I}_H'' = \dot{U}_{12}'' / \underline{Z}_H = (54,3 - j5,14) / 10 = (5,43 - j0,514) \text{ А}.$$

3. Находим реальные токи во всех трех ветвях цепи при одновременном действии обоих источников энергии исследуемой цепи. Сопоставляя направления токов на рис.5.2 и применяя принцип наложения, получаем (в соответствии с первым законом Кирхгофа):

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' - \dot{I}_1'' = (14,83 - j24,26) - (8,8 - j22,18) = (6,03 - j1,58) \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2'' - \dot{I}_2' = (14,21 - j23,26) - (9,17 - j23,74) = (5,04 + j0,48) \text{ А};$$

$$\dot{I}_H = \dot{I}_H' + \dot{I}_H'' = (5,7 - j0,54) + (5,43 - j0,514) = (11,13 - j1,05) \text{ А.}$$

Заметим, что полученный результат практически совпадает с результатами расчета этой цепи всеми другими методами расчета, использованными в примерах 4.2, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6 и 5.7.

Пример 5.9. Для цепи, показанной на рис.5.2,а, известны параметры источников и сопротивления всех ее ветвей: $\dot{J}_1 = 24 - j48 \text{ А}$; $\underline{Y}_{01} = 0,2 - j0,4 \text{ См}$; $\dot{E}_2 = 115 \text{ В}$; $\underline{Z}_{02} = 1 + j2 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_H = 10 \text{ Ом}$. Требуется определить токи во всех ветвях цепи, используя метод наложения.

Решение. 1. Рассчитываем токи в цепи от действия только источника ЭДС $\dot{E}_2$ данной цепи. При этом источник $\dot{J}_1$ надо разомкнуть, оставив в цепи его внутреннюю проводимость $\underline{Y}_1$ (рис.5.8,а).

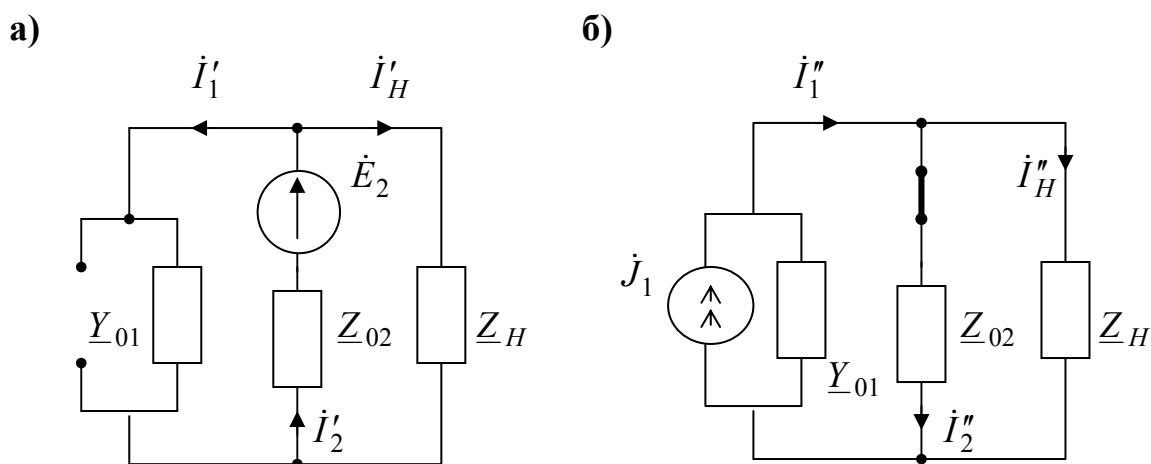


Рис.5.8

2. Рассчитываем токи в цепи от действия только источника тока $\dot{J}_1$ данной цепи. При этом источник $\dot{E}_2$ следует удалить и заменить его короткозамкнутой перемычкой, оставив в цепи только его внутреннее сопротивление $\underline{Z}_{02}$ (рис.5.8,б).

3. Определяем реальные токи во всех ветвях цепи при действии обоих источников энергии одновременно. С учетом принятых направлений токов в цепях, изображенных на рис. 5.2,а, 5.8,а и 5.8,б, получаем (в соответствии с 1-м законом Кирхгофа) $\dot{I}_1 = \dot{I}_1'' - \dot{I}_1'$; $\dot{I}_2 = \dot{I}_2' - \dot{I}_2''$; $\dot{I}_H = \dot{I}_H' + \dot{I}_H''$.

Все численные расчеты предлагаем проделать читателю самостоятельно. В качестве образца можно воспользоваться примером 11 из методического сборника [7]. Результаты расчета должны соответствовать примеру 5.8, так как схемы **а)** и **б)** на рис. 5.2 эквивалентны.

5.7. Баланс мощностей цепи синусоидального тока

Энергетический баланс любой цепи синусоидального тока заключается в том, что *сумма комплексных мощностей источников энергии равна сумме комплексных мощностей приемников энергии*.

$$\sum_{k=1}^K \dot{E}_k^* I_k^* = \sum_{m=1}^M \dot{U}_m^* I_m^* , \quad (5.11)$$

где K – число источников энергии, а M – число приемников энергии цепи.

В формуле (5.11) мощность каждого источника энергии

$\dot{E}_k^* I_k^* = P_k + jQ_k$, а мощность каждого приемника $\dot{U}_m^* I_m^* = P_m + jQ_m$, поэтому можно записать:

$$\sum_{k=1}^K (P_k + jQ_k) = \sum_{m=1}^M (P_m + jQ_m) \quad (5.11 \text{ а})$$

$$\text{или} \quad \sum_{k=1}^K P_k = \sum_{m=1}^M P_m \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^K Q_k = \sum_{m=1}^M Q_m . \quad (5.11 \text{ б})$$

Таким образом, в любой цепи синусоидального тока сумма активных мощностей всех источников равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей всех источников равна сумме реактивных мощностей всех приемников.

Заметим, что баланс мощностей цепи синусоидального тока (как и баланс мощностей цепи постоянного тока, рассмотренной в 2.9) является, фактически, следствием закона сохранения энергии.

Пример 5.10. Для условий примера 5.2 составить баланс мощностей цепи, показанной на рис.5.2,б. Исходные данные для расчета: $\dot{E}_1 = 120 \text{ В}$; $\underline{Z}_{01} = (1 + j2) \text{ Ом}$; $\dot{E}_2 = 115 \text{ В}$; $\underline{Z}_{02} = (1 + j2) \text{ Ом}$; $\dot{I}_1 = 6,23e^{-j14^\circ} \text{ А}$; $\dot{I}_2 = 5,04e^{j5,5^\circ} \text{ А}$; $\dot{I}_H = 11,1e^{-j5,4^\circ} \text{ А}$; $\underline{Z}_H = 10 \text{ Ом}$.

Решение. 1. Находим комплексные мощности источников энергии

а) мощность первого (левого) источника

$$\dot{E}_1^* I_1^* = 120 \cdot 6,23e^{+j14^\circ} = 747,6e^{+j14^\circ} = (724 + j181) \text{ ВА};$$

б) мощность второго (правого) источника

$$\dot{E}_2^* I_2^* = 115 \cdot 5,04e^{-j5,5^\circ} = 579e^{-j5,5^\circ} = (576 - j56) \text{ ВА}.$$

2. Находим сумму комплексных мощностей источников

$$\dot{E}_1^* I_1^* + \dot{E}_2^* I_2^* = (724 + j181) + (576 - j56) = (1300 + j127) \text{ ВА}.$$

3. Находим напряжение на всех приемниках энергии

$$\text{а) } \dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{01} = 6,23e^{-j14^\circ} \cdot 2,24e^{j63,4^\circ} = 14e^{j49,4^\circ} \text{ В};$$

$$\text{б) } \dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} = 5,04e^{j5,5^\circ} \cdot 2,24e^{j63,4^\circ} = 11,3e^{j68,9^\circ} \text{ В};$$

$$\text{в) } \dot{U}_H = \dot{I}_H \underline{Z}_H = 11,1e^{-j5,4^\circ} \cdot 10 = 111e^{-j5,4^\circ} \text{ В}.$$

4. Находим комплексные мощности приемников энергии

$$\text{а) } \dot{U}_1 I_1^* = 14e^{j49,4^\circ} \cdot 6,23e^{j14^\circ} = 87,3e^{j63,4^\circ} = (39 + j78) \text{ ВА};$$

$$\text{б) } \dot{U}_2 I_2^* = 11,3e^{j68,9^\circ} \cdot 5,04e^{-j5,5^\circ} = 57e^{j63,4^\circ} = (26 + j50) \text{ ВА};$$

$$\text{в) } \dot{U}_H I_H^* = 111e^{-j5,4^\circ} \cdot 11,1e^{+j5,4^\circ} = 1232e^{j0^\circ} = 1232 \text{ Вт}.$$

5. Находим сумму комплексных мощностей приемников

$$\dot{U}_1 I_1^* + \dot{U}_2 I_2^* + \dot{U}_H I_H^* = (39 + j78) + (26 + j50) + 1232 = (1297 + j128) \text{ ВА}.$$

6. Сопоставляя суммы активных мощностей источников и приемников, убеждаемся в том, что они практически (с учетом точности расчетов) совпадают. Сопоставляя суммы реактивных мощностей источников и приемников, убеждаемся в том, что они также практически совпадают. Таким образом, баланс мощностей рассматриваемой цепи сошелся и, следовательно, расчет цепи произведен верно.

5.8. Дополнительные задания к главе 5. Вопросы и примеры для самотестирования

1. Рассчитать цепь примера 2.6 (рис.2.10) методом контурных токов.
2. Рассчитать цепь примера 2.6 (рис.2.10) методом узловых напряжений.
3. Рассчитать цепь примера 2.6 (рис.2.10) методом эквивалентного источника ЭДС.
4. Рассчитать цепь примера 2.6 (рис.2.10) методом эквивалентного источника тока.
5. Рассчитать цепь примера 2.6 (рис.2.10) методом наложения.
6. Определить все токи цепи примера 4.14 (рис.4.10,а), составив для нее систему уравнений по первому и второму законам Кирхгофа.
7. Определить все токи цепи примера 4.14 (рис.4.10,а), применив метод контурных токов.
8. Определить все токи цепи примера 4.14 (рис.4.10,а) методом узловых напряжений.
9. В условиях примера 4.14 (рис.4.10,а) определить ток $\dot{I}_3$ методом эквивалентного источника ЭДС.
10. Рассчитать все тока примера 4.15 (рис.4.11,а) методом контурных токов.
11. Ответить на вопросы 4, 5 и 6 любого из шести вариантов раздела 3 сборника тестовых карт [6].
12. Рассмотреть примеры с решениями 7, 8, 9, 10,а, 10,б из методического сборника [7].

Глава 6

Особенности расчета цепей синусоидального тока при наличии взаимных индуктивностей

6.1. Общие положения

Если при изменении во времени тока в одной катушке на зажимах второй возникает ЭДС – такие катушки называются *индуктивно связанными*. Это, например, катушки на стальных сердечниках электрических машин и аппаратов, провода линий электропередач, а также многие другие электротехнические устройства.

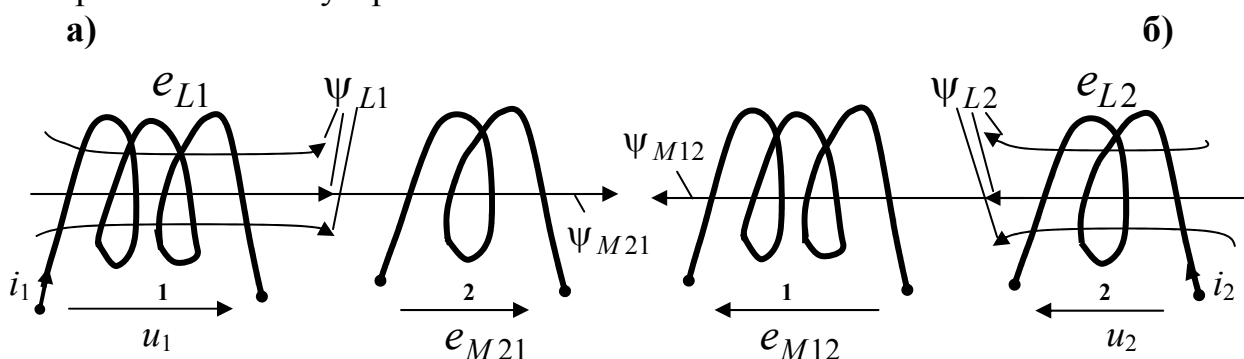


Рис.6.1

На рис.6.1,а показаны две идеальные (без активных сопротивлений) катушки индуктивности.

При протекании в первой катушке синусоидального тока (i_1) в ней возникает магнитное поле, характеризуемое потокосцеплением самоиндукции ψ_{L1} . Это потокосцепление в соответствии с законом электромагнитной индукции индуцирует в первой катушке ЭДС самоиндукции ($e_{L1} = -d\psi_{L1} / dt$). Напряжение на этой катушке (u_1) численно равно этой ЭДС, но направлено в противоположную сторону и поэтому имеет обратный знак: $u_1 = -e_{L1} = + \frac{d\psi_{L1}}{dt} = L \frac{di_1}{dt}$. Здесь $\psi_{L1} = L_1 i_1$, где L_1 – индуктивность первой катушки.

В символической форме записи это напряжение имеет вид $\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1$, где $\omega L_1 = X_{L1}$ – индуктивное сопротивление первой катушки синусоидальному току.

При наличии магнитной связи между катушками 1 и 2, некоторая часть потокосцепления самоиндукции первой катушки ψ_{L1} проникает во вторую катушку. Эта его часть ψ_{M21} называется потокосцеплением взаимной индукции второй катушки, вызванное током i_1 первой катушки.

* Из предыдущего изложения цепей синусоидального тока вытекает (табл.4.3), что $L \frac{di}{dt} \div j\omega L \dot{I}$.

Потокосцепление ψ_{M21} индуцирует во второй катушке ЭДС взаимной индукции $e_{M21} = -\frac{d\psi_{M21}}{dt}$. *Отношение потокосцепления взаимной индукции ψ_{M21} к току в первой катушке i_1 есть взаимная индуктивность этих катушек: $\psi_{M21}/i_1 = M_{21}$.* Взаимная индуктивность также, как и собственная индуктивность измеряется в генри (Гн). С учетом последнего соотношения ЭДС взаимной индукции второй катушки приобретает вид:

$$e_{M21} = -\frac{d\psi_{M21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для случая, когда синусоидальный ток i_2 протекает только по 2-й катушке (рис.6.1,б). Потокосцепление самоиндукции ψ_{L2} второй катушки индуцирует в ней электродвижущую силу самоиндукции $e_{L2} = -(d\psi_{L2}/dt)$. Напряжение на второй катушке равно ей по величине и противоположно по знаку: $u_2 = -e_{L2} = +d\psi_{L2}/dt = L_2 di_2/dt$. Здесь $\psi_{L2} = L_2 i_2$, где L_2 – индуктивность 2-й катушки. В символической форме записи это напряжение имеет вид $\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2$, где $\omega L_2 = X_{L2}$ – индуктивное сопротивление 2-й катушки синусоидальному току. Некоторая часть потокосцепления самоиндукции ψ_{L2} проникает в первую катушку и образует там потокосцепление взаимной индукции ψ_{M12} . Оно индуцирует в 1-й катушке ЭДС взаимной индукции $e_{M12} = -d\psi_{M12}/dt$. *Отношение потокосцепления взаимной индукции ψ_{M12} к току во второй катушке i_2 есть взаимная индуктивность этих двух катушек: $\psi_{M12}/i_2 = M_{12}$.* С учетом этого соотношения ЭДС взаимной индуктивности в первой катушке $e_{M12} = -M_{12} di_2/dt$.

Заметим, что для линейных электрических цепей взаимная индуктивность двух катушек не зависит от того, каким образом она была определена экспериментально:

$$\frac{\psi_{M12}}{i_2} = \frac{\psi_{M21}}{i_1} = M_{12} = M_{21} = M. \quad (6.1)$$

Она является их общим параметром и не зависит от величин потокосцеплений и токов, а определяется только конструкцией катушек, их взаимным расположением и магнитными свойствами окружающей среды.

Придвигая катушки друг к другу, мы увеличиваем M , а, отодвигая их друг от друга – уменьшаем M . Наибольшей взаимной индуктивностью обладают две катушки, навитые друг на друга (рис.6.2,а), а наименьшей – расположенные своими осями под углом 90° друг к другу (рис.6.2,б) или далеко удаленные друг от друга.

При одновременном протекании токов в обеих катушках, в соответствии с принципом наложения, имеем распределение их магнитных потоков, указанное на рис.6.3.

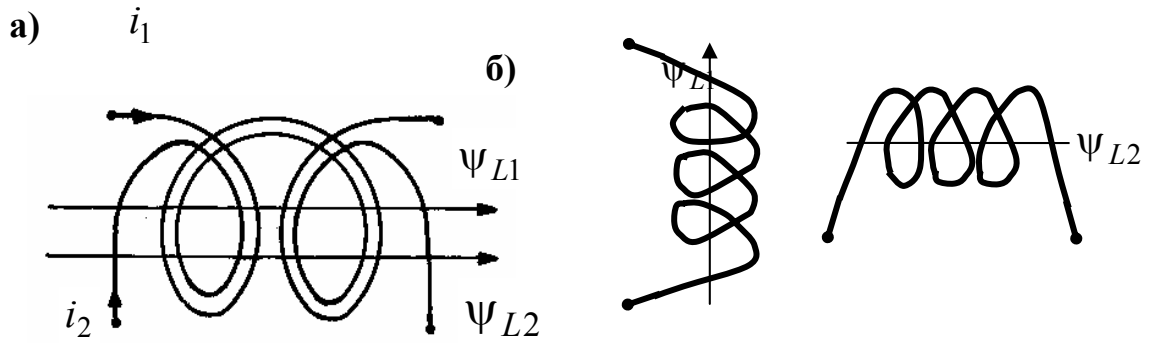


Рис.6.2

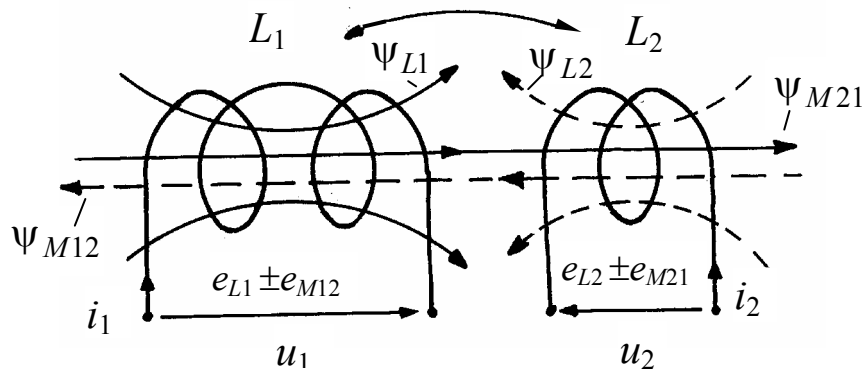


Рис.6.3

Здесь в каждой из катушек индуцируется одновременно две электродвижущие силы: ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции. Поэтому напряжения u_1 и u_2 каждой индуктивно связанной катушки имеют две составляющие: одна из них (u_L) вызвана действием ЭДС самоиндукции, а другая (u_M) вызвана действием ЭДС взаимной индукции

$$u_1 = u_{L1} \pm u_{M12} = \frac{d\psi_{L1}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} ; \quad (6.2)$$

$$u_2 = u_{L2} \pm u_{M21} = \frac{d\psi_{L2}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} . \quad (6.3)$$

В формулах (6.2) и (6.3) знаки (+) или (−) у вторых составляющих напряжений зависят от взаимного направления магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в катушках.

Знак (+) берется в том случае, когда потоки самоиндукции и взаимной индукции совпадают по направлению. Такое соединение катушек называется *согласным включением*. Если потоки самоиндукции и взаимной индукции не совпадают по направлению, то берется знак (−) и такое соединение катушек называется *встречным включением*.

На рис.6.4 показаны примеры согласного и встречного включения двух индуктивно связанных катушек.

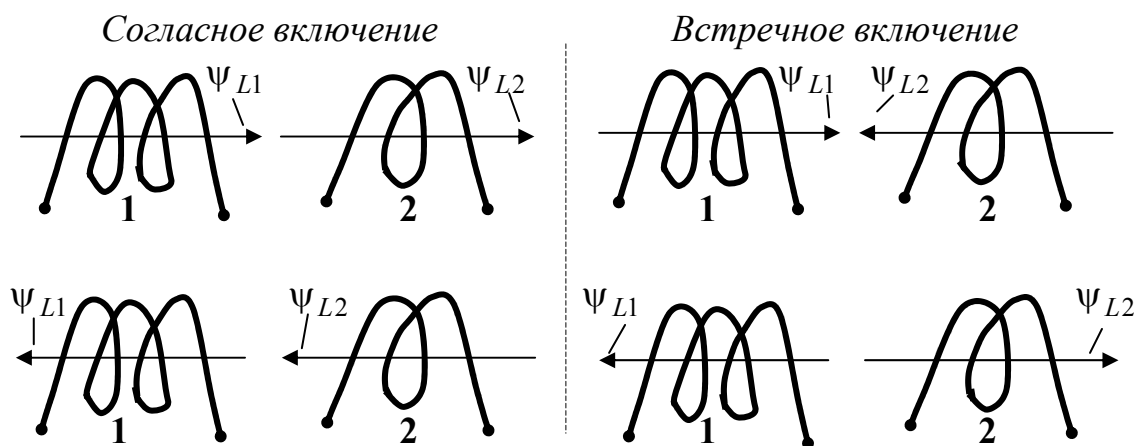


Рис.6.4

На электрических схемах индуктивно связанные катушки изображаются, так, как это показано на рис.6.5.

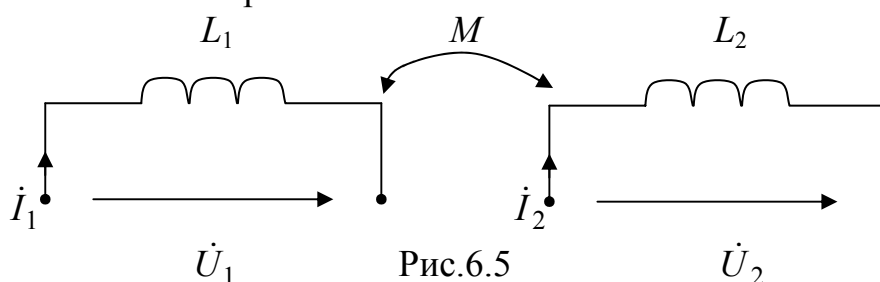


Рис.6.5

Переходя к комплексной форме записи напряжений на индуктивно связанных катушках (табл.4.3 и вытекающие из нее соответствия), получаем

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (6.4)$$

где а) $j\omega L_1 \dot{I}_1$ и $j\omega L_2 \dot{I}_2$ - комплексные напряжения первой и второй катушек, вызванные действиями токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ катушек; б) $\pm j\omega M \dot{I}_2$ - дополнительная составляющая напряжения первой катушки, вызванная током $\dot{I}_2$ второй катушки; в) $\pm j\omega M \dot{I}_1$ - дополнительная составляющая напряжения второй катушки, вызванная током $\dot{I}_1$ первой катушки. В формулах (6.4) знак (+) соответствует согласному включению катушек, а знак (-) - встречному включению.

Способ включения индуктивно связанных катушек определяется для каждой конкретной цепи экспериментально и указывается на ее схеме путем маркировки "начал" катушек либо в виде жирных точек (знак •), либо в виде звездочек (знак *). При этом действует следующее правило: *если токи в катушках направлены относительно "начал" в одну сторону, то включение катушек является согласным, а если в разные стороны - встречным.*

На рис.6.6 дано несколько примеров согласного и встречного включения индуктивно связанных катушек, в зависимости от маркировки их "начал" и принятого в них направления комплексных токов.

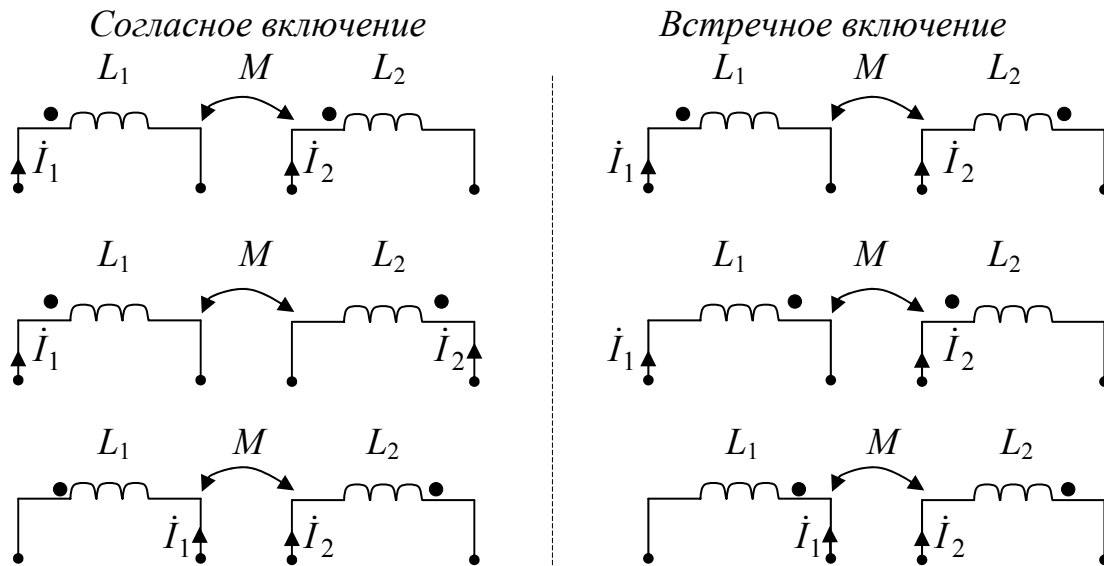


Рис.6.6

6.2. Цепь с последовательным соединением двух индуктивно связанных катушек

Для цепи с последовательным соединением двух индуктивно-связанных катушек (рис.6.7) известны их параметры R_1 , L_1 , R_2 , L_2 , взаимная индуктивность M , частота ω сети и комплексное напряжение $\dot{U}$. Требуется определить комплексный ток цепи $\dot{I}$ при согласном и встречном включении катушек*.

Решение. В соответствии со 2-м законом Кирхгофа имеем $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, где $\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} \pm j\omega M\dot{I}$; $\dot{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2)\dot{I} \pm j\omega M\dot{I}$.

Тогда $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)]\dot{I} = \underline{Z}_{\pm}\dot{I}$. Здесь $\underline{Z}_{\pm} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) = R_{\pm} + j\omega L_{\pm}$.

Анализ $\underline{Z}_{\pm}$ показывает, что его величина зависит от способа включения катушек. При согласном включении $\underline{Z}_{+} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$, а при встречном включении $\underline{Z}_{-} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$. Таким образом, при согласном включении $\underline{Z}_{+}$ больше чем при встречном, за счет изменения реактивного сопротивления цепи:

$$X_{L\text{согл}} = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M; \quad X_{L\text{встр}} = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M.$$

Заметим, что при всех условиях $X_{L1} + X_{L2} - 2X_M > 0$, т.е. $X_{L1} + X_{L2} \geq 2M$, так как $X_{\pm}$ всегда положительно и является индуктивным сопротивлением. Отрицательное значение $X_{\pm}$ означало бы превращение этого сопротивления в емкостное, чего не может быть физически.

* Экспериментальное исследование цепи с последовательным соединением индуктивно связанных катушек проводится в лабораторной работе № 5 [8].

В электротехнической литературе для характеристики магнитной связи двух любых катушек используется коэффициент магнитной связи

$$K = M / \sqrt{L_1 L_2} < 1. \quad (6.5)$$

Пример 6.1. Для цепи с последовательным соединением двух индуктивно связанных катушек (рис.6.7) известны их сопротивления и действующее значение приложенного напряжения: $X_1=20$ Ом; $X_2=30$ Ом, $X_M=5$ Ом, $R_1 = R_2=0$, $U=120$ В. Требуется определить ток цепи, а также действующие значения напряжений на каждой из катушек при согласном и встречном их включении.

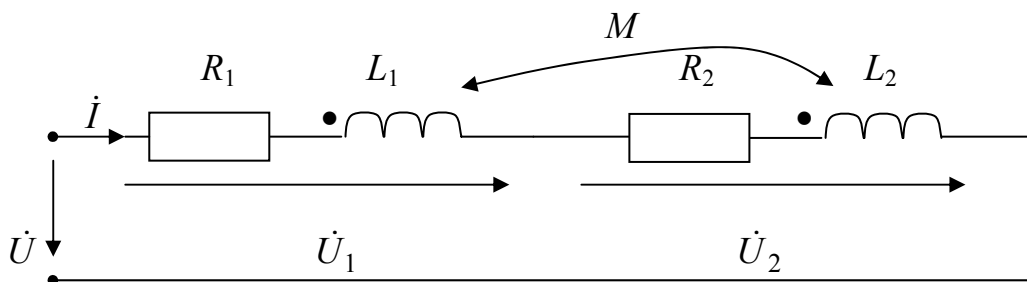


Рис.6.7

Решение. При отсутствии в цепи активных сопротивлений задачу можно решить, пользуясь только модулями комплексных токов, напряжений и сопротивлений.

При согласном включении (указано на схеме знаками •): а) полное сопротивление цепи $z_{\text{согл}} = X_1 + X_2 + 2X_M = 20 + 30 + 10 = 60$ Ом; б) действующее значение тока $I_{\text{согл}} = U / z_{\text{согл}} = 120 / 60 = 2$ А; в) действующее значение напряжения на 1-й катушке: $U_1 = I_{\text{согл}} z_{1\text{согл}} = I_{\text{согл}} (X_1 + X_M) = 2 \cdot 25 = 50$ В, где $z_{1\text{согл}} = (X_1 + X_M)$; г) действующее значение напряжения на 2-й катушке: $U_2 = I_{\text{согл}} z_{2\text{согл}} = I_{\text{согл}} (X_2 + X_M) = 2 \cdot 35 = 70$ В, где $z_{2\text{согл}} = (X_2 + X_M)$.

При встречном включении: а) $z_{\text{встр}} = X_1 + X_2 - 2X_M = 20 + 30 - 10 = 40$ Ом; б) $I_{\text{встр}} = U / z_{\text{встр}} = 120 / 40 = 3$ А; в) $U_1 = I_{\text{встр}} z_{1\text{встр}} = I_{\text{встр}} (X_1 - X_M) = 3 \cdot 15 = 45$ В; д) $U_2 = I_{\text{встр}} z_{2\text{встр}} = I_{\text{встр}} (X_2 - X_M) = 3 \cdot 25 = 75$ В. Здесь $z_{1\text{встр}} = (X_1 - X_M)$, $z_{2\text{встр}} = (X_2 - X_M)$.

Пример 6.2. В цепи с последовательным соединением двух идеальных ($R_1 = R_2=0$) индуктивно связанных катушек (рис.6.7) при неизменном действующем значении приложенного напряжения $U=120$ В измерили действующее значение тока при согласном ($I_{\text{согл}}=2$ А) и при встречном ($I_{\text{встр}}=6$ А) включении этих катушек. Требуется определить величину сопротивления взаимной индуктивности M этих катушек.

Решение. 1. Сопротивление цепи при согласном включении катушек

$$z_{\text{согл}} = \frac{U}{I_{\text{согл}}} = \frac{120}{2} = 60 = (X_1 + X_2 + 2X_M) \text{ Ом.}$$

2. Сопротивление цепи при встречном включении катушек

$$z_{\text{встр}} = \frac{U}{I_{\text{встр}}} = \frac{120}{6} = 20 = (X_1 + X_2 - 2X_M) \text{ Ом.}$$

3. Разность этих сопротивлений $z_{\text{согл}} - z_{\text{встр}} = 4X_M = 60 - 20 = 40 \text{ Ом.}$

4. Величина взаимной индуктивности катушек $X_M = 40/4 = 10 \text{ Ом.}$

6.3. Цепь с параллельным соединением индуктивно связанных катушек

Для цепи с параллельным соединением двух индуктивно связанных катушек (рис.6.8) известны их параметры R_1 R_2 L_1 L_2 , взаимная индуктивность M , частота ω и комплексное напряжение $\dot{U}$. Требуется определить комплексные токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ при согласном и встречном включении этих катушек.

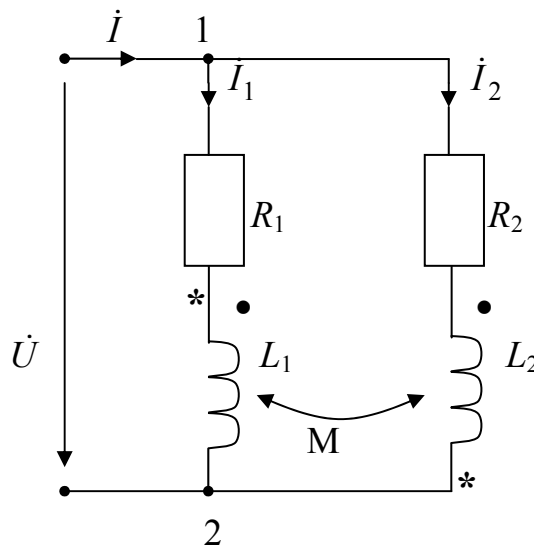


Рис.6.8

Решение. Составляем уравнения катушек по 2-му закону Кирхгофа в соответствии с формулами (4.6) и получаем

$$\left. \begin{array}{l} \text{для первой катушки} \quad \dot{U} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ \text{для второй катушки} \quad \dot{U} = \pm j\omega M \dot{I}_1 + \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) \end{array} \right\}. \quad (6.6)$$

В этих уравнениях знак (+) берется при согласном включении (как это показано на рис.6.8 символами $\bullet$), а знак (–) – при встречном (на рис.6.8 показано символами $*$).

Введя для сокращения записи обозначения: $(R_1 + j\omega L_1) = \underline{Z}_1$; $(R_2 + j\omega L_2) = \underline{Z}_2$; $j\omega M = \underline{Z}_M$, получаем уравнение (6.6) в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{U} = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_2 \\ \dot{U} = \pm \underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 \end{array} \right\}. \quad (6.6 \text{ а})$$

Решаем эту систему уравнений с помощью теории определителей:

$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Здесь **а)** главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2 ;$$

б) первый дополнительный определитель Δ_1 , который получается из главного заменой первого столбца свободными членами уравнений:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U} & \pm \underline{Z}_M \\ \dot{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{U} \underline{Z}_2 \mp \dot{U} \underline{Z}_M = \dot{U} (\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M) ,$$

где знак (-) соответствует уже согласному включению катушек, а знак (+) их встречному включению;

в) второй дополнительный определитель Δ_2 , который образуется из главного заменой второго столбца свободными членами уравнений:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \dot{U} \\ \pm \underline{Z}_M & \dot{U} \end{vmatrix} = \dot{U} (\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_M) ,$$

где также знак (-) соответствует согласному включению катушек, а знак (+) – встречному включению. Токи в катушках

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{U} (\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\dot{U} (\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} .$$

Общий ток цепи находим в соответствии с первым законом Кирхгофа для узла 1:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 .$$

Пример 6.3. Известны (рис.6.8) сопротивления двух параллельно включенных катушек и действующее значение приложенного напряжения: $X_1=3$ Ом; $X_2=2$ Ом; $X_M=1$ Ом, $R_1 = R_2=0$; $U=10$ В. Определить действующие значения токов I, I_1, I_2 во всех ветвях цепи *при встречном включении катушек*.

Решение. При встречном включении в уравнениях (6.6) у слагаемых вида $j\omega MI$ должен стоять знак (-). Кроме того, при отсутствии активных сопротивлений катушек, уравнения можно составить только для модулей напряжений токов и сопротивлений, не применяя символического метода. При этих условиях получаем

$$\begin{cases} U = X_1 I_1 - X_M I_2 \\ U = -X_M I_1 + X_2 I_2 \end{cases} .$$

Подставляя численные значения известных величин, находим

$$\begin{cases} 10 = 3I_1 - I_2 \\ 10 = -I_1 + 2I_2 \end{cases} .$$

Решаем эту систему с помощью теории определителей.

1. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5.$$

2. Первый дополнительный определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 10 = 30.$$

3. Второй дополнительный определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 30 + 10 = 40.$$

4. Действующие значения искомых токов

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{30}{5} = 6 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{40}{5} = 8 \text{ А}; \quad I = I_1 + I_2 = 14 \text{ А}.$$

6.4. Цепь с трансформаторной связью между катушками

Такая цепь представлена на рис.6.9, у которой катушки не имеют друг с другом проводниковых соединений. Известны параметры обеих катушек R_1, R_2, L_1, L_2 , их взаимная индуктивность M , частота ω и комплексное напряжение $\dot{U}_1$. Требуется определить комплексные токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ катушек при согласном и встречном их включении.

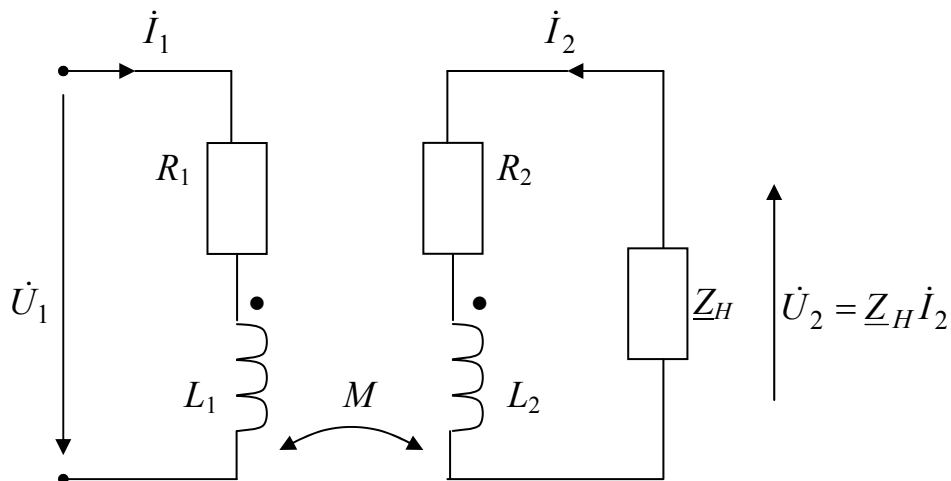


Рис.6.9

Решение. 1. Составляем уравнения для левого и правого контуров цепи в соответствии с формулами (6.4) и получаем

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 \pm j\omega M\dot{I}_2 \\ 0 = \pm j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 + \underline{Z}_H \dot{I}_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

В этих уравнениях знак (+) у составляющих вида $j\omega M\dot{I}$ соответствует согласному включению катушек, а знак (–) – встречному включению. Заметим, что в уравнениях (6.7) $\underline{Z}_H \dot{I}_2 = \dot{U}_2$.

Обозначаем в этих уравнениях для краткости записи

$$(R_1 + j\omega L_1) = \underline{Z}_1; \quad (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_H) = \underline{Z}_2; \quad j\omega M\dot{I} = \underline{Z}_M,$$

и получаем

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_2; \quad 0 = \pm \underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2. \quad (6.7 \text{ а})$$

Решая эту систему уравнений, находим комплексные токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ обеих катушек цепи. При решении задачи применяем теорию определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ 0 & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_2 \dot{U}_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \dot{U}_1 \\ \pm \underline{Z}_M & 0 \end{vmatrix} = -\underline{Z}_M \dot{U}_1; \quad \dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\underline{Z}_2 \dot{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\mp \underline{Z}_M \dot{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Заметим, что знак (–) в числителе $\dot{I}_2$ соответствует согласному включению катушек, а знак (+) – встречному.

Пример 6.4. В цепи с трансформаторной связью двух идеальных (без активных сопротивлений) катушек индуктивности (рис.6.10) к катушке X_1 приложено синусоидальное напряжение частотой $f = 500$ Гц, а катушка X_2 разомкнута. Действующее значение тока в катушке X_1 составляет $I_1 = 10$ А, а напряжение на разомкнутых зажимах катушки X_2 составляет $U_2 = 50$ В. Требуется определить величину взаимной индуктивности M этих катушек.

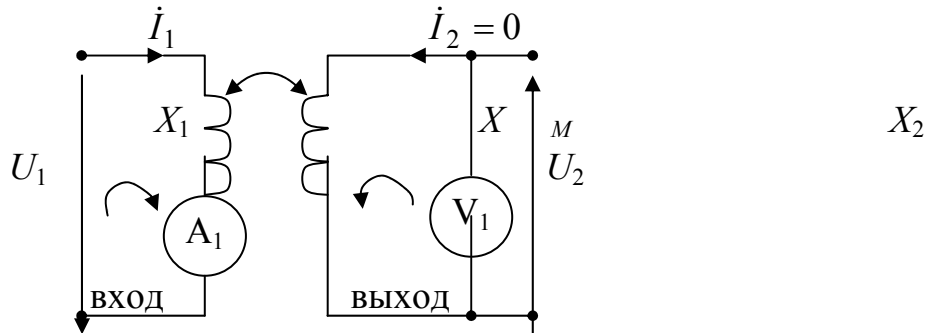


Рис.6.10

Решение. При отсутствии активных сопротивлений катушек ($R_1 = R_2 = 0$) уравнения (6.7) можно составить только для модулей токов, напряжений и сопротивлений не применяя символического метода.

С учетом, что правый контур цепи разомкнут ($I_2 = 0$), имеем

$$U_1 = I_1 X_1; \quad 0 = \pm I_1 X_M + U_2,$$

где $X_1 = \omega L_1$, $X_M = \omega M$.

При этом из второго уравнения следует, что $\pm X_M = -U_2/I_1$ или $|X_M| = U_2/I_1 = 5$ Ом. Тогда величина взаимной индуктивности катушек

$$M = \frac{X_M}{\omega} = \frac{5}{2\pi f} = \frac{5}{6,28 \cdot 500} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

6.5. Разветвленная цепь при наличии взаимных индуктивностей между катушками

В цепи (рис.6.11) с последовательно-параллельным соединением трех катушек индуктивности известны их параметры ($R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3$), величины взаимных индуктивностей (M_{12}, M_{13}, M_{23}), частота цепи ω и комплексное действующее значение приложенного напряжения $\dot{U}$. Известна также маркировка “начал” всех трех индуктивно связанных катушек, показанная знаком ($\bullet$). Требуется определить комплексные действующие значения токов во всех трех ветвях цепи ($\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$).

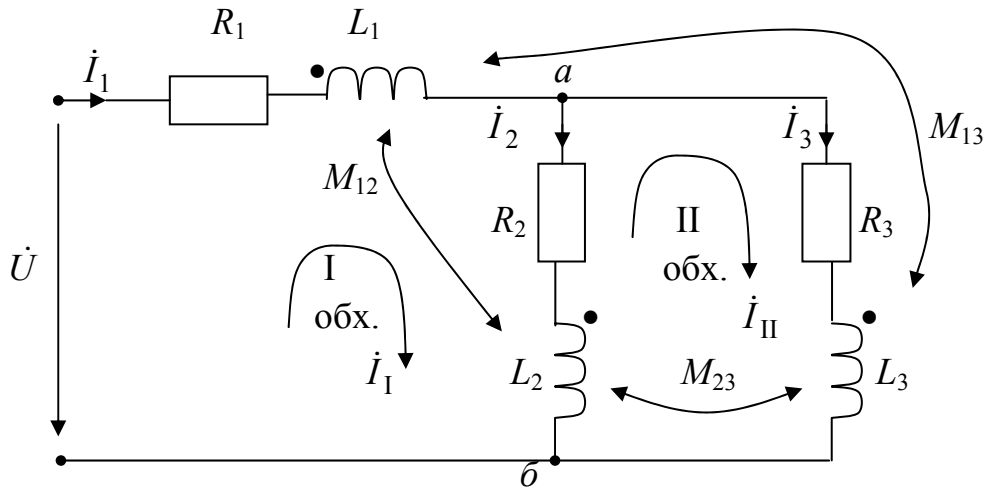


Рис.6.11

Решение. Расчет разветвленных электрических цепей при наличии в их составе катушек с взаимной индуктивностью проводят, используя непосредственно 1-й и 2-й законы Кирхгофа, или методом контурных токов. Метод узловых напряжений для расчета таких цепей не пригоден.

1). Составим систему уравнений для определения токов во всех цепях цепи методом контурных токов. Для этого предварительно выбираем в качестве независимых контуры I и II цепи, направления токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ во всех ее ветвях и направления контурных токов $\dot{I}_I$ и $\dot{I}_{II}$, как это показано на схеме. Составляем систему уравнений по методу контурных токов для цепи с двумя независимыми контурами по образцу уравнений (5.5):

$$\underline{Z}_{11}\dot{I}_I + \underline{Z}_{12}\dot{I}_{II} = \dot{E}_{11}; \quad \underline{Z}_{21}\dot{I}_I + \underline{Z}_{22}\dot{I}_{II} = \dot{E}_{22}.$$

Наличие индуктивных связей между катушками учитывается здесь при составлении собственных ($\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}$) и взаимных ($\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$) сопротивлений независимых контуров цепи.

При нахождении собственных сопротивлений $\underline{Z}_{11}$ и $\underline{Z}_{22}$ независимых контуров цепи учитываются только те индуктивные связи, которые имеются внутри данного независимого контура в виде удвоенных сопротивлений взаимной индуктивности. Это следует делать потому, что контурный ток в каждой из двух индуктивно связанных катушек наводит сопротивления взаимной индукции вида $j\omega M$, которые суммируются друг с другом (по аналогии с последовательным соединением двух индуктивно связанных катушек):

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &= (R_1 + j\omega L_1) + (R_2 + j\omega L_2) + 2j\omega M_{12} ; \\ \underline{Z}_{22} &= (R_2 + j\omega L_2) + (R_3 + j\omega L_3) - 2j\omega M_{23} .\end{aligned}$$

При учёте знаков сопротивлений взаимной индукции вида $j\omega M$ пользуемся общим правилом, изложенным в 6.1.

В уравнении для $\underline{Z}_{11}$ знак (+) у последнего члена принят потому, контурный ток $\dot{I}_I$ направлен относительно начал (знак •) катушек L_1 и L_2 в одну и ту же сторону – от начала каждой катушки к ее концу. Это означает, что катушки L_1 и L_2 включены согласно. В уравнении для $\underline{Z}_{22}$ знак (–) у последнего члена принят потому, что контурный ток $\dot{I}_{II}$ направлен относительно начал (знак •) катушек L_2 и L_3 в разные стороны, – в катушке L_2 он направлен от её конца к началу, а в катушке L_3 от её начала к концу. Это означает, что катушки L_2 и L_3 включены встречно.

При нахождении взаимных сопротивлений $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ следует перечислить все сопротивления, общие для I и II контуров. К ним относятся:

а) сопротивление $(R_2 + j\omega L_2)$ общей ветви этих контуров; б) сопротивление взаимной индукции $j\omega M_{13}$ между катушкой L_1 первого контура и катушкой L_3 второго контура цепи; в) сопротивление взаимной индуктивности $j\omega M_{12}$ между катушкой L_1 первого контура и катушкой L_2 второго контура цепи; г) сопротивление $j\omega M_{23}$ между катушкой L_2 первого контура цепи и катушкой L_3 второго контура. Заметим здесь, что катушка L_2 принадлежит к ветви, общей для двух смежных контуров, и поэтому при рассмотрении индуктивной связи M_{12} ее соотносят ко второму контуру, а при рассмотрении индуктивной связи M_{23} ее относят к первому контуру; все *сопротивления взаимной индуктивности берутся здесь без удвоения их величины* (по аналогии с параллельным соединением двух индуктивно связанных катушек).

С учётом выше сказанного взаимное сопротивление двух смежных контуров имеет вид

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(R_2 + j\omega L_2) + j\omega M_{13} - j\omega M_{12} + j\omega M_{23} .$$

В этом уравнении: знак (–) у комплексного сопротивления второй катушки $(R_2 + j\omega L_2)$ взят по общему правилу для взаимных сопротивлений контуров, изложенному в разделе 5.3, так как в данном сопротивлении

контурные токи направлены друг относительно друга встречно; знак (+) перед сопротивлением $j\omega M_{13}$ взят потому, что контурный ток $\dot{I}_I$ в катушке L_1 и контурный ток $\dot{I}_{II}$ в катушке L_3 направлены относительно начал (знак •) в одну сторону, то есть согласно; знак (–) перед сопротивлением $j\omega M_{12}$ взят потому, что контурный ток $\dot{I}_I$ в катушке L_1 и контурный ток $\dot{I}_{II}$ в катушке L_2 (отнесенной здесь ко второму контуру), направлены относительно их начал (знак •) в разные стороны, то есть встречно; знак (+) перед сопротивлением $j\omega M_{23}$ взят потому, что контурный ток $\dot{I}_I$ в катушке L_2 (отнесенной здесь к первому контуру) и контурный ток $\dot{I}_{II}$ в катушке L_3 второго контура направлены относительно начал (знак •) в одну сторону, то есть согласно.

2). Составим систему уравнений для определения токов цепи, используя 1-й и 2-й законы Кирхгофа. Она должна состоять из трех уравнений (п.5.2): одного по 1-му закону Кирхгофа (в цепи 2 узла), и двух по 2-му закону Кирхгофа.

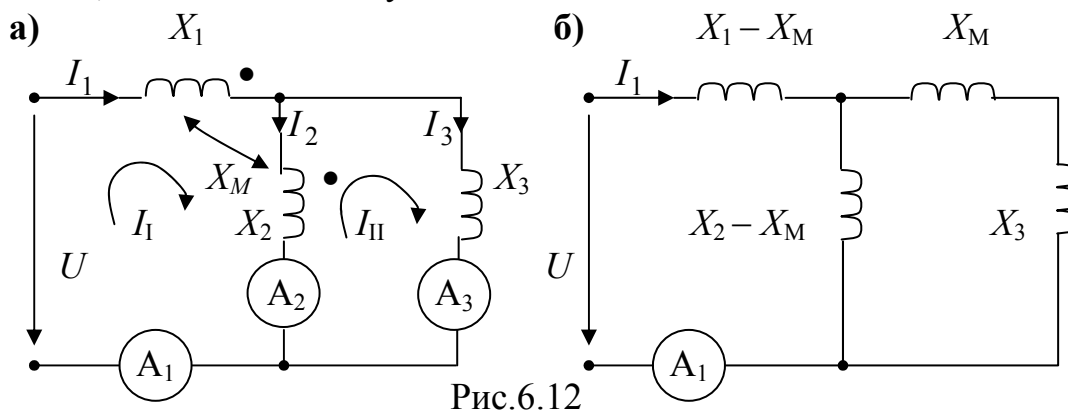
Выбираем направление токов во всех ветвях и направления обхода двух принятых контуров как это показано на рис.6.11 и получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \text{для узла а:} & \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ \text{для контура I:} & \quad \begin{cases} [\dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M_{12}\dot{I}_2 + j\omega M_{13}\dot{I}_3] + \\ + [\dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + j\omega M_{12}\dot{I}_1 + j\omega M_{23}\dot{I}_3] = \dot{U} \end{cases} \\ \text{для контура II:} & \quad \begin{cases} [\dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - j\omega M_{12}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_3] + \\ + [\dot{I}_3(R_3 + j\omega L_3) + j\omega M_{13}\dot{I}_1 + j\omega M_{23}\dot{I}_2] = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.8)$$

При составлении уравнений по 2-му закону Кирхгофа учитываем индуктивные связи каждой катушки со всеми другими. Так первая катушка имеет индуктивные связи со второй (M_{12}) и с третьей (M_{13}); вторая катушка имеет индуктивные связи с первой (M_{12}) и с третьей (M_{23}); третья катушка имеет индуктивные связи с первой (M_{13}) и со второй (M_{23}). Поэтому в уравнении для каждой k -ой катушки появляются дополнительные составляющие вида $(\pm j\omega M_{ks} \dot{I}_s)$, вызванные током $\dot{I}_s$ в s -ой катушке. Знак этих напряжений (для исключения неопределенности) определяется несколько иным правилом по сравнению с тем, которое сформулировано в п.6.1. При составлении уравнений по 2-му закону Кирхгофа необходимо сопоставить направление обхода контура в катушке k с направлением тока в катушке s . Если эти направления относительно "начал" катушек одинаковы, то берется знак (+), а если направления противоположны – знак (–). Так в уравнениях (6.8): **а)** для контура I дополнительные составляющие напряжения первой катушки ($j\omega M_{12}\dot{I}_2$) и ($j\omega M_{13}\dot{I}_3$) взяты со знаком (+), потому что направление обхода контура I в первой катушке (от начала к концу) и направления токов в

катушках 2 и 3 (от начала к концу) относительно их "начал" одинаковы; дополнительные составляющие напряжения второй катушки ($j\omega M_{12}\dot{I}_1$) и ($j\omega M_{23}\dot{I}_3$) взяты со знаком (+), потому что направление обхода контура I во второй катушке (от начала к концу) и направления токов в катушках 1 и 3 (от начала к концу) относительно их "начал" одинаковы; б) для контура II дополнительные составляющие напряжений второй катушки ($j\omega M_{12}\dot{I}_1$) и ($j\omega M_{23}\dot{I}_3$) взяты со знаком (-), потому, что направление обхода второго контура во второй катушке и направления токов в 1 и 3 катушках неодинаковы; знаки дополнительных составляющих напряжений третьей катушки предлагаем читателю прокомментировать самостоятельно.

Пример 6.5. В цепи с последовательно-параллельным соединением идеальных (без активных сопротивлений) катушек индуктивности (рис.6.12,а) известны их сопротивления, а также действующее значение приложенного напряжения: $U = 100$ В; $X_1 = 10$ Ом; $X_2 = 15$ Ом; $X_3 = 20$ Ом; $X_M = 8$ Ом. Известна, кроме того, маркировка катушек X_1 и X_2 , показанная на схеме знаком (•). Определить показание амперметров A_1, A_2 и A_3 , электромагнитной системы, включённых в эту цепь.



Решение. Решим задачу методом контурных токов. При отсутствии активных сопротивлений ($R_1 = R_2 = R_3 = 0$) уравнение по методу контурных токов можно составлять для модулей комплексных токов, напряжений и сопротивлений. Задаёмся направлением токов во всех трёх ветвях цепи и направлением действия контурных токов в двух выбранных независимых контурах I и II так, как это показано на схеме рис. 6.12,а, и получаем

$$\begin{cases} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = E_{11} \\ z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = E_{22} \end{cases}.$$

В этой системе уравнений:

$$z_{11} = X_1 + X_2 - 2X_M = 9 \text{ Ом}; \quad z_{22} = X_2 + X_3 = 35 \text{ Ом};$$

$$z_{12} = z_{21} = -X_2 + X_M = -7 \text{ Ом}; \quad E_{11} = U = 100 \text{ В}; \quad E_{22} = 0 \text{ В}.$$

Заметим здесь что при составлении z_{11} сопротивление $2X_M$ взято со знаком (-), потому что контурный ток I_1 в индуктивно связанных катушках X_1 и X_2 направлен относительно их «начал» в разные стороны и,

следовательно, эти катушки включены встречно. В z_{22} отсутствует сопротивление взаимной индуктивности, так как внутри контура II нет индуктивных связей между его катушками. Во взаимные сопротивления $z_{12} = z_{21}$ входит дополнительное сопротивление X_M , так как оно является общим для смежных контуров I и II. Это сопротивление взято со знаком (+), потому что ток I_1 в катушке X_1 первого контура и ток I_{II} в катушке X_2 (отнесенный здесь ко второму контуру) направлены в одну сторону относительно их «начал» и, следовательно, эти катушки включены согласно.

При решении задачи воспользуемся теорией определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 35 \end{vmatrix} = 315 - 49 = 266; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -7 \\ 0 & 35 \end{vmatrix} = 3500; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 100 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 700.$$

Действующие значения контурных токов

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3500}{266} = 13,15 \text{ А}; \quad I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{700}{266} = 2,63 \text{ А}.$$

Действующие значения токов ветвей

$$I_1 = I_I = 13,15 \text{ А}; \quad I_3 = I_{II} = 2,63 \text{ А}; \quad I_2 = I_I - I_{II} = 13,15 - 2,63 = 10,52 \text{ А}.$$

Эти токи и определяют показания амперметров: $A_1 \rightarrow 13,15 \text{ А};$
 $A_2 \rightarrow 10,52 \text{ А}; \quad A_3 \rightarrow 2,63 \text{ А}.$

6.6. Эквивалентные преобразования цепей со взаимной индуктивностью

Если две индуктивно связанные катушки имеют общий узел, то такую часть схемы можно заменить эквивалентной схемой без индуктивных связей. В табл.6.1 показаны участки схем с индуктивными связями между двумя катушками и эквивалентные им схемы без индуктивных связей.

Пример 6.6. В условиях примера 6.5 определить показания амперметра A_1 , заменив участок цепи с катушками X_1 и X_2 на эквивалентный участок без индуктивных связей (рис.6.12,б).

Решение. При отсутствии активных сопротивлений катушек, уравнения цепи можно составлять для модулей напряжений, токов и сопротивлений. Полное сопротивление цепи

$$X_{\Sigma} = (X_1 - X_M) + \frac{(X_2 - X_M)(X_M + X_3)}{(X_2 - X_M) + (X_M + X_3)} = 2 + \frac{7 \cdot 28}{7 + 28} = 2 + 5,6 = 7,6 \text{ Ом}.$$

Действующее значение тока цепи $I_1 = U/X_{\Sigma} = 100/7,6 = 13,15 \text{ А}$. Это значение тока и определяет показание амперметра электромагнитной системы.

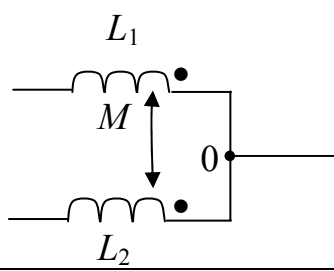
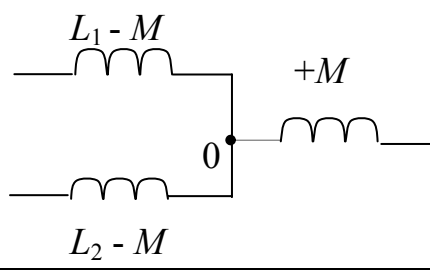
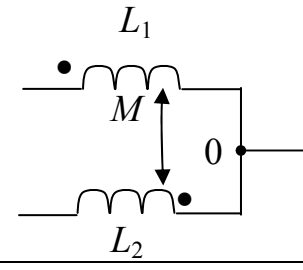
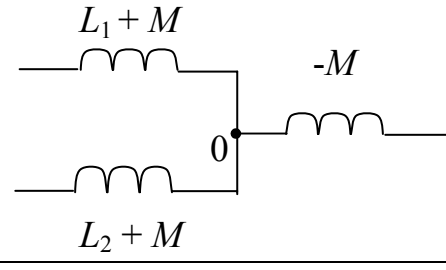
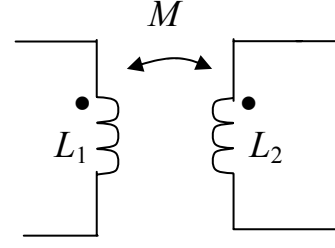
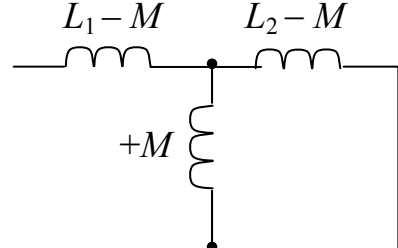
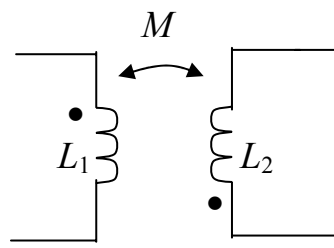
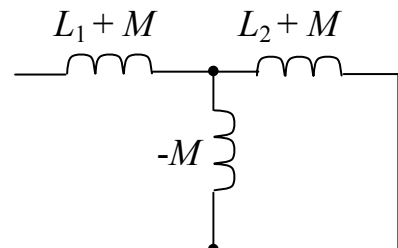
Заметим, что полученный результат соответствует расчету этой цепи (пример 6.5) без эквивалентной замены индуктивной связи катушек X_1 и X_2 .

Пример 6.7. В цепи с трансформаторной связью двух идеальных катушек индуктивности, показанной на рис.6.13,а, известно действующее значение напряжения ($U = 100 \text{ В}$), индуктивные сопротивления катушек ($X_1 = 8 \text{ Ом};$

$X_2 = 4 \text{ Ом}$); сопротивление их взаимной индуктивности ($X_M = 3 \text{ Ом}$) и маркировка начал (знак $\bullet$). Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в цепь левого контура цепи.

Т а б л и ц а 6.1

Схемы замещения участков цепи с индуктивно связанными катушками

№ п/п	Участок цепи с индуктивной связью	Эквивалентный участок без индуктивной связи
1	Согласное включение 	
2	Встречное включение 	
3	Согласное включение 	
4	Встречное включение 	

Решение. Решим задачу путём преобразования цепи с индуктивной связью в эквивалентную цепь без индуктивной связи. В соответствии с позицией 3 табл.6.1 получаем (рис.6.13,б), что комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{Э}} = j(X_1 - X_M) + \frac{j(X_2 - X_M)jX_M}{j(X_2 - X_M) + jX_M} = j5 + j0,75 = j5,75 \text{ Ом.}$$

Комплексный ток цепи $\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_\Sigma = 100e^{j0} / j5,75 = -j17,4 \text{ А}$.

Показание амперметра А составляет 17,4 А.

Представляем читателю убедиться в том, что расчет цепи без эквивалентной замены индуктивной связи приводит к тому же результату.

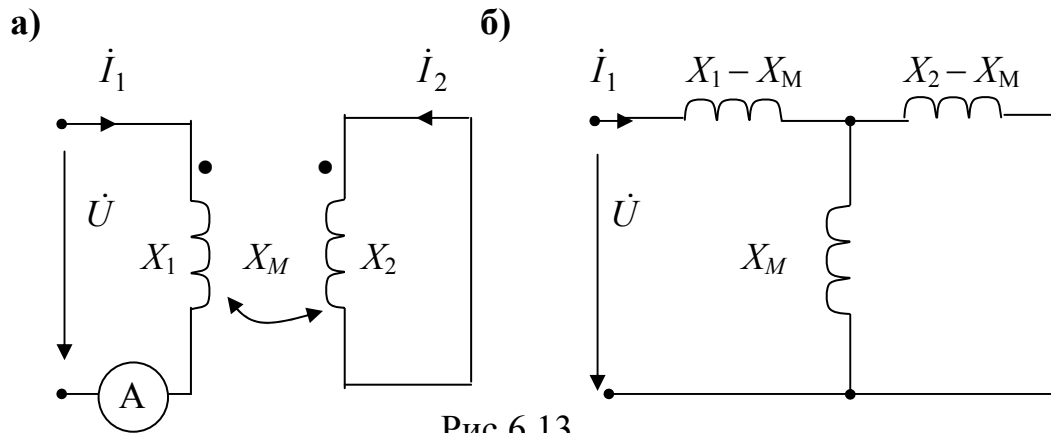


Рис.6.13

6.7. Дополнительные задания к главе 6. Вопросы и примеры для самотестирования

1. В условиях примера 6.1 (рис.6.7) определить ток цепи при согласном и встречном включении индуктивно связанных катушек, используя символический метод.

Ответы: $\dot{I}_{\text{согл}} = -j2 \text{ А}$; $\dot{I}_{\text{встр}} = -j3 \text{ А}$.

2. В условиях примера 6.3 (рис.6.8) определить токи при согласном и встречном включении индуктивно связанных катушек, используя символический метод.

Ответы: при согл. $\dot{I}_1 = -j2 \text{ А}$, $\dot{I}_2 = -j4 \text{ А}$; при встр. $\dot{I}_1 = -j6 \text{ А}$, $\dot{I}_2 = -j8 \text{ А}$.

3. К цепи с трансформаторной связью двух катушек (рис.6.10) приложено напряжение, действующее значение которого $U_1 = 100 \text{ В}$. Индуктивное сопротивление первой катушки $X_1 = 10 \text{ Ом}$, а сопротивление взаимной индуктивности $X_M = 5 \text{ Ом}$. Определить действующее значение напряжения U_2 , индуцированного на разомкнутых зажимах второй катушки.

Ответ: $U_2 = 50 \text{ В}$.

4. Определить величину коэффициента магнитной связи двух индуктивно связанных катушек, если $X_{L1} = 9 \text{ Ом}$, $X_{L2} = 4 \text{ Ом}$, $X_M = 3 \text{ Ом}$.

Ответ: $K = 0,5$.

5. Цепь с последовательным соединением двух идеальных ($R=0$) индуктивно связанных катушек имеет при согласном их включении $X_{\text{согл}} = 80 \text{ Ом}$, а при встречном включении $X_{\text{встр.}} = 20 \text{ Ом}$. Определить величину сопротивления взаимной индуктивности этих катушек.

Ответ: $X_M = 15 \text{ Ом}$.

6. Ответить на все вопросы любого из шести вариантов раздела 4 сборника тестовых карт [6].

7. Рассмотреть примеры с решениями 12,в и 12,г из сборника [7].

Глава 7

Трехфазные цепи

7.1. Введение

Трехфазные цепи синусоидального тока получили широчайшее распространение в электроэнергетике. Они обладают двумя основными преимуществами перед однофазными (двухпроводными) цепями: а) двойной экономией цветного металла при передаче одной и той же мощности, б) возможностью получения вращающегося магнитного поля, на базе которого создан простой и надежный трехфазный асинхронный двигатель.

Источником энергии в трехфазных цепях служит трехфазный генератор, схематическое устройство которого показано на рис.7.1,а.

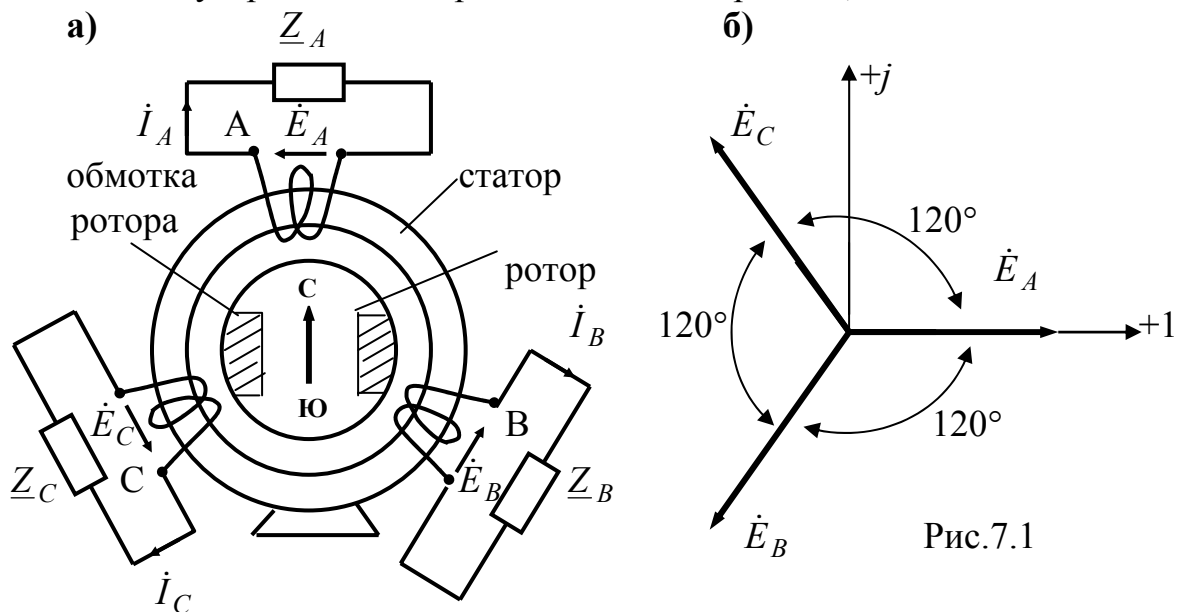


Рис.7.1

Генератор состоит из статора (неподвижная часть) и ротора (подвижная часть). На статоре в специальных пазах на его внутренней поверхности расположены три одинаковые обмотки, сдвинутые друг относительно друга в пространстве на 120° (на рис.7.1,а эти обмотки показаны условно). Их начала обозначены заглавными буквами А,В,С. Ротор генератора представляет собой электромагнит постоянного тока, обмотка которого питается от отдельного источника постоянного тока через два контактных кольца, расположенных на валу. Ротор устроен так, что его магнитное поле распределяется в зазоре вдоль внутренней поверхности статора по закону косинуса. При вращении ротора с некоторой постоянной скоростью, его магнитное поле индуцирует в обмотках статора (в соответствии с законом электромагнитной индукции: $e_{инд} = - (d\psi/dt)$) три одинаковые синусоидальные ЭДС, сдвинутые друг относительно друга по фазе на 120°. Они образуют симметричную систему, которая в виде векторной диаграммы представлена на рис.7.1,б. Расположив ЭДС обмотки А вдоль оси вещественных чисел комплексной плоскости, получаем запись ЭДС в следующем виде:

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = E_A e^{j240^\circ} = E_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E_A e^{j120^\circ}, \quad (7.1)$$

где $E_A = E_B = E_C$ - действующие значения фазных ЭДС генератора.

Величину $e^{j120^\circ} = a$ называют *фазовым множителем*. Используя его в формулах 7.1, получаем

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = a^2 E_A; \quad \dot{E}_C = a E_A. \quad (7.1 \text{ а})$$

Заметим, что

$$a = e^{j120^\circ} = (-0,5 + j0,87); \quad a^2 = e^{j240^\circ} = (-0,5 - j0,87); \quad 1 + a + a^2 = 0. \quad (7.1 \text{ б})$$

С учетом формул (7.1б) очевидно, что сумма трех векторов симметричной системы фазных ЭДС генератора, показанных на рис.7.1,б, равна нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E_A (1 + a + a^2) = 0. \quad (7.2)$$

Разработчиком трехфазных цепей является М.О.Доливо-Добровольский. Впервые трехфазная цепь была продемонстрирована во Франкфурте-на-Майне в 1891г. на международной электротехнической выставке. Она признана во всем мире как оптимальная система для производства, передачи и распределения электрической энергии.

Если к обмоткам генератора (рис.7.1,а) подсоединить нагрузочные сопротивления, получится простейшая (несвязанная) трехфазная цепь, состоящая из трех отдельных двухпроводных цепей, называемых *фазами*. Для отличия друг от друга их обозначают буквами А, В, С. На рис.7.1,а этими буквами обозначены начала фазных обмоток генератора.

Термин «фаза», употребляемый здесь, имеет технический смысл («фаза перегорела», «короткое замыкание фазы», «обрыв фазы» и т.д). Его следует отличать от термина «фаза», используемого в теории цепей синусоидального тока для обозначения стадии развития синусоиды тока, напряжения или ЭДС и имеющего физический смысл угла, измеряемого в градусах или радианах.

Несвязанные трехфазные цепи не имеют никаких преимуществ перед однофазными (двухпроводными) и практически не применяются. Обычно трехфазные цепи связывают звездой (условное обозначение $\star$) или треугольником (условное обозначение Δ).

7.2. Связывание трехфазной цепи звездой

При связывании звездой концы всех трех обмоток генератора объединяют в одну общую точку, которая называется нейтральной точкой генератора или *нейтралью*. Также поступают и с фазными приемниками, которые образуют нейтральную точку (нейтраль) трехфазного приемника. При этом три обратных провода отдельных фаз объединяются в один и система из шестипроводной становится четырехпроводной, как это показано на рис.7.2 *. На этом рисунке ключ К1 разомкнут, а ключи К2 и К3 замкнуты. Они понадобятся при дальнейшем изложении для создания различных несимметричных режимов работы данной цепи.

* Экспериментальное исследование цепи, связанной звездой, проводится в лабораторной работе № 6 [8].

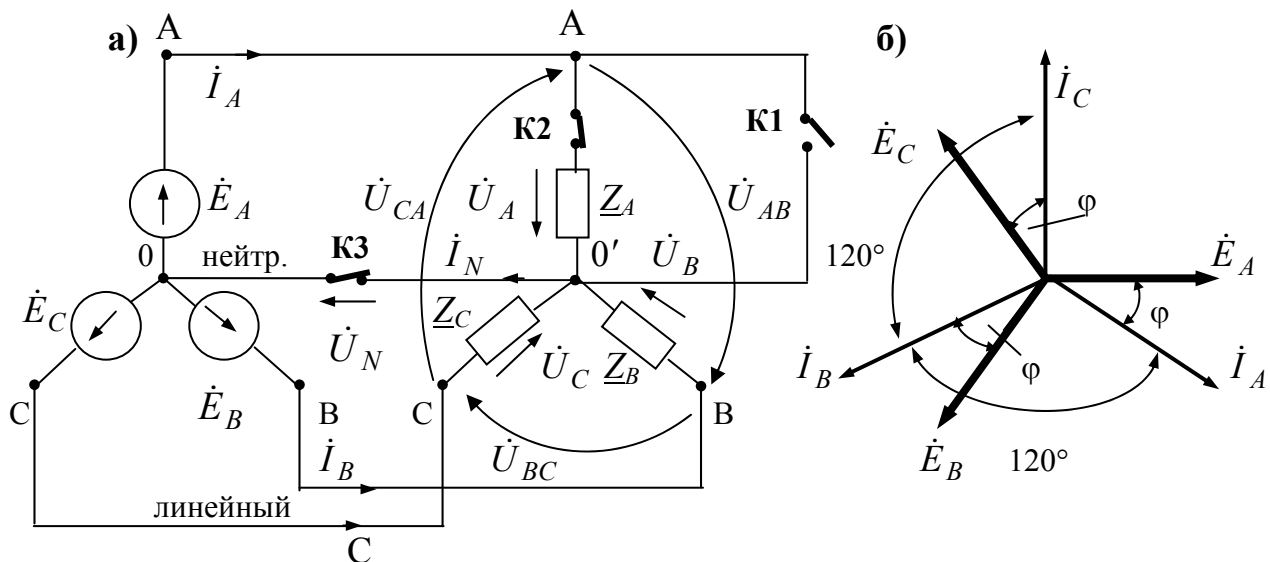


Рис.7.2

Провода, идущие от генератора к приемникам называются *линейными*, а провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника называется *нейтральным*. Показанные на этом рисунке направления действия ЭДС, токов и напряжений соответствуют направлениям, принятым в большинстве учебников по теории цепей.

Трехфазная цепь, связанная звездой, имеет ряд особенностей.

1. Токи линейных проводов, не разветвляясь, попадают в фазы приемников, поэтому фазные токи равны токам в линейных проводах: $\dot{I}_\phi = \dot{I}_л$.

2. Ток в нейтральном проводе $\dot{I}_N$ равен алгебраической сумме комплексных токов всех трех фаз. В соответствии с 1-м законом Кирхгофа для нейтральной точки приемника (0') имеем

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N. \quad (7.3)$$

При отсутствии или обрыве нейтрального провода получаем

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (7.3 \text{ а})$$

В этом случае, зная два линейных тока, можно легко найти третий ток.

3. Если генератор вырабатывает симметричную систему фазных ЭДС (рис.7.1,б) и, кроме того, комплексные сопротивления всех трех фаз цепи одинаковы ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi = R \pm jX$), то комплексные токи, определяемые в соответствии с формулой закона Ома ($\dot{I}_\phi = \dot{U}_\phi / \underline{Z}_\phi$), имеют одинаковые действующие значения и сдвинуты друг относительно друга по фазе на 120° (как это показано на рис.7.2,б). Они образуют симметричную систему фазных токов и при этих условиях $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Следовательно, ток в нейтральном проводе отсутствует и этот провод фактически не нужен.

Заметим, что на рис.7.2,б угол $\varphi = \arctg X/R$ соответствует индуктивному характеру фазного сопротивления.

Рассмотренный выше режим работы трехфазной цепи называется *симметричным*. В этом режиме работают все трехфазные приемники (например, трехфазные двигатели, нагревательные печи). Они имеют три одинаковые обмотки и не нуждаются в нейтральном проводе. Такие трехфазные приемники называют *симметричными*. Однофазные же приемники (лампы освещения, бытовые приборы) при соединении их звездой требуют наличия нейтрального провода для поддержания одинакового напряжения на всех трех фазах цепи.

4. Трехфазные цепи, связанные звездой, широко используются в электроэнергетике для передачи электромагнитной энергии на большие расстояния. Упрощенная схема такой цепи показана на рис.7.3. Эта цепь является трехпроводной и наглядно демонстрирует свои преимущества по сравнению с подачей той же мощности тремя однофазными цепями. Энергетики стремятся включать однофазные приемники энергии так, чтобы нагрузка каждой из трех фаз линии электропередачи (ЛЭП) была равномерной.

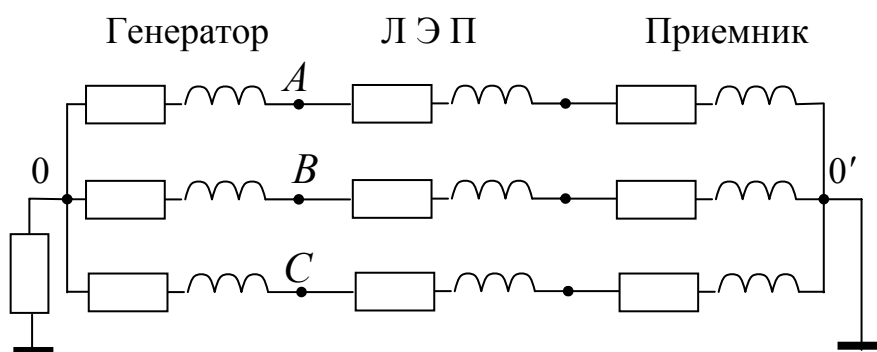


Рис.7.3

Возможная несимметрия в ЛЭП компенсируется нейтральным проводом, в качестве которого используется земля (система с заземленной нейтралью).

5. При связывании звездой (рис.7.2) различают фазные и линейные напряжения. Фазные напряжения ($\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$) действуют между началом и концом каждой фазы. Их направление принято в соответствии с направлением фазных токов цепи – от начала фазы к ее концу (к нейтральной точке $0'$). Линейные напряжения ($\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$) действуют между линейными проводами. Их направление принято по часовой стрелке.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для каждого из трех контуров, образованных одним линейным и двумя фазными напряжениями, имеем

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (7.4)$$

Эти соотношения в виде векторной диаграммы представлены на рис.7.4,а.

На этой диаграмме дана несимметричная система фазных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ и показано, как на ее основе построить систему линейных напряжений $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$.

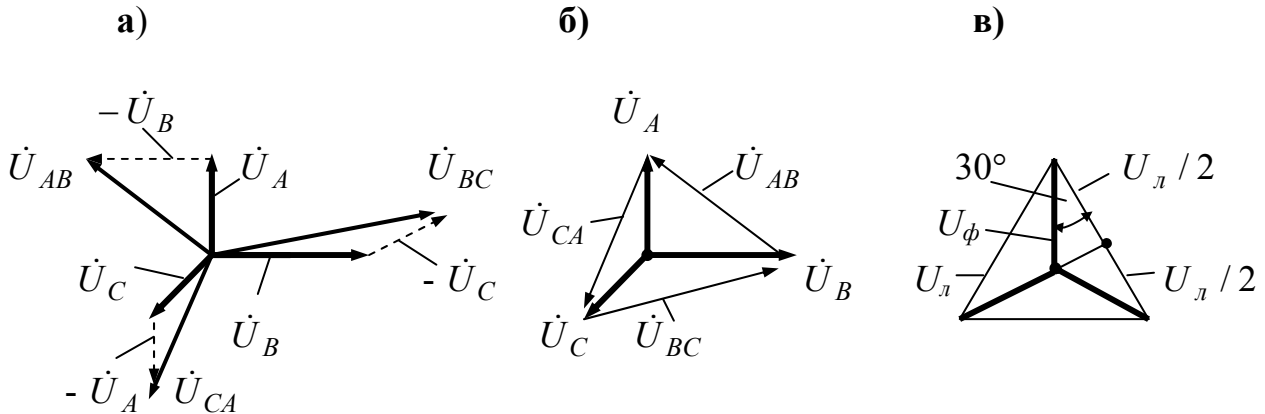


Рис.7.4

Для построения, например, вектора линейного напряжения $\dot{U}_{AB}$ надо сложить в соответствии с формулами (7.4) вектор фазного напряжения $\dot{U}_A$ с вектором $\dot{U}_B$, взятым с обратным знаком: $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A + (-\dot{U}_B)$. Если полученный таким образом вектор $\dot{U}_{AB}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его конец совпал с концом вектора $\dot{U}_A$, то его начало совпадет с концом вектора $\dot{U}_B$ (рис.7.4,б). Аналогичным образом следует поступить и при построении векторов $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$: $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B + (-\dot{U}_C)$; $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C + (-\dot{U}_A)$, как это показано на векторной диаграмме рис.7.4,а. Перенеся эти векторы параллельно самим себе аналогично предыдущему, получим, что вектор линейного напряжения $\dot{U}_{BC}$ расположится между концами векторов фазных напряжений $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$, а вектор линейного напряжения $\dot{U}_{CA}$ - между концами векторов фазных напряжений $\dot{U}_C$ и $\dot{U}_A$. Такой вариант изображения векторов фазных и линейных напряжений показан на рис.7.4,б. Заметим, что обе векторные диаграммы идентичны и широко используются в учебной литературе для наглядной демонстрации соотношений между фазными и линейными напряжениями.

В частном случае, если система векторов фазных напряжений симметрична, то система векторов линейных напряжений также симметрична и образует равносторонний треугольник, (рис.7.4,в) из геометрии которого следует, что действующие значения (длины векторов) линейных напряжений в $\sqrt{3}$ больше действующих значений фазных напряжений. В самом деле: $U_l / 2 = U_\phi \cos 30^\circ = U_\phi \sqrt{3} / 2$. Отсюда

$$U_l = \sqrt{3} U_\phi . \quad (7.5)$$

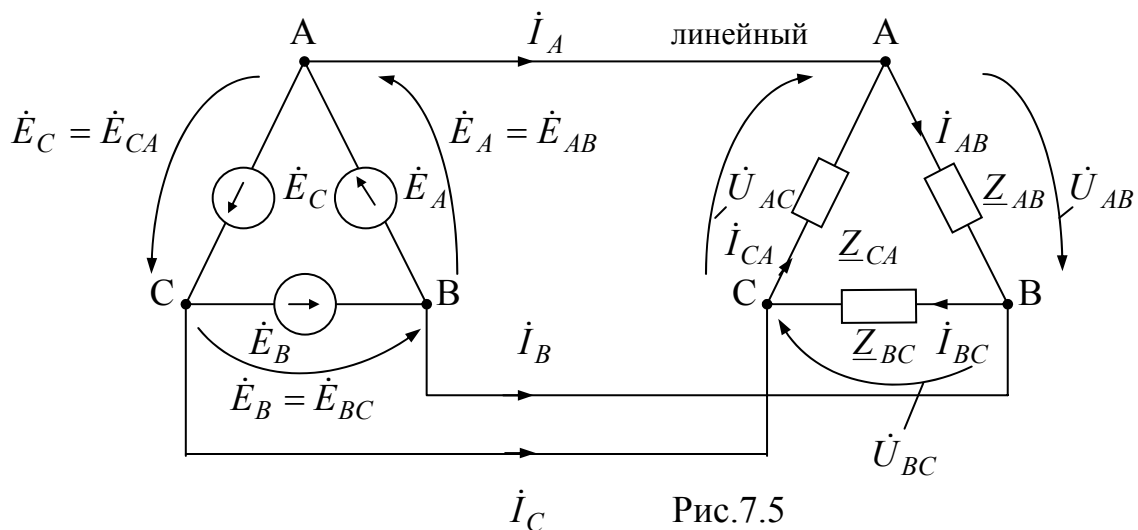
6. При соединении приемников звездой сумма всех трех комплексных линейных напряжений равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \quad (7.6)$$

Это положение вытекает из второго закона Кирхгофа, примененного к замкнутому контуру, образованному тремя линейными напряжениями $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ и наглядно иллюстрируется векторной диаграммой (рис.7.4,б). Заметим здесь, что, зная два любых комплексных линейных напряжения, легко найти третье.

7.3. Связывание трехфазной цепи треугольником

При связывании трехфазной цепи треугольником (рис.7.5) конец обмотки фазы А генератора соединяется с началом обмотки В, конец обмотки В с началом обмотки С, конец обмотки С с началом обмотки А, образуя замкнутый контур. При этом у исправного генератора, не замкнутого на нагрузку (при холостом его ходе), в этом замкнутом контуре нет тока, так как в соответствии с формулой (7.2) сумма фазных ЭДС в этом контуре равна нулю*.



При связывании цепи треугольником фактически объединяется прямой провод фазы А с обратным проводом фазы С несвязанной трехфазной цепи (рис.7.1,а), прямой провод фазы В с обратным проводом фазы А, прямой провод фазы С с обратным проводом фазы В.

Из начала фаз А, В и С генератора отходят три провода к приемникам энергии. Они называются *линейными*. Направления действия линейных токов $\dot{I}_A, \dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ принято на рис.7.5 такое же, как и при соединении звездой – от генератора к приемнику. Заметим, что при соединении треугольником фазные ЭДС генератора и фазные сопротивления приемников оказываются включенными между началами фаз А и В, В и С, С и А. Поэтому фазные ЭДС и фазные сопротивления удобно здесь обозначать двойными индексами: $\dot{E}_A = \dot{E}_{AB}$;

* Исследование трехфазной цепи, связанной треугольником, производится в лабораторной работе № 7 [8].

$\dot{E}_B = \dot{E}_{BC}$; $\dot{E}_C = \dot{E}_{CA}$; $\underline{Z}_A = \underline{Z}_{AB}$; $\underline{Z}_B = \underline{Z}_{BC}$; $\underline{Z}_C = \underline{Z}_{CA}$. Это же относится к фазным токам и фазным напряжениям, направления действия которых принято по часовой стрелке.

Трехфазная цепь, связанная треугольником, имеет ряд особенностей

1. Напряжения между линейными проводами ($\dot{U}_л$) одновременно являются и фазными ($\dot{U}_ф$) напряжениями: $\dot{U}_л = \dot{U}_ф$. При этом сумма комплексных линейных напряжений всех трех фаз (в соответствии со вторым законом Кирхгофа) равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \quad (7.6)$$

Таким образом, зная два любых линейных напряжения, можно легко найти третье.

2. Сумма комплексных токов всех трех линейных проводов равна нулю:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (7.7)$$

Это положение легко доказать с помощью первого закона Кирхгофа, если предварительно преобразовать треугольник сопротивлений в эквивалентную звезду.

3. При связывании трехфазной цепи треугольником различают фазные ($\dot{I}_{AB}$, $\dot{I}_{BC}$ и $\dot{I}_{CA}$) и линейные ($\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$) токи. Применяя первый закон Кирхгофа к узлам А, В и С трехфазного приемника, получаем следующие соотношения между этими токами:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (7.8)$$

Эти соотношения в виде векторной диаграммы показаны на рис.7.6,а, где представлена несимметричная система фазных токов $\dot{I}_{AB}$, $\dot{I}_{BC}$ и $\dot{I}_{CA}$. И показано, что векторы линейных токов расположены между концами векторов фазных токов. Графические построения здесь подобны построениям для фазных и линейных напряжений на рис.7.4,а и 7.4,б. Для вектора $\dot{I}_A$, например, имеем, что $\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} + (-\dot{I}_{CA})$. Если этот вектор перенести параллельно самому себе так, чтобы его конец совпал с концом вектора $\dot{I}_{AB}$, то его начало совпадет с концом вектора $\dot{I}_{CA}$. Аналогично происходит и с векторами $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$.

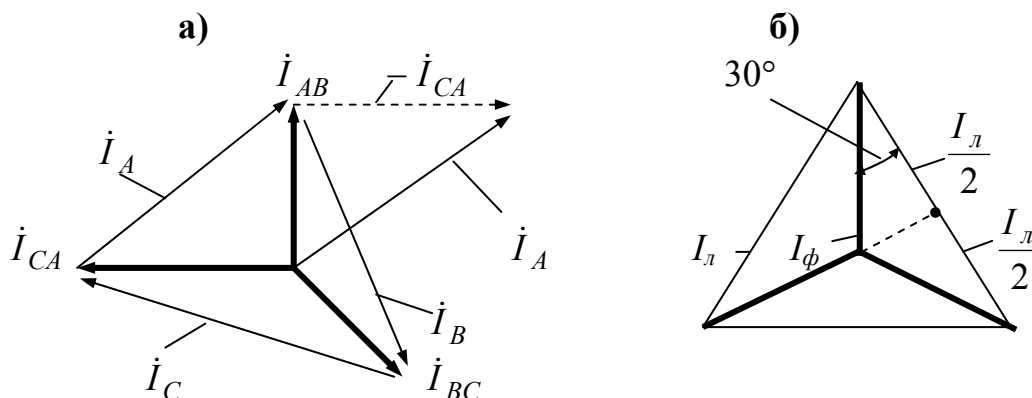


Рис.7.6.

В частном случае, при симметрии системы векторов фазных токов (рис.7.6,б), система векторов линейных токов получается также симметричной и образует равносторонний треугольник, из геометрии которого следует, что действующие значения (длины векторов) линейных токов в $\sqrt{3}$ больше действующих значений фазных токов:

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi . \quad (7.9)$$

4. Соединение треугольником не применяется для передачи электромагнитной энергии на большие расстояния ввиду того, что токи в линейных проводах больше токов в фазах приемников (в $\sqrt{3}$ раз при симметричном режиме работы) и это соединение менее экономично по сравнению с соединением звездой.

7.4. Расчет трехфазных цепей

Разработка трехфазных цепей – пример эффективного решения проблемы производства, передачи и распределения электромагнитной энергии. Однако применительно к теории – это обычные разветвленные цепи синусоидального тока с несколькими источниками и несколькими приемниками, к которым применимы все методы расчета, изложенные в главах 3, 4, 5 и 6 настоящего учебного пособия.

Трехфазные цепи могут работать в двух основных режимах – симметричном и несимметричном.

а) Симметричный режим работы трехфазной цепи имеет место при следующих двух условиях: генератор вырабатывает симметричную систему ЭДС (рис.7.1,б) и, кроме того, комплексные сопротивления всех трех фаз приемника одинаковы (симметричный приемник). Пример такого режима работы рассмотрен выше в пункте 7.2 поз.3 настоящей главы. Очевидно, что при симметричном режиме достаточно произвести расчет только одной фазы трехфазной цепи (например, фазы *A*). Токи других фаз будут иметь с фазой *A* одинаковые амплитуды (а также и действующие значения) и сдвинуты по фазе относительно своих фазных напряжений на один и тот же угол (ϕ). При этом друг относительно друга токи всех трех фаз будут сдвинуты по фазе на $\pm 120^\circ$, как это показано на рис.7.2,б.

б) Несимметричный режим работы трехфазной цепи имеет место в тех случаях, когда хотя бы одно из двух условий симметричного режима отсутствует. При этом необходимо производить расчеты токов и напряжений всех трех фаз, используя известные методы расчета цепей синусоидального тока.

Пример 7.1. Трехфазная цепь (рис.7.2,а) состоит из генератора, вырабатывающего симметричную систему ЭДС с действующим значением $E=220\text{В}$ и симметричного приемника соединенного звездой, сопротивление каждой фазы которого составляет $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi = R = 22 \text{ Ом}$ (на рис.7.2 ключ К1 разомкнут, а ключи К2 и К3 замкнуты). Требуется произвести полный

расчет данной цепи, работающей в симметричном режиме и определить токи и напряжения всех трех фаз приемника, напряжение между нейтральными точками генератора (0) и приемника (0'), ток в нейтральном проводе, а также построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости.

Решение. 1. Принимаем направление действия ЭДС, токов и напряжений в данной цепи в соответствии с рис.7.2,а.

2. Определяем комплексные фазные ЭДС генератора. Для этого совмещаем ЭДС фазы А с осью вещественных чисел (рис.7.1,а) и получаем

$$\dot{E}_A = 220 \text{ В}; \quad \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.$$

3. Определяем комплексные линейные напряжения приемника. Для этого воспользуемся вторым законом Кирхгофа для контуров цепи, образованных фазными ЭДС генератора и линейными напряжениями трехфазного приемника.

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = [220 - (-110 - j190)] = (330 + j190) =$$

$$= \sqrt{330^2 + 190^2} e^{j \arctg \frac{190}{330}} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = [(-110 - j190) - (-110 + j190)] = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = [(-110 + j190) - 220] = -330 + j190 = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}.$$

Действующие значения всех трех линейных напряжений одинаковы и составляют $U_L = 380 \text{ В}$. Правильность проведенных вычислений проверяем, воспользовавшись формулой (7.6). Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.

4. Определяем комплексные фазные напряжения приемника. В соответствии со 2-м законом Кирхгофа непосредственно из схемы цепи находим, что при наличии нейтрального провода они равны фазным ЭДС генератора:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A = 220 \text{ В}; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} \text{ В}.$$

Действующие значения всех трех фазных напряжений одинаковы ($U_\phi = 220 \text{ В}$) и в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных напряжений ($U_L = 380 \text{ В}$), как это и следует из общей теории в соответствии с 7.2 и формулой (7.5).

5. Определяем комплексное напряжение $\dot{U}_N$ между нейтральными точками приемника и генератора. Для этого используем формулу (5.9,а) метода узловых напряжений (пункт 5.4), согласно которой в нашем примере это напряжение $\dot{U}_N = \dot{J}_{11} / \dot{Y}_{11} = 0$, так как $\underline{Y}_N = \infty$ (нейтральный провод не имеет конечного сопротивления), а $\dot{J}_{11} = \dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C \neq 0$ и является конечным числом.

6. Определяем комплексные фазные (они же линейные) токи приемника, используя формулу закона Ома

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{22} = 10e^{-j120^\circ} = (-5 - j8,7) \text{ А};$$

$$i_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{220e^{+j120^\circ}}{22} = 10e^{+j120^\circ} = 10(-0,5 + j8,7) = (-5 + j8,7) \text{ A.}$$

Действующее значение токов во всех трех фазах цепи одинаковы и составляют $I_\phi = 10 \text{ A}$. Векторы этих токов образуют симметричную систему и их сумма, определяющая ток в нейтральном проводе $\dot{I}_N$ в соответствии с формулой (7.3) равна нулю. Следовательно, при симметричном режиме работы нейтральный провод для нормальной работы цепи не нужен.

7. Векторная диаграмма токов и напряжений исследуемой цепи представлена на рис.7.7 в двух вариантах.

В первом варианте (рис.7.7,а) все векторы исходят из начала координат комплексной плоскости. Во втором варианте (рис.7.7,б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они расположились между концами соответствующих векторов фазных напряжений и образовали равносторонний треугольник.

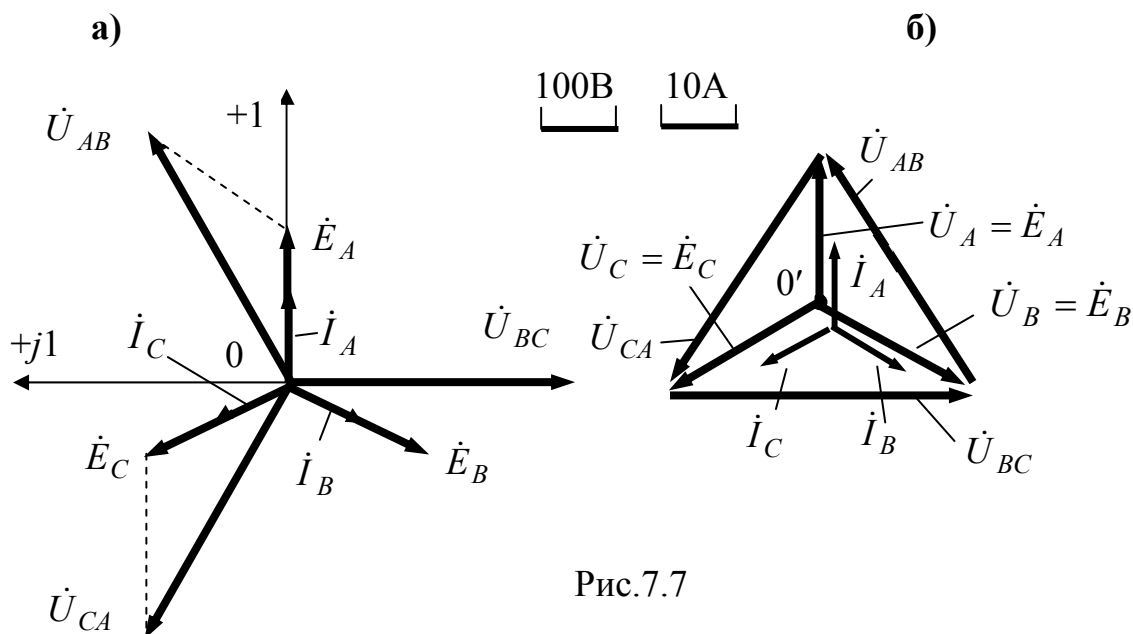


Рис.7.7

Из этой диаграммы видно, что при симметричном режиме работы достаточно рассчитать токи и напряжения только одной из фаз цепи, например фазы А. Токи и напряжения остальных двух фаз будут такими же по действующему значению, но сдвинуты относительно фазы А по фазе на $\pm 120^\circ$. Кроме того из геометрии равностороннего треугольника следует, что $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_\phi$.

Пример 7.2. Три одинаковых нагрузочных сопротивления $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_\phi = (30 + j40) \text{ Ом}$ соединены треугольником и подключены к трехфазному генератору, фазные обмотки которого объединены в звезду (рис.7.8). Генератор вырабатывает симметричную систему фазных ЭДС с действующим значением $E_\phi = 380 \text{ В}$. Требуется определить показания электромагнитных амперметра и вольтметра, включенных в цепь, а также построить векторную диаграмму токов и напряжений трехфазного приемника.

Заметим, что на рис.7.8 ключи К1 и К2 замкнуты. Они необходимы для создания в дальнейшем несимметричных режимов работы данной цепи. В этом примере $\dot{U}_{AA'} = 0$, $\dot{U}_{CA'} = \dot{U}_{CA}$ и $\dot{U}_{A'B} = \dot{U}_{AB}$.

Решение. 1. Данная трехфазная цепь работает в симметричном режиме, поэтому для решения задачи достаточно рассчитать только одну ее фазу (например, фазу АВ приемника). Принятые направления напряжений и токов соответствуют рис.7.2 и 7.5.

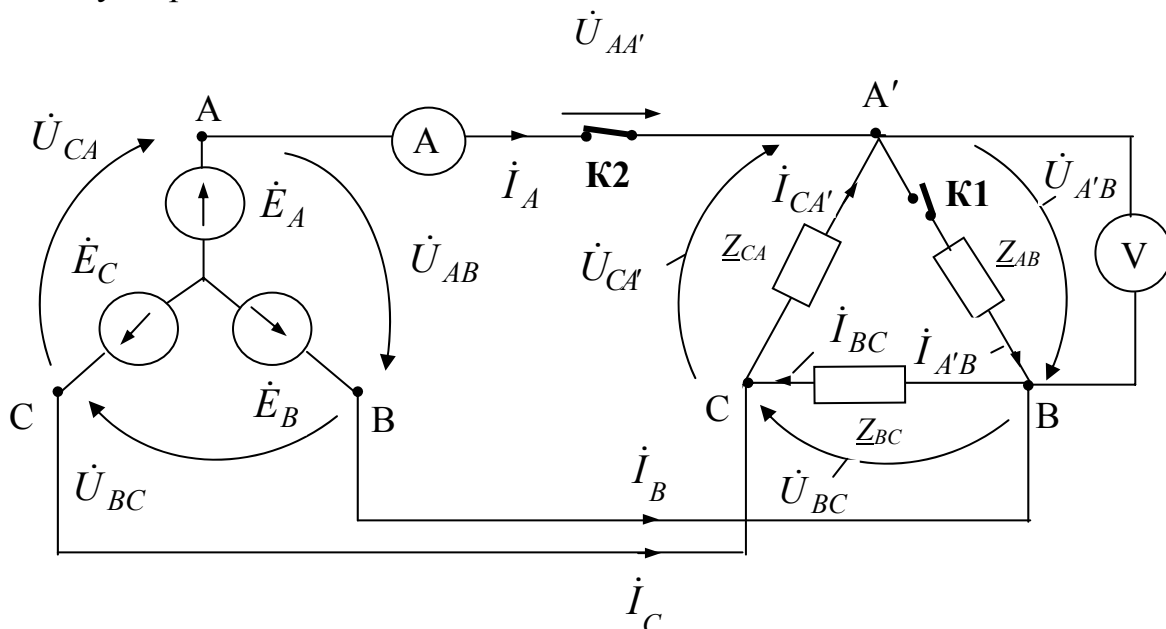


Рис.7.8

2. Действующие значения линейных ЭДС трехфазного генератора в $\sqrt{3}$ больше действующих значений его фазных ЭДС и составляют $E_{\text{л}} = \sqrt{3}E_{\phi} = 660$ В. Провода линии электропередачи в нашем примере не обладают сопротивлением, поэтому действующие значения фазных напряжений приемника, соединенного треугольником $U_{\phi} = E_{\text{л}} = 660$ В. Таким образом, показание вольтметра электромагнитной системы, включенного в фазу АВ приемника, составляет 660 В.

3. Действующие значения тока в фазе АВ приемника

$$I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{z_{\phi}} = \frac{660}{50} = 13 \text{ А, где } z_{\phi} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом.}$$

4. Угол сдвига фаз ϕ между напряжением и током фазы АВ: $\phi = \arctg X/R = \arctg 40/30 = 53^{\circ}$. На этот угол (цепь имеет индуктивный характер) ток I_{AB} в фазе АВ отстает от приложенного напряжения U_{AB} .

5. Действующие значения напряжений и токов в фазах ВС и СА приемника такие же, как и в фазе АВ, но их векторы сдвинуты относительно векторов фазы АВ на 120° : в фазе ВС на 120° по часовой стрелке, а в фазе СА на

120° против часовой стрелки.

6. При симметричном режиме работы трехфазной цепи действующие значения линейных токов в $\sqrt{3}$ раз больше действующих значений фазных токов, поэтому $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}} = \sqrt{3} \cdot 13 = 25 \text{ А}$. Следовательно, показание амперметра, включенного в любой линейный провод, составляет 25 А.

7. Векторную диаграмму фазных токов и напряжений приемника предлагаем читателю построить самостоятельно по образцу рис.7.2,б.

Пример 7.3. Обмотки трехфазного электродвигателя (рис.7.9,а) рассчитаны на нормальную работу при напряжении $U_{\text{ф}} = 380 \text{ В}$. В цепи с какими линейными напряжениями может нормально работать такой электродвигатель?

Решение. В электроэнергетике линейные напряжения низковольтных трехфазных цепей имеют стандартные величины действующих значений, составляющие 220, 380 или 660 вольт. Они отличаются друг от друга в $\sqrt{3}$ раз, что позволяет один и тот же трехфазный приемник эксплуатировать на двух смежных линейных напряжениях. В нашем примере трехфазный электродвигатель будет нормально работать от трехфазной сети с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ при включении его обмоток треугольником (рис.7.9,б) и от сети с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 660 \text{ В}$ при включении его обмоток звездой (рис.7.9,в). В обоих этих случаях на каждую его фазу придется напряжение $U_{\text{ф}} = 380 \text{ В}$.

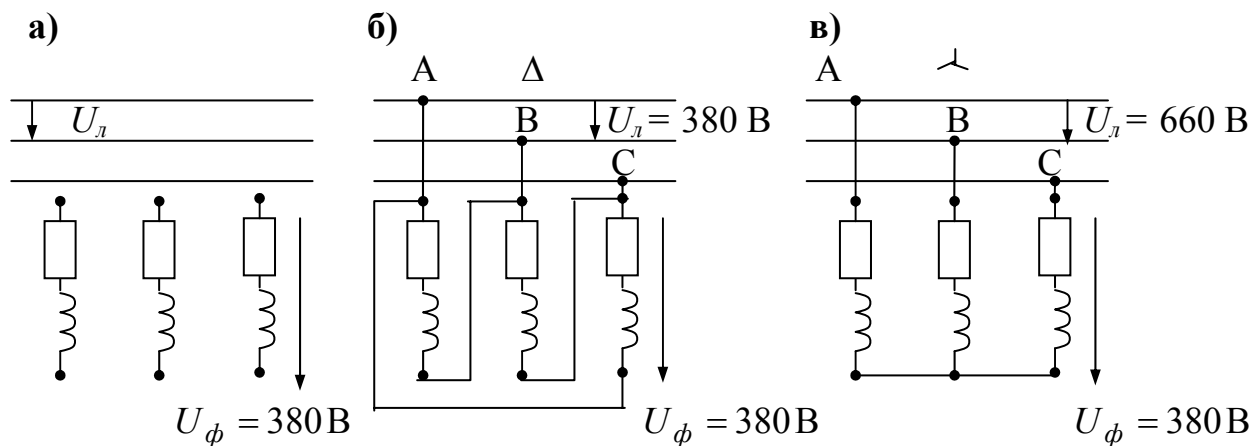


Рис. 7.9

Пример 7.4. Два симметричных трехфазных приемника, каждый из которых соединен звездой, включены в трехфазную цепь с действующим значением линейного напряжения $U_{\text{л}} = 415 \text{ В}$, как это показано на рис.7.10,а. Параметры приемников известны: $R = 6 \text{ Ом}$; $X_{\text{с}} = 8 \text{ Ом}$. Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в один из линейных проводов цепи.

Решение. 1. Между нейтральными точками симметричных приемников нет напряжения, поэтому можно считать, что эти приемники включены между собой

параллельно, и объединить их в один эквивалентный приемник, показанный на рис.7.10,б.

2. Фазные напряжения этого трехфазного приемника составляют $U_\phi = U_\lambda / \sqrt{3} = 415 / \sqrt{3} = 240 \text{ В}$.

3. Ток в каждой фазе эквивалентного приемника состоит из суммы токов в его активном (I_R) и реактивном (I_X) сопротивлениях, включенных параллельно между собой. В соответствии с законом Ома для цепи синусоидального тока имеем $I_R = \frac{U_\phi}{R} = \frac{240}{6} = 40 \text{ А}$; $I_X = \frac{240}{8} = 30 \text{ А}$.

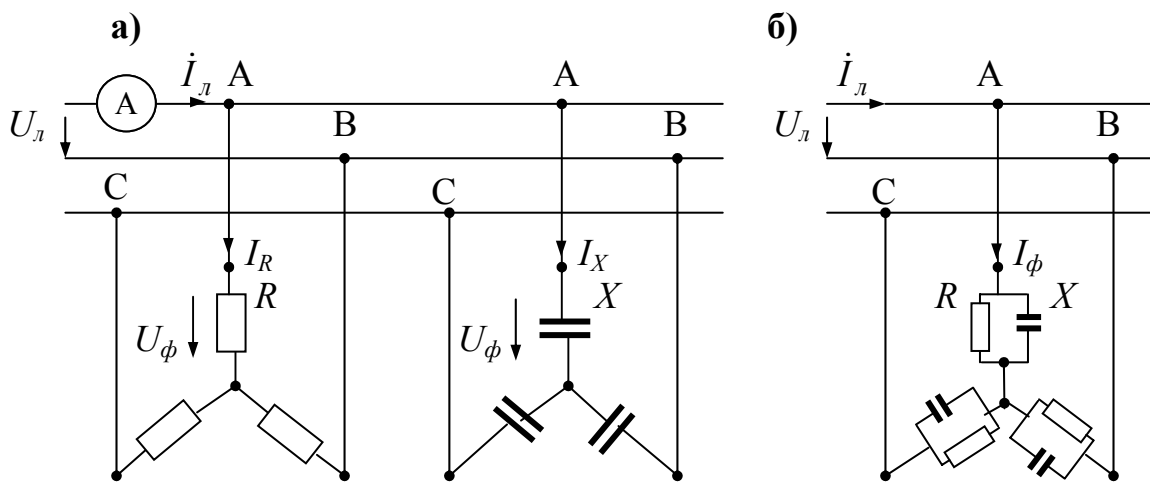


Рис.7.10

4. Действующее значение общего тока в каждой фазе трехфазного приемника в соответствии с формулой (3.26) составляет: $I_\phi = \sqrt{I_R^2 + I_X^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ А}$. Это значение тока и является показанием амперметра, включенного в любой линейный провод, так как при соединении приемника звездой $I_\phi = I_\lambda$.

Пример 7.5. Два симметричных трехфазных приемника, соединенные треугольником, включены в трехфазную цепь с действующим значением линейного напряжения $U_\lambda = 360 \text{ В}$ (рис.7.11,а). Сопротивление фаз этих приемников известны $R = 40 \text{ Ом}$, $X = 30 \text{ Ом}$. Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в один из линейных проводов цепи.

Решение. 1. Каждая из фаз обоих приемников (AB, BC и CA) находится под одинаковым линейным напряжением. Поэтому можно считать, что эти приемники включены между собой параллельно, и заменить их одним эквивалентным приемником, как это показано на рис.7.11,б. Действующее значение напряжения на каждой фазе этого приемника равно линейному напряжению цепи $U_\phi = U_\lambda = 360 \text{ В}$.

а)

б)

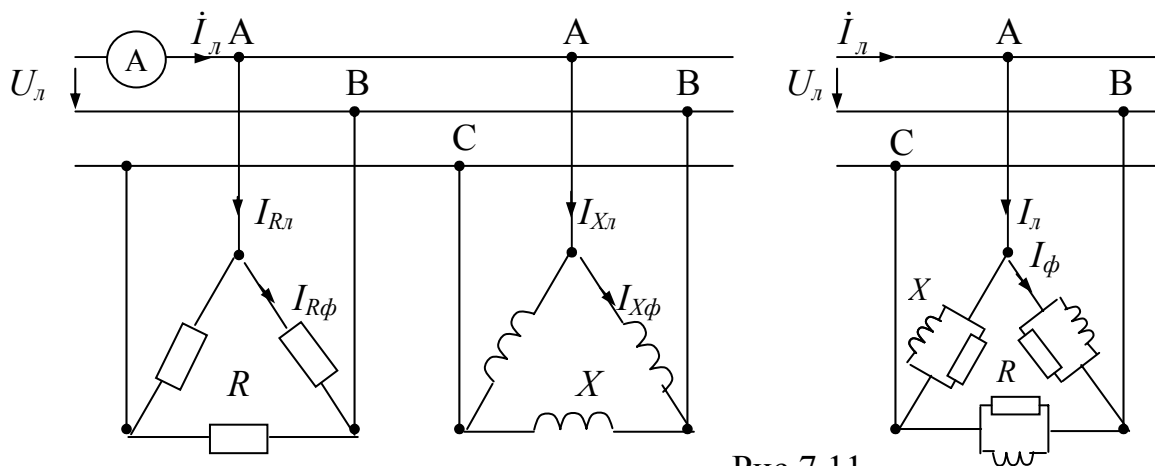


Рис.7.11

2. Проводимость каждой фазы такого приемника определяется в соответствии с формулой (3.28)

$$y = \sqrt{G^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0,025)^2 + (0,033)^2} = \sqrt{0,000625 + 0,001109} = \sqrt{0,001734} = 0,0416 \text{ Ом.}$$

3. Ток в каждой фазе эквивалентного приемника соответствует формуле (3.27) $I_\phi = U y = 360 \cdot 0,0416 = 15 \text{ А.}$

4. Действующее значение тока в линейном проводе симметричной трехфазной цепи, в соответствии с формулой (7.9) составляет $I_l = \sqrt{3} I_\phi = 1,73 \cdot 15 = 26 \text{ А,}$ что и является показанием амперметра, включенного в этот провод.

Пример 7.6. Два симметричных трехфазных реактивных приемника включены в трехфазную цепь с действующим значением линейного напряжения $U_l = 660 \text{ В}$ (рис.7.12,а). Индуктивный приемник соединен треугольником, а емкостной приемник – звездой. Сопротивление этих приемников известны: $X_{L\Delta} = 228 \text{ Ом,}$ $X_C = 76 \text{ Ом.}$ Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в один из линейных проводов цепи.

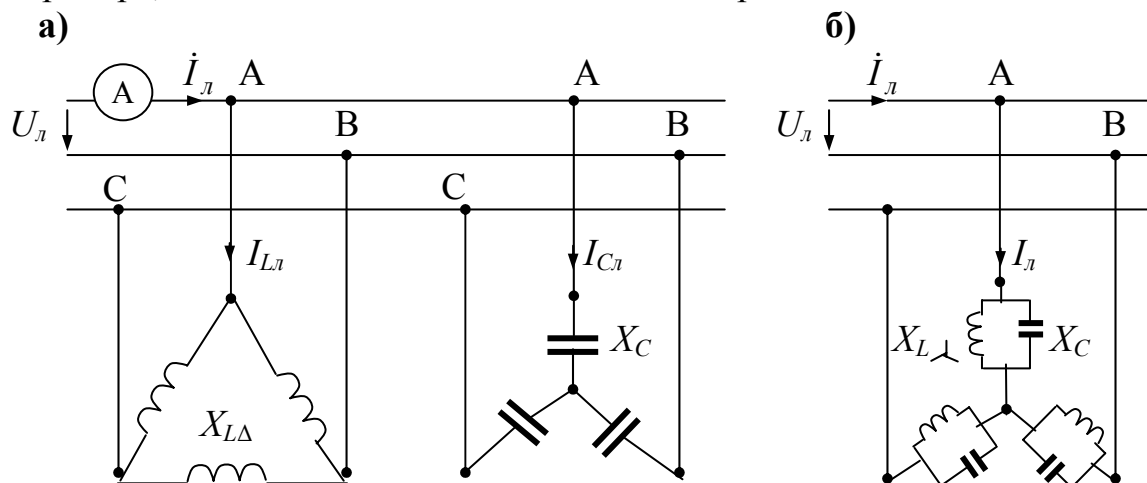


Рис.7.12

Решение. 1. Преобразуем (для удобства вычислений) индуктивный треугольник в эквивалентную звезду, воспользовавшись формулой (4.10 а), и получим

$$X_{L\Delta} = \frac{X_{L\Delta}}{3} = \frac{228}{3} = 76 \text{ Ом.}$$

2. Два симметричных трехфазных приемника, соединенные звездой, включены между собой параллельно, и их можно объединить в один эквивалентный трехфазный приемник, показанный на рис.7.12,б. Общая проводимость каждой фазы такого приемника в соответствии с формулой (3.28),

$$\text{равна нулю } y = \sqrt{\left(\frac{1}{X_{L\Delta}}\right)^2 - \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{76}\right)^2 - \left(\frac{1}{76}\right)^2} = 0.$$

Таким образом, в цепи имеет место резонанс токов (3.13) и ток в линейном проводе, в соответствии с формулой (3.27), равен нулю. Следовательно, показание амперметра в любом линейном проводе этой цепи равно нулю.

Пример 7.7. Три однофазных приемника с сопротивлениями $R = 55 \text{ Ом}$; $X_L = 44 \text{ Ом}$ и $X_C = 36,6 \text{ Ом}$ объединены в звезду и подключены к симметричному трехфазному генератору, также соединенному звездой с действующим значением фазной ЭДС $E_\phi = 220 \text{ В}$ (рис.7.13). Требуется определить показание электромагнитного амперметра, включенного в нейтральный провод цепи.

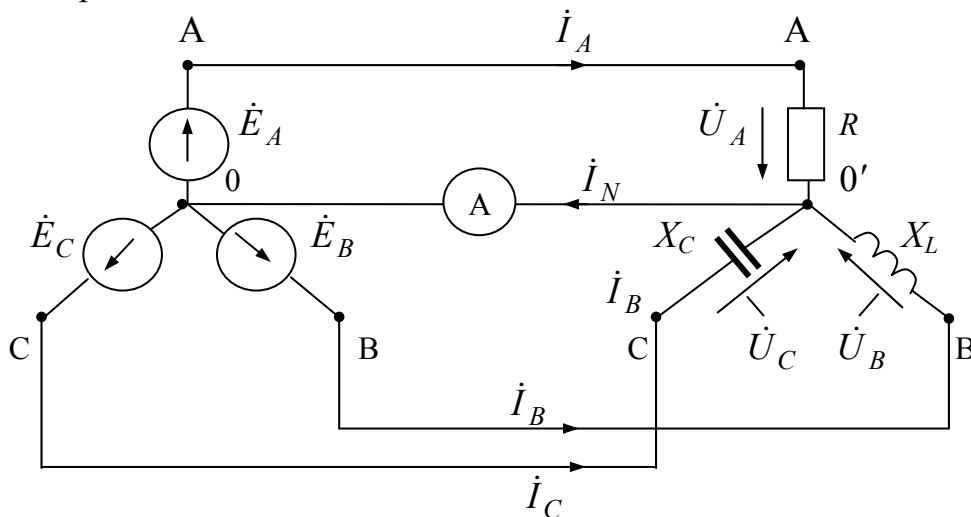


Рис.7.13

Решение. 1. Представленная на рис.7.13 трехфазная цепь работает в несимметричном режиме и требует расчета всех трех фаз. Для этого предварительно: а) выбираем направления токов и напряжений в соответствии с рис.7.2; б) совмещаем ЭДС фазы А с осью вещественных чисел комплексной плоскости и записываем систему фазных ЭДС генератора по аналогии с

формулами (7.1a): $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$; $\dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}$; $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}$; в) записываем сопротивления фаз приемника в комплексной форме (табл.4.2):

$$\underline{Z}_A = R = 55 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_B = 44e^{j90^\circ} = j44 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_C = 36,6e^{-j90^\circ} = -j36,6 \text{ Ом}.$$

2. В данной цепи линейные провода и нейтральный провод не обладают сопротивлением и поэтому, в соответствии со 2-м законом Кирхгофа, имеем

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

3. Определяем токи во всех трех фазах приемника, используя закон Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{55} = 4 \text{ А}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{j240^\circ}}{44e^{j90^\circ}} = 5e^{+j150^\circ} = (-4,3 + j2,5) \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{j120^\circ}}{36,6e^{-j90^\circ}} = 6e^{+j210^\circ} = (-5,2 - j3) \text{ А}.$$

4. Определяем комплексный ток в нейтральном проводе, воспользовавшись формулой (7.2):

$$\begin{aligned} \dot{I}_N &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 4 + (-4,3 + j2,5) + (-5,2 - j3) = \\ &= (-5,5 - j0,5) = 5,52e^{j\left(180^\circ + \arctg \frac{0,5}{5,5}\right)} = 5,52e^{+j185^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Заметим, что для перевода комплексного тока из алгебраической в показательную форму записи использован рис.4.4 и прилагаемая к нему формула для третьего квадранта комплексной плоскости.

Модуль тока в нейтральном проводе $I_N = 5,52 \text{ А}$ соответствует искомому показанию амперметра.

Пример 7.8. В условиях примера 7.7 определить показания электромагнитных амперметров A_1 , A_2 и A_3 и вольтметра, включенных в линейные провода, как это показано на рис.7.14 при обрыве (отсутствии) в цепи нейтрального провода.

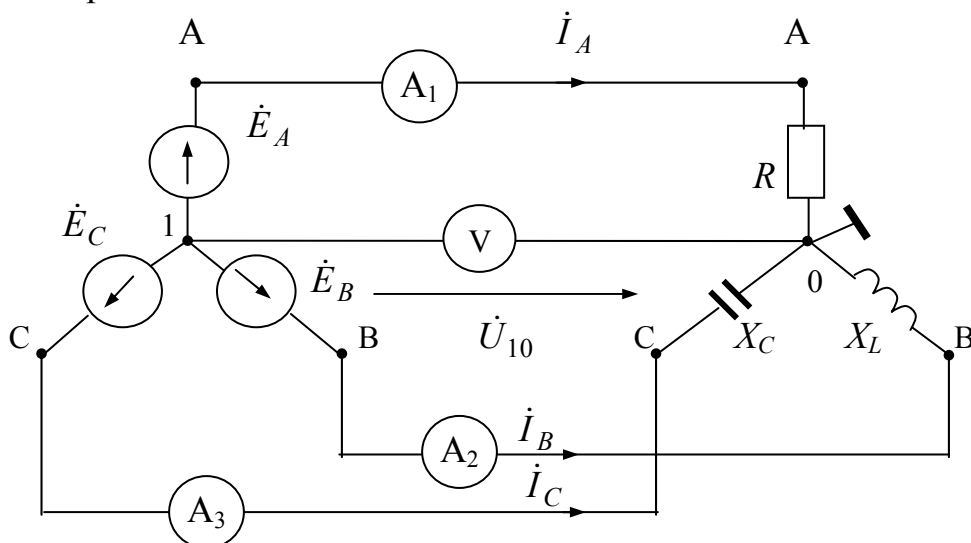


Рис.7.14

Исходные данные: $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$; $\dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}$;
 $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}$; $\underline{Z}_A = 55 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_B = j44 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_C = -j36,6 \text{ Ом}$.

Решение. 1. Применяем метод узловых напряжений (п.5.4), в соответствии с которым промежуточной неизвестной величиной является узловое напряжение $\dot{U}_{10}$. Приняв нейтраль генератора за узел (1), а нейтраль приемника за опорный узел (0) и направив $\dot{U}_{10}$ от узла 1 к узлу 0, в соответствии с формулой (5.9а) получаем $\dot{U}_{10} = \dot{J}_{11} / \underline{Y}_{11}$, где $\dot{J}_{11} = -(\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C)$ и $\underline{Y}_{11} = (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C)$.

2. Находим численные значения указанных выше величин

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{55} = 0,0182 \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{j44} = -j0,0227 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{-j36,6} = +j0,0273 \text{ См}; \quad \dot{E}_A \underline{Y}_A = 220 \cdot 0,0182 = 4 \text{ А};$$

$$\dot{E}_B \underline{Y}_B = 220e^{j240^\circ} \cdot 0,0227e^{-j90^\circ} = 5e^{j150^\circ} = (-4,3 + j2,5) \text{ А};$$

$$\dot{E}_C \underline{Y}_C = 220e^{j120^\circ} \cdot 0,0272e^{+j90^\circ} = 6e^{j210^\circ} = (-5,2 - j3) \text{ А};$$

$$\dot{J}_{11} = -[4 + (-4,3 + j2,5) + (-5,2 - j3)] = 5,5 + j0,5 = 5,52e^{j5,2^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{Y}_{11} = 0,0182 - j0,0227 + j0,0273 = 0,0182 + j0,0046 = 0,0188e^{j14,2^\circ} \text{ См}.$$

3. Находим узловое напряжение:

$$\dot{U}_{10} = \frac{\dot{J}_{11}}{\underline{Y}_{11}} = \frac{5,52e^{j5,2^\circ}}{0,0182e^{j14,2^\circ}} = 234e^{-j9^\circ} = (289 - j46) \text{ В}.$$

Модуль этого напряжения $U_{10} = 234 \text{ В}$ определяет показание вольтметра V.

4. Определяем токи в линейных проводах, используя формулу (5.8):

$$\dot{I}_A = \underline{Y}_A (\dot{E}_A + \dot{U}_{10}) = 0,0182[220 + (289 - j46)] = (9,3 - j0,8) = 9,3e^{-j5^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_B (\dot{E}_B + \dot{U}_{10}) = -j0,0227[(-110 - j190) + (289 - j46)] =$$

$$= (-5,4 - j4,1) = 6,7e^{-j217^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_C (\dot{E}_C + \dot{U}_{10}) = +j0,0273[(-110 + j190) + (289 - j46)] =$$

$$= (-3,9 + j4,9) = 6,3e^{j129^\circ} \text{ А}.$$

Заметим, что при нахождении начальных фаз искоемых токов использовался рис.4.4 и приложенные к нему формулы. Проверку правильности получения линейных токов цепи легко осуществить с помощью формулы (7.3 а), что и предлагаем читателю проделать самостоятельно.

5. Показания амперметров, включенных в линейные провода цепи, соответствуют модулям линейных токов и составляют $A_1 - 9,3 \text{ А}$; $A_2 - 6,7 \text{ А}$; $A_3 - 6,3 \text{ А}$.

Пример 7.9. В трехфазной симметричной цепи примера 7.1 произошел обрыв фазы А при отсутствии нулевого провода (на рис.7.2,а ключи К1, К2 и К3 разомкнуты). Требуется определить комплексные токи и напряжения всех трех фаз приемника и комплексное напряжение между нейтральными точками приемника и генератора. Построить векторную диаграмму токов и напряжений цепи на комплексной плоскости.

Решение. 1. Исходные данные для расчета: $E_\phi = 220$ В; $Z_\phi = R = 22$ Ом. Совмещая вектор ЭДС фазы А источника с осью вещественных чисел, получаем $\dot{E}_A = 220$ В; $\dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190)$ В; $\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190)$ В.

2. Линейные напряжения приемника остаются такими же, как и при симметричном режиме работы цепи (пример 7.1): $\dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} = (330 + j190)$ В; $\dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} = -j380$ В; $\dot{U}_{CA} = (-330 + j190)$ В. Однако фазные напряжения здесь изменяются, поскольку в цепи отсутствует нулевой провод, поддерживающий их равными фазными ЭДС генератора.

3. Определяем комплексное напряжение между нейтральными точками приемника и генератора, используя формулу (5.9 а) метода узловых напряжений и принимая нейтраль генератора (0) за опорный узел

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}.$$

В этой формуле $\underline{Y}_A = 0$ (фаза А оборвана); $\underline{Y}_B = \underline{Y}_C = 1/Z_\phi = 0,0455$ См; $\underline{Y}_N = 0$ (нет нейтрального провода). Таким образом

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{\dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{[(-110 - j190) \cdot 0,0455] + [(-110 + j190) \cdot 0,0455]}{0,0455 + 0,0455} = \\ &= \frac{(-5 - j8,64) + (-5 + j8,64)}{0,091} = \frac{-10}{0,091} = -110 \text{ В.} \end{aligned}$$

4. Определяем комплексные токи в линейных проводах (они же фазные токи приемника), используя формулу (5.8) метода узловых напряжений. С учетом принятых в данном примере направлений токов и напряжений имеем

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \underline{Y}_A (\dot{E}_A - \dot{U}_N) = 0, \text{ так как } \underline{Y}_A = 0; \\ \dot{I}_B &= \underline{Y}_B (\dot{E}_B - \dot{U}_N) = 0,045[(-110 - j190) - (-110)] = \\ &= 0,0455(-j190) = -j8,64 = 8,64e^{-j90^\circ} \text{ А;} \\ \dot{I}_C &= \underline{Y}_C (\dot{E}_C - \dot{U}_N) = 0,045[(-110 + j190) - (-110)] = \\ &= 0,0455(+j190) = +j8,64 = 8,64e^{+j90^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Из этих расчетов следует, что $\dot{I}_C$ и $\dot{I}_B$ это фактически один и тот же ток в контуре 0ВВ0'СС0 (фаза А разорвана), направление которого на рис.7.2 принято в соответствии с направлением $\dot{U}_{BC}$, т.е. в направлении $\dot{I}_B$. Поэтому ток $\dot{I}_C$ имеет

знак противоположный $\dot{I}_B$. Действующее значение этого тока $I_B = I_C = 8,64$ А.

Проверку правильности вычислений линейных токов предлагаем читателю осуществить самостоятельно, воспользовавшись формулой (7.3 а).

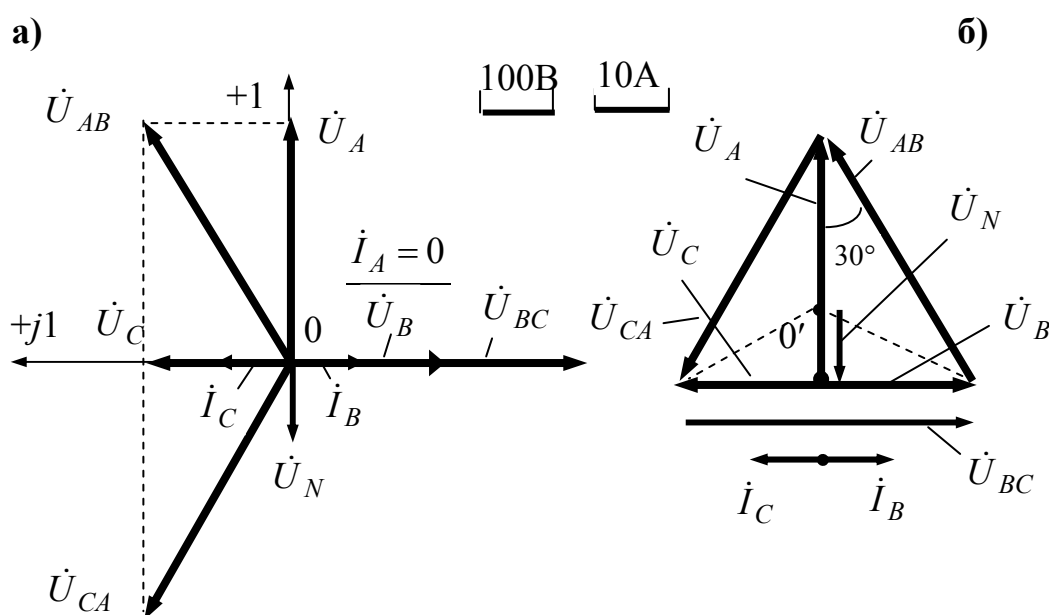
5. Определяем комплексные фазные напряжения $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ приемника, воспользовавшись формулой закона Ома

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B = -j8,64 \cdot 22 = -j190 \text{ В}; \quad \dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C = -j8,64 \cdot 22 = +j190 \text{ В}.$$

Отсюда следует, что $\dot{U}_C = -\dot{U}_B$ и истинное направление напряжения $\dot{U}_C$ на схеме рис.7.2,а противоположно принятому. Действующие значения этих напряжений равны между собой и каждое из них равно половине действующего значения напряжения U_{BC} . Этот результат находится в полном соответствии с конфигурацией электрической схемы при обрыве фазы А и отсутствии линейного провода. В самом деле, ток в образовавшейся после разрыва фазы А цепи протекает через два одинаковых сопротивления $\underline{Z}_\phi = R = 22$ Ом, соединенных между собой последовательно и находящихся под воздействием линейного напряжения $U_{BC} = 380$ В. На каждое из них приходится половина этого напряжения ($U_B = U_C = 190$ В), а действующее значение тока составляет $I_B = I_C = 380 / 44 = 8,64$ А.

6. Определяем комплексное напряжение $\dot{U}_A$ на оборванной фазе А. Непосредственно из закона Ома это напряжение найти невозможно, так как $\dot{I}_A = 0$ и $\underline{Z}_A = \infty$. Его определяем из рассмотрения контура 0AA0'A цепи, для которого в соответствии со вторым законом Кирхгофа имеем: $\dot{E}_A = \dot{U}_A + \dot{U}_A + \dot{U}_N$ или $\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N = 220 - (-110) = +330$ В.

7. Векторная диаграмма исследуемой цепи представлена на рис.7.15 в двух вариантах.



В первом варианте (рис.7.15,а) все векторы исходят из начала координат комплексной плоскости (точка 0). Во втором варианте (рис.7.15,б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они опирались на концы векторов фазных напряжений. Такое их расположение позволяет определять действующие значения токов и напряжений, используя только геометрию равностороннего треугольника.

Очевидно, что здесь нейтральная точка 0' симметричного режима опустилась на середину вектора $\dot{U}_{BC}$ и поэтому действующие значения напряжений фаз В и С стали равными половине действующего значения линейного напряжения: $U_B = U_C = U_{\text{л}} / 2 = 380 / 2 = 190$ В (на схеме цепи два одинаковых сопротивления $R = 22$ Ом соединены последовательно и находятся под воздействием линейного напряжения $\dot{U}_{\text{л}} = 380$ В). Действующее значение напряжения $\dot{U}_A$ на разорванной фазе А определяет высота равностороннего треугольника, величина которой $\dot{U}_A = \dot{U}_{AB} \cos 30^\circ = 380 \cdot 0,86 = 330$ В.

Действующее значение напряжения на нейтральном проводе U_N определяется на диаграмме рис.7.15,б расстоянием между точками 0' при симметричном и исследуемым режимами работы: $U_N = 220 \cdot \cos 60^\circ = 110$ В. Заметим, что при определении U_A и U_N можно использовать также известный из курса математики факт, что центр равностороннего треугольника делит его высоту в отношении 2 : 1. Действующие значения токов в фазах В и С $I_B = I_C = U_{\text{л}} / 2R = 380 / 44 = 8,64$ А.

Пример 7.10. В трехфазной цепи примера 7.1 произошло короткое замыкание фазы А при отсутствии нейтрального провода (на рис.7.2,а ключ К1 замкнут, а ключ К3 разомкнут; ключ К2 может находиться в любом положении). Требуется определить комплексные токи и напряжения всех трех фаз приемника, а также напряжение между нейтральной точкой приемника и генератора; построить векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости.

Решение. 1. Исходные данные для расчета: $\dot{E}_\phi = 220$ В; $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi = R = 22$ Ом. Совместим ЭДС фазы А с осью вещественных чисел и получим $\dot{E}_A = 220$ В; $\dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190)$ В; $\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190)$ В.

2. Линейные напряжения приемника остаются такими же, как и при симметричном режиме работы $\dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} = (330 + j190)$ В; $\dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} = -j380$ В; $\dot{U}_{CA} = 380e^{+j150^\circ} = (-330 + j190)$ В. Однако фазные напряжения приемника претерпевают изменения.

3. Определяем комплексное напряжение $\dot{U}_N$ между нейтральными точками приемника и генератора. Формула (5.9,а) метода узловых напряжений здесь не годится, так как при коротком замыкании фазы А $\underline{Y}_A = \infty$ и она приводит к

неопределенности вида ∞ / ∞ . Поэтому комплексное напряжение $\dot{U}_N$ находим, рассмотрев контур $0AA'0'$ и составив для него уравнение по второму закону Кирхгофа: $\dot{E}_A = \dot{U}_A + \dot{U}_N$. При коротком замыкании фазы А, $\dot{U}_A = 0$, и получаем, что $\dot{U}_N = \dot{E}_A = 220$ В.

4. Определяем комплексные токи в фазах В и С приемника, используя формулу (5.8) метода узловых напряжений:

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_B (\dot{E}_B - \dot{U}_N) = 0,045[(-110 - j190) - 220] = (-15 - j8,6) = 17,3e^{-j150^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_C (\dot{E}_C - \dot{U}_N) = 0,045[(+110 + j190) - 220] = (-15 + j8,6) = 17,3e^{+j150^\circ} \text{ А}.$$

5. Определяем комплексный ток в линейном проводе А, используя формулу (7.3,а), согласно которой $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Тогда $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = -[-15 - j8,6) + (-15 + j8,6)] = -(-30) = +30$ А.

6. Определяем комплексные напряжения на фазах В и С приемника (напряжение $\dot{U}_A = 0$), используя формулу закона Ома:

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B = [(-15 - j8,6) \cdot 22] = (-330 - j190) = 380e^{-j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_B = -\dot{U}_{AB};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C = [(-15 + j8,6) \cdot 22] = (-330 + j190) = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{CA}.$$

7. Векторная диаграмма токов и напряжений при коротком замыкании фазы А показана на рис.7.16 в двух вариантах.

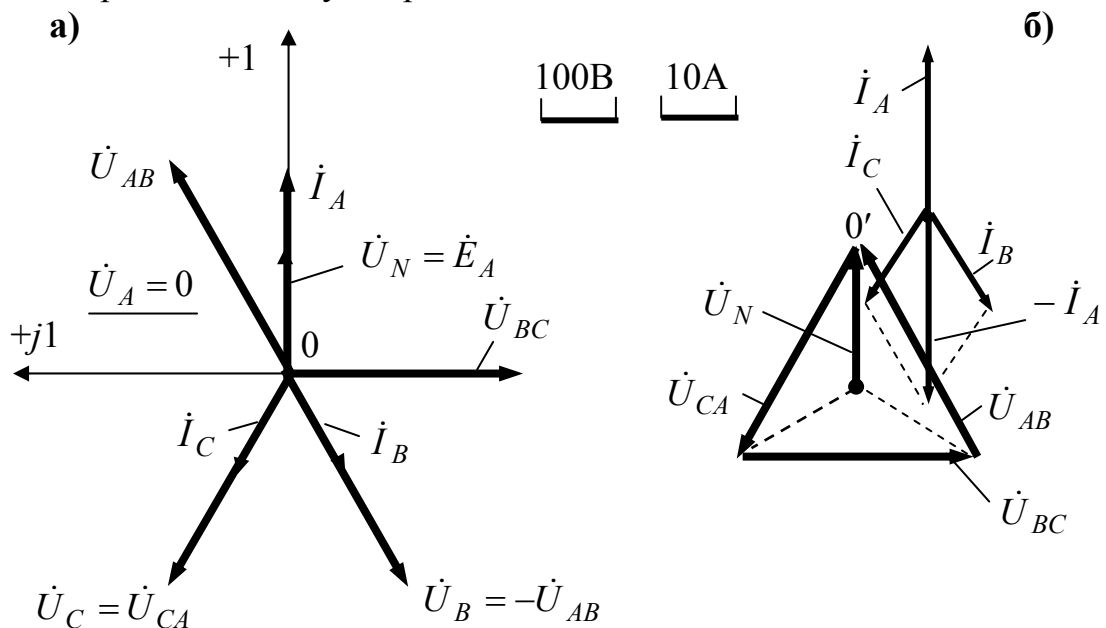


Рис.7.16

В первом варианте (рис.7.16,а) все векторы расположены в начале координат комплексной плоскости (точка 0). Во втором варианте (рис.7.16,б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они расположились между концами соответствующих фазных векторов. Такое их расположение позволяет определять действующие значения всех фазных токов и напряжений цепи, не производя ее полного расчета.

Очевидно, что точка O' диаграммы, находящаяся при симметричном режиме работы в центре равностороннего треугольника, перемещается при коротком замыкании фазы А ($\dot{U}_A = 0$) вверх и совпадает с его вершиной. При этом действующие значения напряжений на фазах В и С становятся равными линейным напряжениям и составляют $U_B = U_C = 380$ В, т.е. увеличиваются по сравнению с симметричным режимом работы данной цепи в $\sqrt{3}$ раз. Токи в фазах В и С совпадают по фазе со своими фазными напряжениями, и их действующие значения составляют $I_B = I_C = 17,3$ А, т.е. возрастают по сравнению с симметричным режимом работы также в $\sqrt{3}$ раз. Ток в закороченной фазе А $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$. Его действующее значение, как это непосредственно следует из геометрических построений, составляет 30 А и увеличивается по сравнению с симметричным режимом работы в 3 раза.

Пример 7.11. Трехфазная цепь (рис.7.8) состоит из генератора (соединен звездой), вырабатывающего симметричную систему фазных ЭДС с действующим значением $E_\phi = 220$ В, и симметричного приемника, фазы которого обладают активным сопротивлением $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = R = 38$ Ом и соединены треугольником. Требуется произвести полный аналитический расчет цепи в трех режимах: а) симметричном, б) при обрыве фазы АВ, в) при обрыве линейного провода А.

Решение. а) Расчет цепи при симметричном режиме работы.

На рис.7.8 ключи К1 и К2 замкнуты, $\dot{U}_{AA'} = 0$, фазные напряжения приемника $\dot{U}_{A'B} = \dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{CA'} = \dot{U}_{CA}$.

1. Определяем комплексные ЭДС всех фаз генератора, совместив ЭДС фазы А с осью вещественных чисел комплексной плоскости:

$$\dot{E}_A = 220 \text{ В}; \quad \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.$$

2. Определяем комплексные напряжения на всех трех фазах приемника. При выбранных на схеме (рис.7.8) направлениях действия ЭДС и напряжений в соответствии со вторым законом Кирхгофа имеем

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = [(220 - (-110 - j190))] = (330 + j190) = 380e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = [(-110 - j190) - (-110 + j190)] = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = [(-110 + j190) - 220] = (-330 + j190) = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}.$$

Заметим, что действующие значения всех трех напряжений равны между собой $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 380$ В, а сумма векторов этих напряжений в соответствии с формулой (7.6) равна нулю.

3. Определяем комплексные токи всех трех фаз приемника, используя формулу закона Ома:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{A'B} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380e^{j30^\circ}}{38} = 10e^{+j30^\circ} = (8,7 + j5) \text{ A}; \\ \dot{I}_{BC} &= \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{38} = 10e^{-j90^\circ} = -j10 \text{ A}; \\ \dot{I}_{CA'} &= \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{38} = 10e^{j150^\circ} = (-8,7 + j5) \text{ A}.\end{aligned}$$

Заметим, что действующие значения всех трех фазных токов одинаковы: $I_{A'B} = I_{BC} = I_{CA'} = I_\phi = 10 \text{ A}$.

4. Определяем комплексные токи в линейных проводах, используя (7.8):

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{A'B} - \dot{I}_{CA'} = (8,7 + j5) - (-8,7 + j5) = 17,3 \text{ A}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{A'B} = -j10 - (8,7 + j5) = (-8,7 - j15) = 17,3e^{-j120^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA'} - \dot{I}_{BC} = (-8,7 + j5) - (-j10) = (-8,7 + j15) = 17,3e^{+j120^\circ} \text{ A}.\end{aligned}$$

Заметим, что в соответствии с формулой (7.7) сумма линейных комплексных токов равна нулю, а их действующие значения одинаковы и в $\sqrt{3}$ раз больше действующих значений фазных токов, что соответствует формуле (7.9).

5. Векторная диаграмма токов и напряжений приемника при симметричном режиме работы представлена на рис.7.17 в двух вариантах.

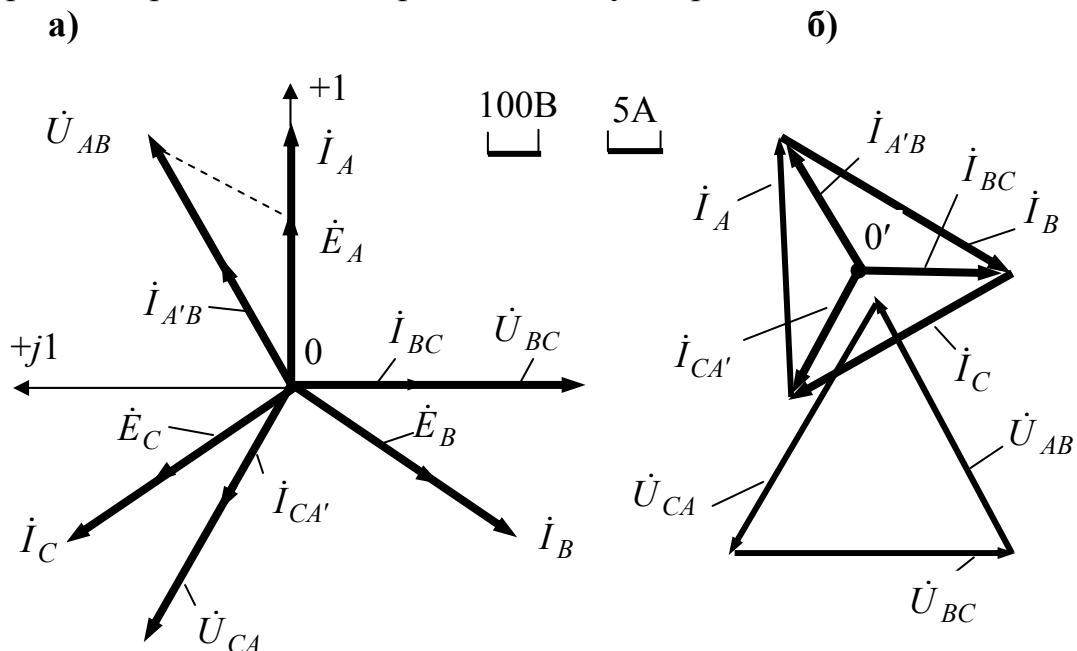


Рис.7.17

В первом варианте (рис.7.17,а) все векторы исходят из точки "0" начала координат комплексной плоскости. Во втором варианте (рис.7.17,б) векторы

линейных токов перенесены параллельно самим себе так, что они располагаются между концами векторов фазных токов в соответствии с формулами (7.8) и наглядно демонстрируют соотношение $I_L / I_\phi = \sqrt{3}$. Из векторной диаграммы следует также, что при симметричном режиме работы достаточно рассчитать токи и напряжения только одной фазы, например фазы АВ, токи и напряжения двух других фаз будут равны по величине токам и напряжениям фазы АВ, но сдвинуты относительно них по фазе на $\pm 120^\circ$.

б) Расчет цепи при обрыве фазы А'В.

На рис.7.8 ключ К1 разомкнут, а ключ К2 замкнут. При этом $\dot{U}_{AA'} = 0$ и фазные напряжения приемника равны линейным напряжениям генератора.

1. При данном режиме работы на фазы приемника подается такая же система линейных напряжений генератора, что и при симметричном режиме:

$$\dot{U}_{A'B} = \dot{U}_{AB} = 380e^{+j30^\circ} = (330 + j190) \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} = -j380 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA'} = \dot{U}_{CA} = 380e^{+j150^\circ} = (-330 + j190) \text{ В}.$$

2. Определяем комплексные токи в фазах приемника, используя формулу закона Ома:

$$\dot{I}_{A'B} = 0 \text{ (фаза А'В оборвана);} \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{-j380}{38} = -j10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA'} = \frac{\dot{U}_{CA'}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{+j150^\circ}}{38} = 10e^{j150^\circ} = (-8,7 + j5) \text{ А}.$$

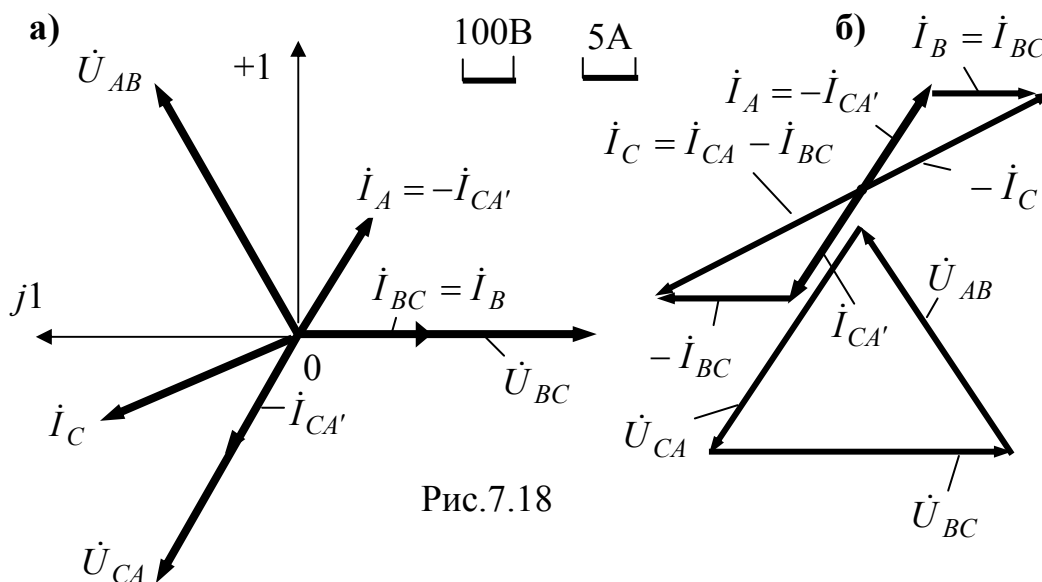


Рис.7.18

3. Определяем комплексные токи в линейных проводах, используя формулы (7.8)*:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A'B} - \dot{I}_{CA'} = (8,7 - j5) = 10e^{-j30^\circ} \text{ А}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{A'B} = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA'} - \dot{I}_{BC} = [(-8,7 + j5) - (-j10)] = (-8,7 + j15) = 17,3e^{+j120^\circ} \text{ А}.$$

* При переходе от алгебраической к показательной форме записи этих токов используем рис.4.4 и прилагаемые к нему формулы.

Проверку этих расчетов производим с помощью формулы (7.7), согласно которой $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Предоставляем читателю возможность убедиться в этом самостоятельно.

4. Векторная диаграмма трехфазного приемника при исследуемом режиме работы показана на рис.7.18 в двух вариантах. В первом варианте (рис.7.18,а) начала всех векторов находятся в точке "0" комплексной плоскости. Во втором варианте (рис.7.18,б) векторы фазных и линейных токов перенесены параллельно самим себе, так чтобы наглядно продемонстрировать соотношение между ними в соответствии с формулами (7.7) и (7.8). Заметим, что векторная диаграмма на рис.7.18,б позволяет находить действующие значения фазных и линейных токов, не применяя символического метода. Непосредственно из рис.7.8 и векторной диаграммы следует, что $I_{A'B} = 0$, $I_{BC} = I_{CA'} = 10 \text{ A}$, $I_A = I_B = 10 \text{ A}$, $I_C = 10\sqrt{3} = 17,3 \text{ A}$.

в) Расчет цепи при обрыве линейного провода А.

На рис.7.8 ключ К1 замкнут, а ключ К2 разомкнут; напряжение на разрыве $\dot{U}_{AA'} \neq 0$, $\dot{U}_{A'B}$ отлично от $\dot{U}_{AB}$ и $\dot{U}_{CA'}$ отлично от $\dot{U}_{CA}$.

1. Линейные напряжения генератора $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ при обрыве линейного провода А остаются такими же, как и при симметричном режиме работы: $\dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} = (330 + j190) \text{ В}$; $\dot{U}_{BC} = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В}$; $\dot{U}_{CA} = (-330 + j190) = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}$. Однако напряжения на фазах приемника изменяются.

2. Определяем фазные напряжения приемника. Напряжение $\dot{U}_{BC} = -j380 \text{ В}$ остается неизменным, а напряжения на сопротивлениях $\underline{Z}_{AB}$ и $\underline{Z}_{CA}$ изменяются по сравнению с симметричным режимом. При обрыве линейного провода А эти сопротивления оказываются соединенными между собой последовательно. Напряжения на них одинаковы ($\dot{U}_{CA'} = \dot{U}_{A'B}$), так как $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{CA}$. Они отличаются от напряжений $\dot{U}_{AB}$ и $\dot{U}_{CA}$ генератора, поскольку $\dot{U}_{AA'} \neq 0$. При этом, как следует из второго закона Кирхгофа, $\dot{U}_{CA'} + \dot{U}_{A'B} = -\dot{U}_{BC}$. Отсюда $2\dot{U}_{CA'} = -\dot{U}_{BC} = j380 \text{ В}$. Таким образом, $\dot{U}_{CA'} = \dot{U}_{A'B} = j190 \text{ В}$.

3. Определяем фазные токи приемника. Ток в фазе ВС остается таким же как и при симметричном режиме:

$$\dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / \underline{Z}_{BC} = -j380 / 38 = -j10 \text{ A}.$$

Токи в последовательно соединенных сопротивлениях фаз АВ и ВС

$$\dot{I}_{A'B} = \dot{I}_{CA'} = \frac{\dot{U}_{A'B}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{j190}{38} = j5 \text{ A}. \text{ Их действующие значения } I_{A'B} = I_{CA'} = 5 \text{ A}.$$

4. Определяем токи в линейных проводах

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A'B} - \dot{I}_{CA'} = [(+j5) - (-j5)] = 0 \text{ A}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{A'B} = [(-j10) - (+j5)] = -j15 \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA'} - \dot{I}_{BC} = [(+j5) - (-j10)] = +j15 \text{ A}.$$

Проверку расчетов осуществляем с помощью формулы (7.7), в соответствии с которой $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

5. Определяем напряжения на разрыве линейного провода А. Для этого составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура АА'ССА, образованного линейным проводом А, фазным напряжением $\dot{U}_{CA'}$ и линейным напряжением генератора $\dot{U}_{CA}$: $\dot{U}_{CA} + \dot{U}_{AA'} - \dot{U}_{CA'} = 0$. Отсюда имеем, что $\dot{U}_{AA'} = \dot{U}_{CA'} - \dot{U}_{CA} = [(+j190) - (-330 + j190)] = 330 \text{ В}$.

6. Векторная диаграмма токов и напряжений приемника при обрыве линейного провода А показана на рис.7.19 в двух вариантах.

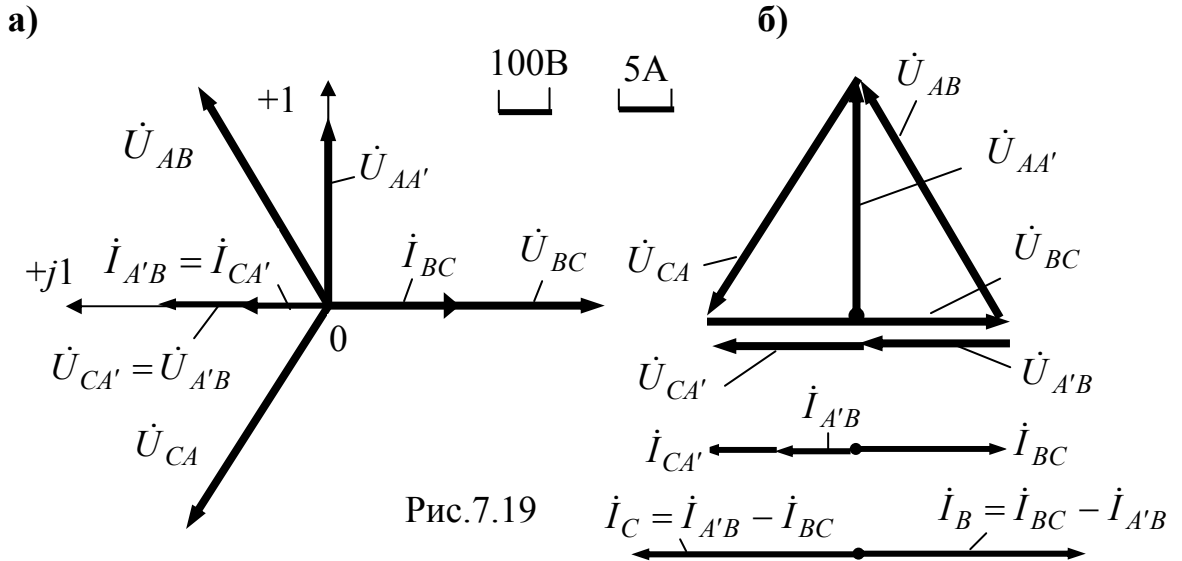


Рис.7.19

В первом варианте (рис.7.19,а) все векторы исходят из точки "0" комплексной плоскости. Во втором варианте (рис.7.19,б) векторы токов и напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы наглядно пояснить соотношения (7.6), (7.7) и (7.8). Заметим, что векторная диаграмма на рис.7.19,б позволяет находить действующие значения токов и напряжений цепи, не применяя символического метода.

7.5. Мощность трехфазной цепи

Комплексная мощность трехфазной цепи равна сумме комплексных мощностей всех трех ее фаз:

$$\tilde{S}_{3\phi} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C, \quad (7.10)$$

где $\tilde{S}_A$, $\tilde{S}_B$ и $\tilde{S}_C$ соответствуют формуле (4.4): $\tilde{S}_A = \dot{U}_A^* \dot{I}_A = S_A e^{j\varphi_A} = P_A + jQ_A$;

$\tilde{S}_B = \dot{U}_B^* \dot{I}_B = S_B e^{j\varphi_B} = P_B + jQ_B$; $\tilde{S}_C = \dot{U}_C^* \dot{I}_C = S_C e^{j\varphi_C} = P_C + jQ_C$.

Здесь $\dot{I}_A^*$, $\dot{I}_B^*$ и $\dot{I}_C^*$ — комплексные токи, сопряженные соответствующим комплексным токам фаз $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$. С учетом формулы (7.10) для комплексной мощности трехфазной цепи получаем

$$\tilde{S}_{3\phi} = \sum P_{\phi} + j \sum Q_{\phi}, \text{ где } \sum P_{\phi} = P_A + P_B + P_C \text{ и } \sum Q_{\phi} = Q_A + Q_B + Q_C. \quad (7.11)$$

В частном случае, при симметричном режиме работы трехфазной цепи, имеем $P_{3\phi} = 3P_{\phi}$; $Q_{3\phi} = 3Q_{\phi}$; $S_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{P_{\phi}^2 + Q_{\phi}^2}$. С учетом формул (7.5) и (7.9) получаем для соединения приемников, как звездой, так и треугольником:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi; \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad S_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} = \sqrt{(P_{3\phi})^2 + (Q_{3\phi})^2}. \quad (7.12)$$

Пример 7.12. В условиях примера 7.4 определить активную, реактивную и полную мощность двух параллельно соединенных симметричных приемников. Исходные данные для эквивалентного трехфазного приемника: $U_{\phi} = 240 \text{ В}$; $R = 6 \text{ Ом}$; $X = 8 \text{ Ом}$; $I_{\phi} = 50 \text{ А}$.

Решение. 1. При решении задачи применим формулы (7.11). Предварительно определим угол сдвига фаз между напряжением и током в каждой фазе приемника, воспользовавшись формулой (3.30): $\varphi = \arctg b/G = \arctg 6/8 = 37^\circ$.

2. Активная мощность приемника

$$P_{3\phi} = 3P_{\phi} = 3 \cdot (240 \cdot 50 \cdot \cos 37^\circ) = 36000 \cdot 0,8 = 28800 \text{ Вт}.$$

3. Реактивная мощность приемника

$$Q_{3\phi} = 3Q_{\phi} = 3 \cdot (240 \cdot 50 \cdot \sin 37^\circ) = 36000 \cdot 0,6 = 21600 \text{ вар}.$$

4. Полная мощность приемника

$$S_{3\phi} = 3S_{\phi} = 3 \cdot (240 \cdot 50) = 36000 \text{ ВА}.$$

5. Проверка расчетов: $S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2} = \sqrt{28800^2 + 21600^2} = 36000 \text{ ВА}$.

Пример 7.13. В условиях примера 7.5 определить активную, реактивную и полную мощность эквивалентного трехфазного приемника. Исходные данные: $U_{\text{л}} = 360 \text{ В}$; $I_{\text{л}} = 26 \text{ А}$; $G = 0,025 \text{ См}$; $b = 0,033 \text{ См}$.

Решение. 1. При решении задачи воспользуемся формулами (7.12). Предварительно найдем угол сдвига фаз φ между напряжением и током фазы: $\varphi = \arctg b/G = \arctg 0,033/0,025 = 53^\circ$.

2. Активная мощность цепи

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 \cdot \cos 53^\circ = 9716 \text{ Вт} = 9,716 \text{ кВт}.$$

3. Реактивная мощность приемника

$$Q_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 \cdot \sin 53^\circ = 12954 \text{ вар} = 12,954 \text{ квар}.$$

4. Полная мощность приемника $S_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 = 16193 \text{ ВА} = 16,193 \text{ кВА}$.

5. Проверка расчетов по формуле $S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2}$ показывает, что задача решена правильно. Предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.

Пример 7.14. В условиях примера 7.8 определить активную, реактивную и полную мощности трехфазного несимметричного приемника. Исходные данные для расчета: $\underline{Z}_A = R = 55 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_B = jX_L = j44 = 44e^{j90^\circ} \text{ Ом}$; $\underline{Z}_C = -jX_C = -j36,6 = 36,6e^{-j90^\circ} \text{ Ом}$; $\dot{I}_A = 9,3e^{-j5^\circ} \text{ А}$; $\dot{I}_B = 6,7e^{+j217^\circ} \text{ А}$; $\dot{I}_C = 6,3e^{+j129^\circ} \text{ А}$.

Решение. 1. Находим фазные напряжения приемника, используя формулу закона Ома (4.2):

$$\dot{U}_A = \dot{I}_A \underline{Z}_A = 9,3e^{-j5^\circ} \cdot 55 = 511e^{-j5^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B = 6,7e^{j217^\circ} \cdot 44e^{j90^\circ} = 295e^{j307^\circ} = 295e^{-j53^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C = 6,3e^{j129^\circ} \cdot 36,6e^{-j90^\circ} = 231e^{j39^\circ} \text{ В}.$$

2. Определяем комплексную мощность каждой фазы приемника, воспользовавшись формулой (4.4): $\tilde{S}_A = \dot{U}_A \dot{I}_A^* = 511e^{-j5^\circ} \cdot 9,3e^{+j5^\circ} = 7450 \text{ ВА}$;

$$\tilde{S}_B = \dot{U}_B \dot{I}_B^* = 295e^{j307^\circ} \cdot 6,7e^{-j217^\circ} = 1976e^{j90^\circ} = j1976 \text{ ВА};$$

$$\tilde{S}_C = \dot{U}_C \dot{I}_C^* = 230e^{j39^\circ} \cdot 6,3e^{-j129^\circ} = 1450e^{-j90^\circ} = -j1450 \text{ ВА}.$$

3. Определяем полную мощность трехфазного приемника, воспользовавшись формулой (7.10):

$$\tilde{S}_{3\phi} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C = 4750 + j1976 - j1450 = (4750 - j526) = 4781e^{-j6,3^\circ} \text{ ВА}.$$

Таким образом, активная мощность трехфазного приемника $P_{3\phi} = 4750 \text{ Вт}$; реактивная мощность трехфазного приемника $Q_{3\phi} = 526 \text{ вар}$ (имеет емкостной характер); полная мощность трехфазного приемника $S_{3\phi} = 4871 \text{ ВА}$.

4. Проверку расчетов осуществим здесь, составив энергетический баланс рассматриваемой трехфазной цепи. Для этого воспользуемся формулой (5.10), согласно которой сумма комплексных мощностей источников энергии равна сумме комплексных мощностей приемников энергии.

Используя исходные данные примера 7.8, имеем

$$\dot{E}_A = 220 \text{ В}; \dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}; \dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.$$

Затем определяем комплексные мощности всех трех фаз генератора:

$$\tilde{S}_{GA} = \dot{E}_A \dot{I}_A^* = 220 \cdot 9,3e^{+j5^\circ} = 2046e^{+j5^\circ} = (2038 + j178) \text{ ВА};$$

$$\tilde{S}_{GB} = \dot{E}_B \dot{I}_B^* = 220e^{j240^\circ} \cdot 6,7e^{-j217^\circ} = 1474e^{j23^\circ} = (1356 + j575) \text{ ВА};$$

$$\tilde{S}_{GC} = \dot{E}_C \dot{I}_C^* = 220e^{j120^\circ} \cdot 6,3e^{-j129^\circ} = 1386e^{-j9^\circ} = (1369 - j217) \text{ ВА}.$$

Из этих расчетов следует, что: а) сумма активных мощностей всех трех фаз генератора $\sum P_G = P_A + P_B + P_C = 2038 + 1356 + 1369 = 4763 \text{ ВА}$; б) сумма реактивных мощностей всех трех фаз генератора $\sum Q_G = Q_A + Q_B + Q_C = 178 + 575 - 217 = 536 \text{ вар}$.

Сравнивая между собой сумму активных мощностей всех трех фаз

генератора с ранее найденной активной мощностью приемника ($P_{3\phi} = 4750$ Вт), а сумму реактивных мощностей всех трех фаз генератора с ранее найденной реактивной мощностью приемника ($Q_{3\phi} = 526$ вар), убеждаемся, что они практически (с учетом точности расчетов на микрокалькуляторе) совпадают. Таким образом, энергетический баланс исследуемой цепи сошелся, и, следовательно, задача решена верно.

7.6. Понятие о вращающемся магнитном поле и о трехфазных двигателях

Важнейшим достоинством трехфазной цепи является возможность получения кругового вращающегося магнитного поля. На этой основе был создан простой по конструкции и надежный в эксплуатации трехфазный асинхронный двигатель.

Если три одинаковые обмотки расположить симметрично под углом 120° друг к другу (как это сделано, например, на статоре трехфазного генератора) и подсоединить их к трехфазной цепи звездой или треугольником, то в каждой из них, при протекании синусоидального тока, возникает синусоидально изменяющийся во времени магнитный поток, называемый *пульсирующим*. Совокупность пульсирующих магнитных потоков всех трех обмоток создает внутри пространства, ограниченного этими обмотками, *вращающийся магнитный поток*, который часто называют вращающимся магнитным полем. Это поле ведет себя так, как если бы там вращался с некоторой постоянной скоростью постоянный магнит. Такое поле называется *круговым* *.

На рис.7.20,а показан статор трехфазного электродвигателя (аналогичен статору генератора), три одинаковые обмотки которого соединены звездой и подключены к трехфазной цепи. Каждая из этих обмоток показана условно одним витком, а созданное ими вращающееся магнитное поле – отрезком одной силовой магнитной линии.

За один период синусоидального тока вращающееся магнитное поле совершает один полный оборот вокруг своей оси. Таким образом, при частоте тока $f = 50$ Гц за одну секунду поле совершает 50 оборотов, а за одну минуту 3000 оборотов, и поэтому скорость его вращения составляет $n_{\text{СТ}} = 3000$ об/мин.

Поясним это положение графически. Рассмотрим симметричную систему фазных токов в обмотках статора трехфазного двигателя (рис.7.21) и найдем направление результирующего магнитного поля, создаваемого этими токами внутри статора для семи последовательных моментов времени (через каждые $T/6$ сек.) в течение одного периода тока фазы А. Будем считать, что положительные токи (выше оси времени) направлены от начал а, b, с к их концам x, y, z, а отрицательные токи (ниже оси времени) направлены от концов обмоток к их началам. Направление тока в обмотке за плоскость чертежа (от ее начала к

* Доказательство этого положения имеется в [1–4].

концу) показываем знаком (+), а направление тока из-за плоскости чертежа (от конца обмотки к ее началу) – знаком (•) .

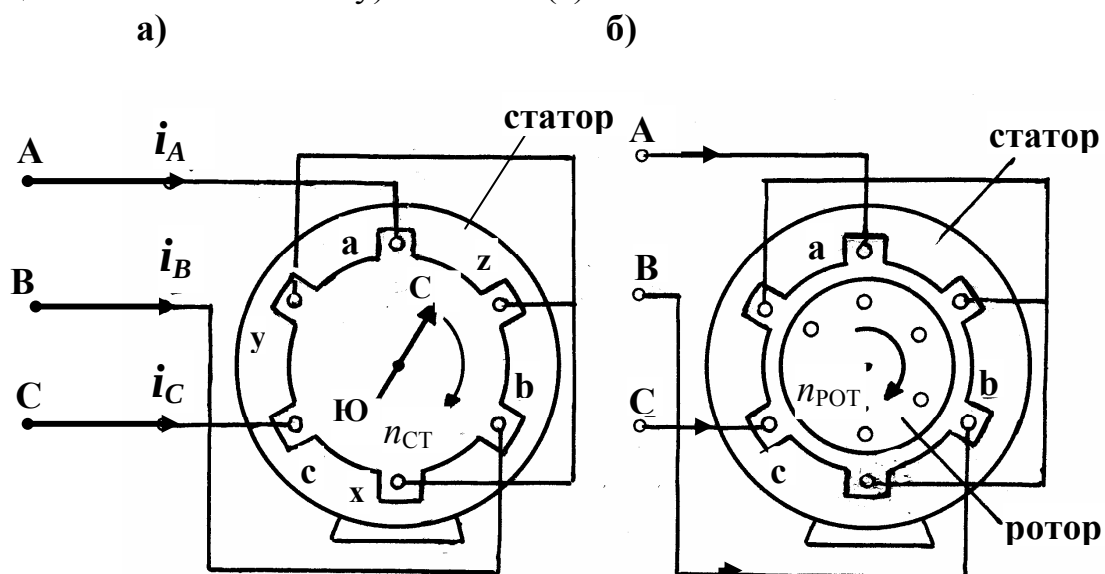


Рис.7.20

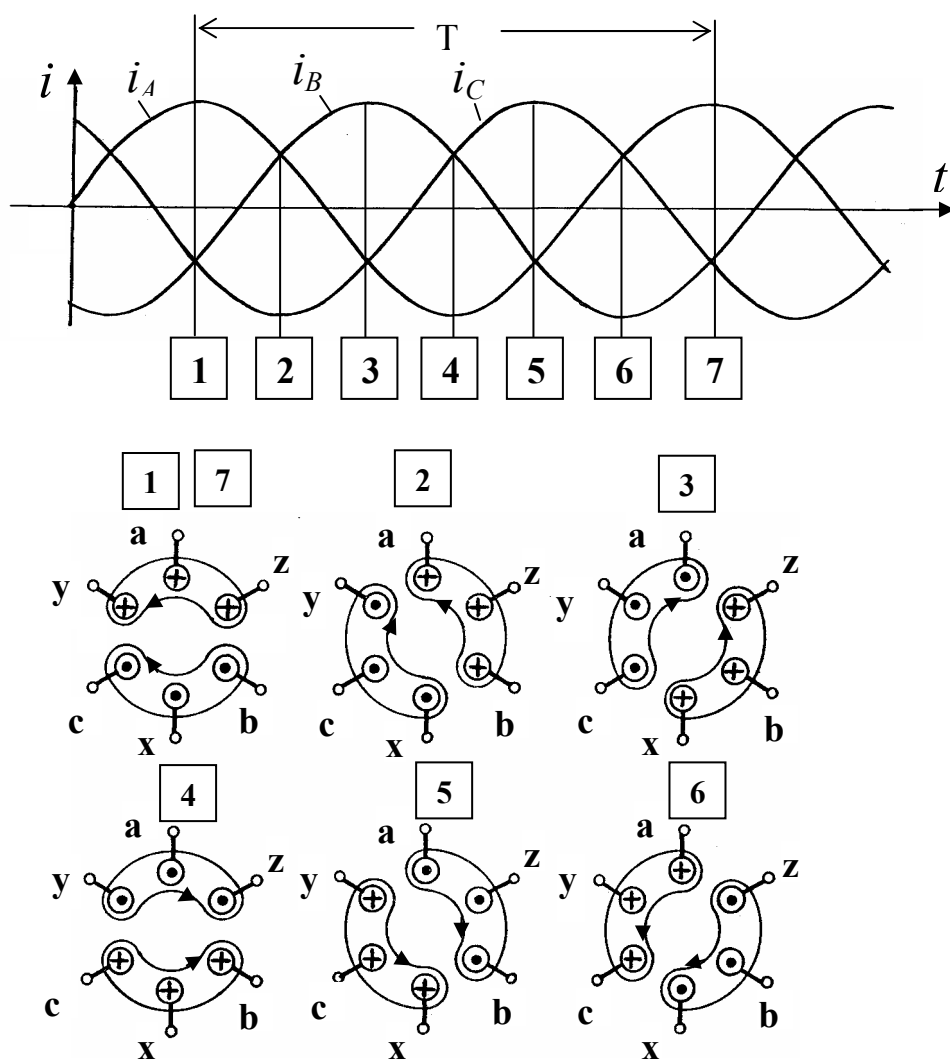


Рис.7.21

В результате простых графических построений с учетом известного из курса физики правила буравчика * находим, что результирующее магнитное поле внутри статора за один период тока поворачивается на один полный оборот, т.е. на 360° или 2π радиан.

Заметим, что вращение магнитного поля происходит здесь в направлении от начала обмотки (а) к началу обмотки (b) и далее к началу обмотки (с), т.е. по часовой стрелке. Для изменения направления его вращения следует поменять местами два любых линейных провода, подходящие к катушкам. Например, линейный провод В подсоединить к обмотке (с), а линейный провод С подсоединить к обмотке (b).

Возможность получать в трехфазных цепях вращающееся магнитное поле привела к созданию *асинхронных и синхронных* трехфазных двигателей. Путем деления каждой из обмоток на 2, 3, 4 секции и определенным образом располагая их в пазах статора, можно получить двигатель с частотой вращения магнитного поля статора 1500, 750, 600 об./мин.

Асинхронный двигатель состоит из двух основных частей – статора (неподвижная часть) и ротора (подвижная часть), выполненных в виде стальных соосных цилиндров **. Три фазовые обмотки статора и три фазовые обмотки ротора расположены в продольных пазах на их цилиндрических поверхностях. На рис.7.20,б каждая из них показана схематически (так же, как на рис.7.20,а и 7.21) одним витком. На самом же деле они состоят из многих витков и занимают по $1/3$ окружностей статора и ротора. Обмотки ротора подсоединяются с помощью трех контактных колец и щеток к трехфазному реостату для управления пуском. Это двигатели с так называемым фазным ротором (обычно изготавливаются большой мощности).

Более простым по устройству является асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором, у которого обмотка ротора представляет собой ряд алюминиевых стержней, равномерно распределенных по окружности ротора в закрытых пазах и соединенных между собой по торцам накоротко («беличья клетка»). При подключении асинхронного двигателя к трехфазной цепи в обмотке статора возникает вращающееся магнитное поле, силовые линии которого пересекают обмотки ротора и индуцируют в них (в соответствии с законом электромагнитной индукции) вихревые токи. Эти токи взаимодействуют с вращающимся магнитным полем, в результате чего возникает механический вращающий момент, заставляющий ротор вращаться в ту же сторону, что и магнитное поле статора.

Ротор двигателя вращается со скоростью $n_{\text{рот}}$ меньшей, чем вращающееся магнитное поле (т.е. не синхронно с ним или асинхронно). Это объясняется тем, что при одинаковых скоростях исчезают вихревые токи в обмотке ротора и

* Если заворачивать буравчик в направлении тока, то направление вращения его рукоятки укажет направление силовых линий магнитного поля, созданного этим током.

** Статоры и роторы всех электрических машин переменного тока изготавливаются не сплошными, а набираются из отдельных, изолированных между собой, тонких листов специальной стали для уменьшения их нагрева вихревыми токами. Подробно об этом излагается в курсе электрических машин.

исчезает действующий на него вращающий момент. Относительная разность скоростей вращающегося магнитного поля статора и вращающегося ротора называется скольжением S . Обычно эта величина составляет при номинальной нагрузке двигателя 2-4%.

$$S = \frac{n_{\text{СТ}} - n_{\text{РОТ}}}{n_{\text{СТ}}} \cdot 100\%.$$

Для изменения направления вращения ротора следует поменять направления токов в каких-нибудь двух обмотках статора.

Кроме асинхронных в промышленности применяются также *синхронные двигатели*, по конструкции аналогичные трехфазным генераторам (рис.7.1). Если обмотки статора такого двигателя подключить к трехфазной цепи, а обмотку ротора – к источнику постоянного тока, то ротор не придет во вращение, так как магнитное поле статора из-за большой скорости вращения не сможет «сцепиться» с неподвижным магнитным полем ротора. Для запуска такого двигателя необходимо предварительно, перед включением обмотки ротора к источнику постоянного напряжения, раскрутить ротор до скорости, близкой к скорости вращения магнитного поля статора (например, с помощью специальных короткозамкнутых обмоток, как в асинхронном двигателе). Тогда магнитные поля статора и ротора сцепятся между собой разноименными полюсами аналогично двум постоянным магнитам, и ротор будет теперь вращаться с той же скоростью, что и вращающееся поле статора, т.е. *синхронно* с ним.

Синхронные двигатели обычно изготавливаются большой мощности и находят применение там, где не требуется их частое включение (вентиляционные системы, крупные компрессорные установки), а также в качестве синхронных компенсаторов реактивной мощности, поскольку в режиме перевозбуждения их ток опережает по фазе приложенное напряжение.

7.7. Метод симметричных составляющих

Расчет несимметричных режимов работы трехфазных электрических цепей методами, изложенными в гл.5 настоящего пособия, возможен только в том случае, когда в них отсутствуют вращающиеся электрические машины (генераторы и двигатели) либо их внутренние сопротивления настолько малы, что ими можно пренебречь по сравнению с сопротивлениями проводов и сопротивлениями приемников.

Дело в том, что сопротивления обмоток трехфазных генераторов и двигателей, в силу особенности их конструкции, сложным образом зависят от несимметрии токов и не могут быть заданы для каждого конкретного случая. Они легко определяются только для симметричных режимов работы и приводятся в паспортных данных машин.

Метод симметричных составляющих* основан на замене расчета одной несимметричной цепи расчетом токов в трех симметричных цепях, в каждой из которых действуют независимые друг от друга симметричные системы ЭДС токов и напряжений. Это позволяет применять к ним принцип наложения и

* Метод симметричных составляющих подробно рассмотрен также в [10].

находить реальные токи несимметричной трехфазной цепи как сумму токов в трех независимых друг от друга симметричных трехфазных цепях.

Этот метод был разработан для расчетов токов при коротких замыканиях в трехфазных цепях, содержащих вращающиеся машины. Однако в силу своей универсальности он применяется и для расчета других несимметричных режимов работы трехфазных цепей.

В основе метода лежит возможность разложения несимметричных трехфазных систем ЭДС, токов и напряжений на три симметричные составляющие: прямой, обратной и нулевой последовательностей.

На рис.7.22 в качестве примера показана несимметричная система фазных ЭДС генератора (а) и ее составляющие прямой (б), обратной (в) и нулевой (г) последовательностей (даны вне реальных масштабов). Симметричные составляющие ЭДС прямой последовательности обозначены индексом (1), симметричные составляющие ЭДС обратной последовательности индексом (2) и составляющие ЭДС нулевой последовательности индексом (0).

Симметричные составляющие векторов ЭДС прямой и обратной последовательностей (рис.7.22,б и в) образуют симметричные трехфазные звезды, а симметричные составляющие ЭДС нулевой последовательности состоят из трех одинаковых векторов, совпадающих между собой по фазе (рис.7.22,г).

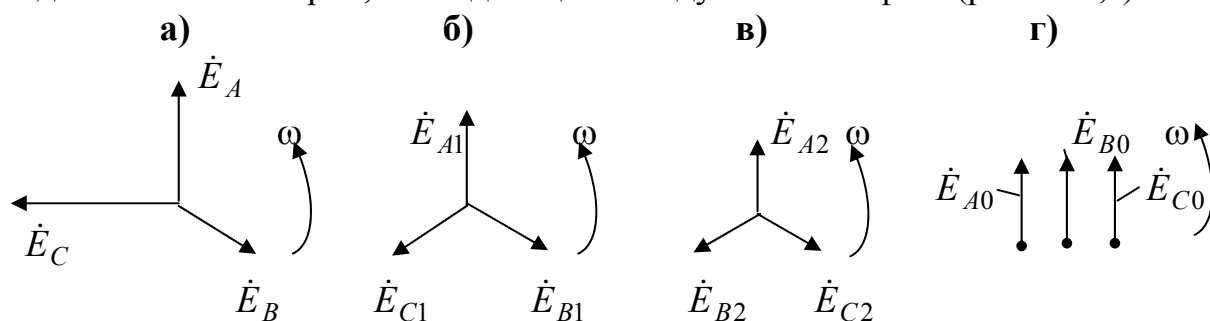


Рис.7.22

Все системы векторов, показанные на рис.7.22, вращаются, как это и принято в теории цепей (гл.3), с угловой скоростью (ω) против часовой стрелки. Однако система прямой последовательности имеет порядок чередования фаз ABC (т.е. порядок прохождения вращающимися векторами оси вещественных чисел комплексной плоскости), система обратной последовательности имеет порядок следования фаз ACB, а в системе нулевой последовательности все три вектора проходят при своем вращении ось вещественных чисел одновременно.

Несимметричную систему векторов фазных ЭДС генератора (а также по аналогии с ней систему токов и систему напряжений) можно записать в виде суммы симметричных составляющих прямой, обратной и нулевой последовательностей следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_A &= \dot{E}_{A1} + \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} \\ \dot{E}_B &= \dot{E}_{B1} + \dot{E}_{B2} + \dot{E}_{B0} \\ \dot{E}_C &= \dot{E}_{C1} + \dot{E}_{C2} + \dot{E}_{C0} \end{aligned} \right\} . \quad (7.13)$$

Используя понятие о фазовом множителе (a), приведенное в 7.1 данной главы, симметричные составляющие векторов ЭДС (а также токов и напряжений) прямой, обратной и нулевой последовательностей можно выразить через симметричные составляющие векторов фазы А:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{A1} &= \dot{E}_{A1}; & \dot{E}_{B1} &= a^2 \dot{E}_{A1}; & \dot{E}_{C1} &= a \dot{E}_{A1} \\ \dot{E}_{A2} &= \dot{E}_{A2}; & \dot{E}_{B2} &= a \dot{E}_{A2}; & \dot{E}_{C2} &= a^2 \dot{E}_{A2} \\ \dot{E}_{A0} &= \dot{E}_{A0}; & \dot{E}_{B0} &= \dot{E}_{A0}; & \dot{E}_{C0} &= \dot{E}_{A0} \end{aligned} \right\}. \quad (7.14)$$

С учетом (7.14) уравнения (7.13) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_A &= \dot{E}_{A1} + \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} \\ \dot{E}_B &= a^2 \dot{E}_{A1} + a \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} \\ \dot{E}_C &= a \dot{E}_{A1} + a^2 \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} \end{aligned} \right\}. \quad (7.15)$$

Соотношения (7.15) позволяют находить реальную несимметричную систему ЭДС (а также по этому образцу несимметричную систему токов и напряжений) по ее симметричным составляющим прямой, обратной и нулевой последовательностей. Решая систему уравнений (7.15) относительно симметричных составляющих, находим, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{A1} &= (1/3) (\dot{E}_A + a \dot{E}_B + a^2 \dot{E}_C) \\ \dot{E}_{A2} &= (1/3) (\dot{E}_A + a^2 \dot{E}_B + a \dot{E}_C) \\ \dot{E}_{A0} &= (1/3) (\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C) \end{aligned} \right\}. \quad (7.16)$$

Эти уравнения позволяют находить симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей для любой известной (заданной) несимметричной системы ЭДС (а также по этому образцу токов и напряжений).

Пример 7.15. Рассмотрим последовательность расчета несимметричной трехфазной электрической цепи методом симметричных составляющих на примере линии электропередачи (ЛЭП), представленной на рис.7.23,а. Линия подключена к несимметричному трехфазному генератору, обмотки которого соединены звездой. В ЛЭП произошло короткое замыкание на землю. Сопротивления этого короткого замыкания $\underline{Z}_{KA}$, $\underline{Z}_{KB}$ и $\underline{Z}_{KC}$ известны. Известны также сопротивления проводов ЛЭП $\underline{Z}_L$, сопротивление нейтрального провода $\underline{Z}_N$, сопротивления обмоток генератора токам прямой $\underline{Z}_{G1}$, обратной $\underline{Z}_{G2}$ и нулевой $\underline{Z}_{G0}$ последовательностей и система фазных ЭДС генератора $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ (в общем случае – несимметричная). Требуется определить токи в линейных проводах цепи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$.

Решение. Расчет данной цепи производим в следующем порядке.

1. Заменяем место несимметрии трехфазной цепи (место короткого замыкания) эквивалентным источником с несимметричной системой фазных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ (рис.7.23,б) и при этом получаем, что

$$\dot{U}_A = \underline{Z}_{KA} \dot{I}_A; \quad \dot{U}_B = \underline{Z}_{KB} \dot{I}_B; \quad \dot{U}_C = \underline{Z}_{KC} \dot{I}_C. \quad (7.17)$$

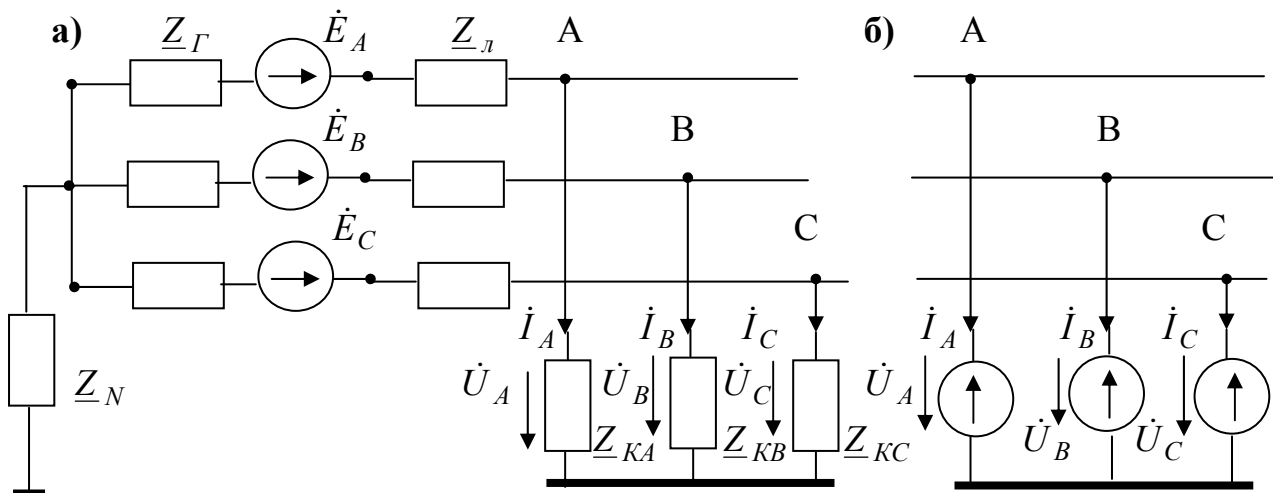


Рис.7.23

При таком подходе сама трехфазная цепь становится симметричной, а несимметричными остаются только трехфазный генератор (источник ЭДС) и источник напряжения в месте короткого замыкания. ЭДС и напряжения этих источников можно разложить на составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей, используя в качестве образца формулы (7.16).

Условие симметричности трехфазной цепи является здесь определяющим, так как только у симметричных цепей симметричные составляющие ЭДС напряжений и токов действуют независимо друг от друга и, следовательно, можно применять к ним принцип наложения. Таким образом, вместо одной несимметричной трехфазной цепи в рассмотрение вводятся три симметричные трехфазные цепи, в каждой из которых действуют ЭДС, токи и напряжения только одной последовательности.

2. Составляем три независимые друг от друга трехфазные цепи для определения токов прямой, обратной и нулевой последовательностей. В каждой из них действуют токи, напряжения и ЭДС только своей последовательности.

В трехфазной симметричной цепи, составленной для определения токов прямой последовательности, действуют только составляющие токов напряжений и ЭДС прямой последовательности. В трехфазной симметричной цепи, составленной для определения токов обратной последовательности, действуют только составляющие токов напряжений и ЭДС обратной последовательности. В трехфазной симметричной цепи, составленной для определения токов нулевой последовательности, действуют составляющие токов напряжений и ЭДС только этой последовательности.

Каждая такая цепь работает в симметричном режиме, и поэтому достаточно рассчитать симметричные составляющие токов и напряжений только для одной из ее фаз (7.4). Обычно для этого используется фаза А.

На рис.7.24 показаны схемы для расчета токов прямой (а), обратной (б) и нулевой (в) последовательностей, составленные для фазы А цепи.

На этих схемах $\dot{I}_{A1}$, $\dot{U}_{A1}$ и $\dot{E}_{A1}$ - симметричные составляющие токов, напряжений и ЭДС прямой последовательности фазы А; $\dot{I}_{A2}$, $\dot{U}_{A2}$ и $\dot{E}_{A2}$ -

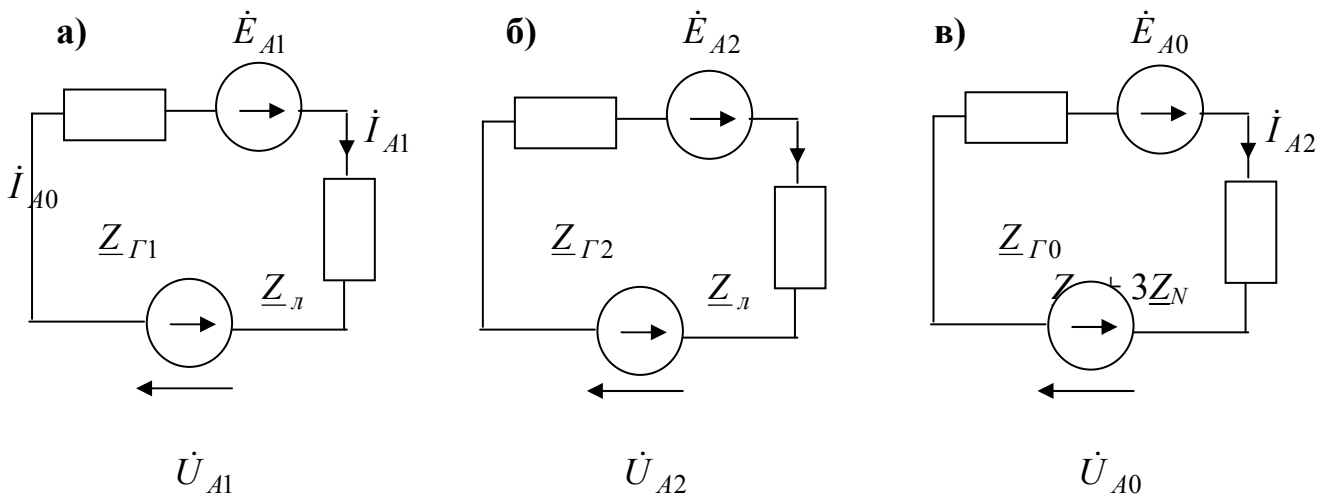


Рис.7.24

симметричные составляющие токов, напряжений и ЭДС обратной последовательности фазы А; $\dot{I}_{A0}$, $\dot{U}_{A0}$ и $\dot{E}_{A0}$ - симметричные составляющие токов, напряжений и ЭДС нулевой последовательности фазы А.

3. Определяем сопротивления трехфазной цепи, которые они оказывают токам прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Сопротивления генератора токам прямой, обратной и нулевой последовательностей Z_{G1} , Z_{G2} и Z_{G0} не равны друг другу и заданы в его паспортных данных.

Сопротивление ЛЭП токам прямой и обратной последовательностей равны друг другу и реальному сопротивлению проводов: $Z_{L1} = Z_{L2} = Z_L$.

Сопротивления ЛЭП токам нулевой последовательности содержит сопротивление линии Z_L и, кроме того, утроенное сопротивление нейтрального провода: $Z_{L0} = Z_L + 3Z_N$. Так происходит, потому что в нейтральном проводе симметричной трехфазной цепи протекает утроенный ток нулевой последовательности, и в однофазной схеме, для сохранения ее эквивалентности с реальной, следует утраивать сопротивление нейтрального провода.

4. Составляем (в соответствии со вторым законом Кирхгофа) уравнения для цепей, представленных на рис.7.24, и получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{A1} &= \dot{I}_{A1}(Z_{G1} + Z_{L1}) + \dot{U}_{A1} \\ \dot{E}_{A2} &= \dot{I}_{A2}(Z_{G2} + Z_{L2}) + \dot{U}_{A2} \\ \dot{E}_{A0} &= \dot{I}_{A0}(Z_{G0} + Z_{L0}) + \dot{U}_{A0} \end{aligned} \right\} . \quad (7.18)$$

В этих трех уравнениях шесть неизвестных величин: три тока ($\dot{I}_{A1}, \dot{I}_{A2}, \dot{I}_{A0}$) и три напряжения ($\dot{U}_{A1}, \dot{U}_{A2}, \dot{U}_{A0}$). Для их определения требуется привлечь еще три дополнительных уравнения, которыми служат уравнения (7.17), описывающие место несимметрии (место короткого замыкания). Разлагая систему напряжений эквивалентного источника и систему линейных токов на

симметричные составляющие по образцу формул (7.15), получаем уравнения (7.17) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} &= \underline{Z}_{KA} (\dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}) \\ a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} &= \underline{Z}_{KB} (a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}) \\ a \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} &= \underline{Z}_{KC} (a \dot{I}_{A1} + a^2 \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0}) \end{aligned} \right\}. \quad (7.19)$$

5. Решая систему из шести уравнений (7.18) и (7.19), находим все шесть неизвестных величин, которыми являются симметричные составляющие линейных токов цепи прямой, обратной и нулевой последовательностей $(\dot{I}_{A1}, \dot{I}_{A2}, \dot{I}_{A0})$ и симметричные составляющие напряжений эквивалентного источника прямой, обратной и нулевой последовательностей $(\dot{U}_{A1}, \dot{U}_{A2}, \dot{U}_{A0})$.

6. Находим реальные линейные токи цепи по их симметричным составляющим, используя в качестве образца формулы (7.15):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} \\ \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_{A1} + a^2 \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} \end{aligned} \right\}. \quad (7.20)$$

7. Находим реальные напряжения в месте несимметрии по их симметричным составляющим, используя в качестве образца формулы (7.15):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} \\ \dot{U}_B &= a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} \\ \dot{U}_C &= a \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} \end{aligned} \right\}. \quad (7.21)$$

Пример 7.16. Трехфазный генератор вырабатывает несимметричную систему фазных ЭДС: $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$; $\dot{E}_B = 220e^{-j90^\circ} = -j220 \text{ В}$; $\dot{E}_C = 220e^{+j90^\circ} = +j220 \text{ В}$. Векторная диаграмма этих ЭДС на комплексной плоскости показана на рис.7.25,а. Требуется определить симметричные составляющие ЭДС генератора прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Решение. В соответствии с формулами (7.16) имеем

1. Симметричные составляющие прямой последовательности

$$\begin{aligned} \dot{E}_{A1} &= \frac{1}{3} (\dot{E}_A + a \dot{E}_B + a^2 \dot{E}_C) = \frac{1}{3} \left[220 + \left(e^{j120^\circ} \right) \cdot 220e^{-j90^\circ} + \left(e^{j240^\circ} \right) \cdot 220e^{+j90^\circ} \right] = \\ &= \frac{1}{3} (220 + 220e^{+j30^\circ} + 220e^{+j330^\circ}) = \frac{1}{3} [220 + (190 + j110) + (190 - j110)] = \\ &= \frac{1}{3} (220 + 380) = \frac{600}{3} = 200 \text{ В}. \end{aligned}$$

2. Симметричные составляющие обратной последовательности

$$\dot{E}_{A2} = \frac{1}{3} (\dot{E}_A + a^2 \dot{E}_B + a \dot{E}_C) = \frac{1}{3} \left[220 + \left(e^{j240^\circ} \right) \cdot 220e^{-j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{+j90^\circ} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[220 + 220e^{j150^\circ} + 220e^{j210^\circ} \right] = \frac{1}{3} [220 + (-360)] = \frac{-160}{3} = -53,3 \text{ В.}$$

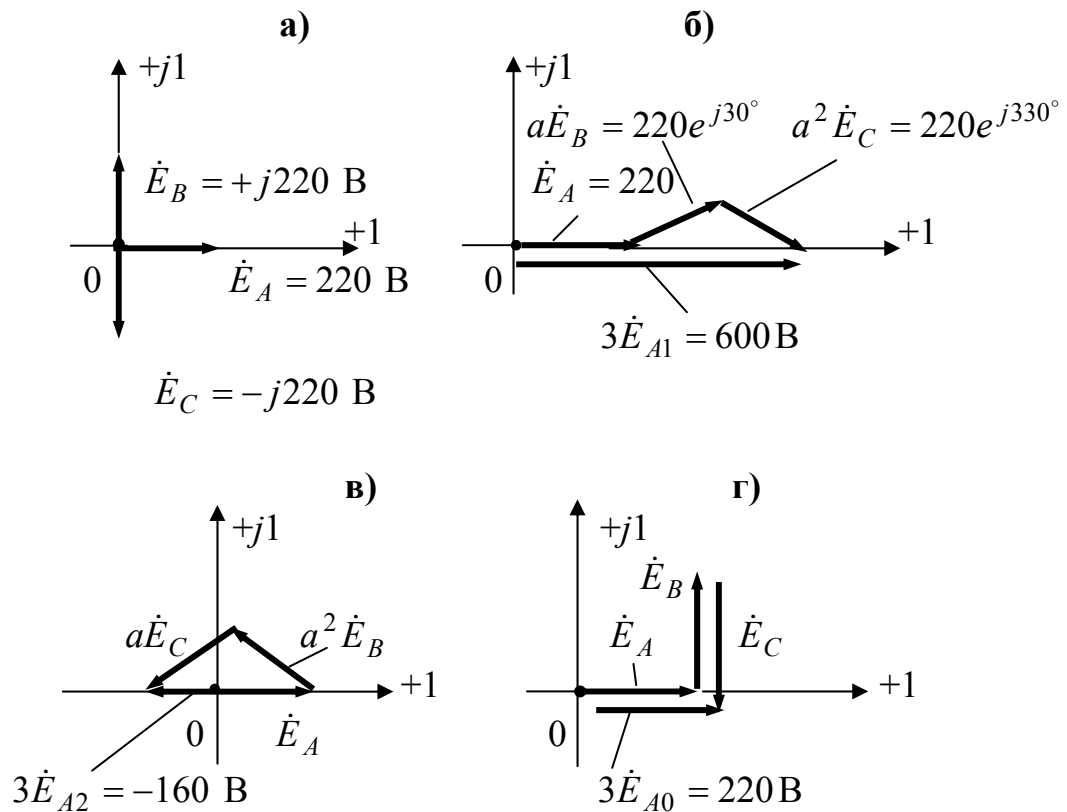


Рис.7.25

3. Симметричные составляющие нулевой последовательности

$$\dot{E}_{A0} = \frac{1}{3} (\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C) = \frac{1}{3} [220 - j220 + j220] = \frac{220}{3} = 73,3 \text{ В.}$$

Напомним здесь, что переход от показательной формы записи комплексных чисел к алгебраической для любого из четырех квадрантов комплексной плоскости рассмотрен в гл.4.

Графическая интерпретация разложения несимметричной системы фазных ЭДС генератора на симметричные составляющие дана на рис.7.25, б, в, г.

Проверку правильности решения осуществим с помощью формул (7.15)

$$\dot{E}_A = \dot{E}_{A1} + \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} = 200 - 53,3 + 73,3 = 220 \text{ В;}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_B &= a^2 \dot{E}_{A1} + a \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} = 200e^{j240^\circ} + (-53,3e^{j120^\circ}) + 73,3 = (-100 - j173,2) + \\ &+ (+26,7 - j46,2) + 73,3 = -j220 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_C &= a \dot{E}_{A1} + a^2 \dot{E}_{A2} + \dot{E}_{A0} = 200e^{j120^\circ} + (-53,3e^{j240^\circ}) + 73,3 = (-100 + j173,2) + \\ &+ (26,7 + j46,2) + 73,3 = +j220 \text{ В.} \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с исходными данными, поэтому задача решена верно.

Графическое нахождение несимметричной системы ЭДС генератора по ее

симметричным составляющим показана на рис.7.26.

На этом рисунке:

- а) известная из предыдущего расчета система симметричных составляющих ЭДС прямой, обратной и нулевой последовательностей;
- б) графическое определение ЭДС фазы А источника по ее симметричным составляющим;
- в) графическое определение ЭДС фазы В источника по ее симметричным составляющим;
- г) графическое определение ЭДС фазы С источника по ее симметричным составляющим.

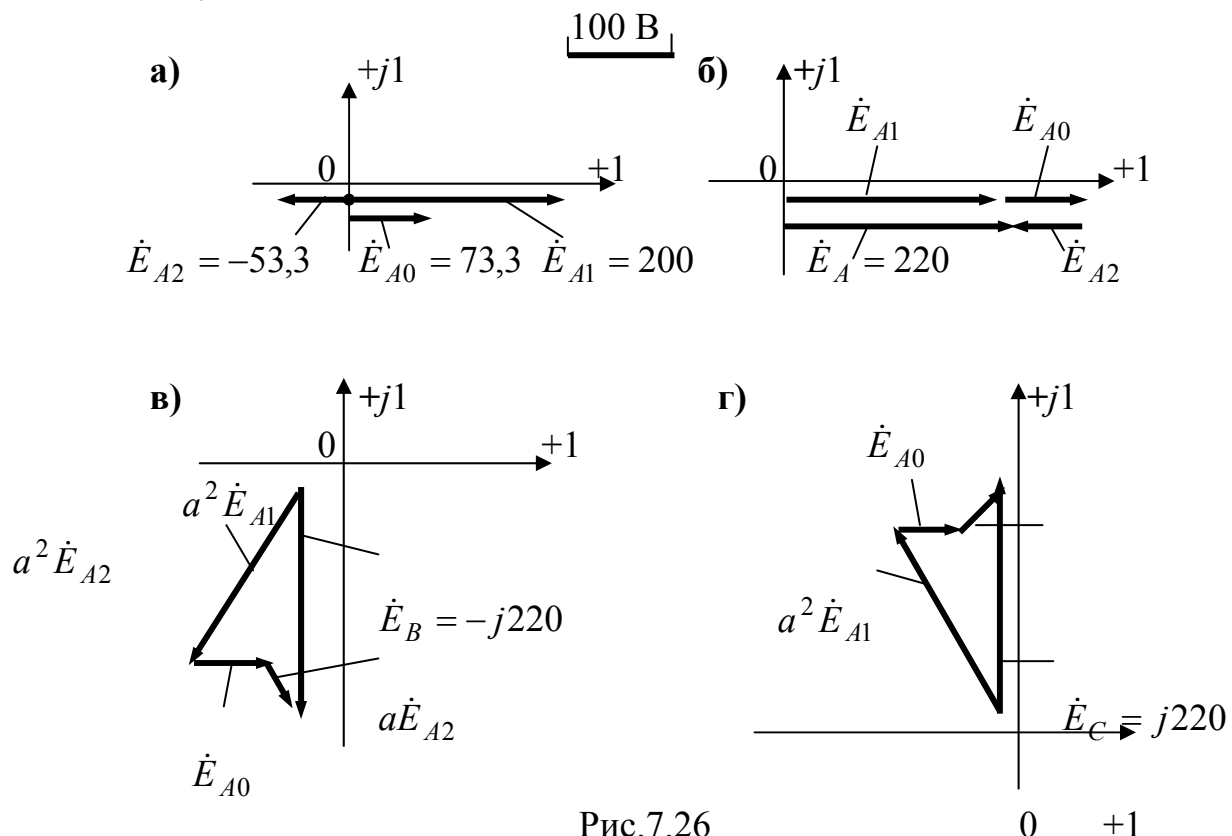


Рис.7.26

Пример 7.17. На зажимах трехфазного генератора произошло короткое замыкание между фазами В и С, а фаза А при этом оказалась разомкнутой (рис.7.27,а). Требуется найти симметричные составляющие токов прямой, обратной и нулевой последовательностей генератора, если известен ток в фазе В: $I_B = 346$ А.

Решение. 1. При коротком замыкании фаз В и С и принятом на рис.7.27 направлении токов в фазах имеем, что $\dot{I}_C = -\dot{I}_B$. Вектор $\dot{I}_B$ совместим с осью вещественных чисел комплексной плоскости, и получим, что $\dot{I}_B = 346$ А, а $\dot{I}_C = -346$ А.

2. Находим симметричные составляющие токов генератора, воспользовавшись в качестве образца формулами (7.16):

- а) симметричные составляющие тока (в фазе А) прямой последовательности

$$\dot{I}_{A1} = \frac{1}{3} [\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C] = \frac{1}{3} [0 + a\dot{I}_B - a^2\dot{I}_B] = \frac{1}{3} [\dot{I}_B (a - a^2)] = j \frac{346 \cdot 1,73}{3} = j200 \text{ A};$$

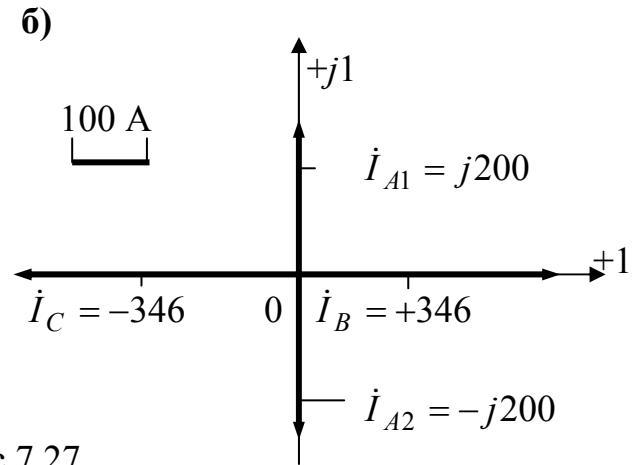
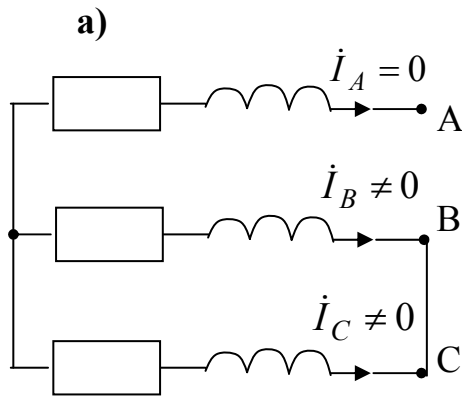


Рис.7.27

б) симметричные составляющие тока (в фазе А) обратной последовательности

$$\dot{I}_{A2} = \frac{1}{3} [\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C] = \frac{1}{3} [0 + a^2\dot{I}_B - a\dot{I}_B] = \frac{1}{3} [\dot{I}_B (a^2 - a)] = -j \frac{346 \cdot 1,73}{3} = -j200 \text{ A};$$

в) симметричные составляющие тока (в фазе А) нулевой последовательности

$$\dot{I}_{A0} = \frac{1}{3} [\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C] = \frac{1}{3} [0 + \dot{I}_B - \dot{I}_B] = 0.$$

Заметим здесь, что в вышеприведенных соотношениях в соответствии с формулами (7.1,б) имеем

$$(a - a^2) = (-0,5 + j0,87) - (-0,5 - j0,87) = j1,73;$$

$$(a^2 - a) = (-0,5 - j0,87) - (-0,5 + j0,87) = -j1,73.$$

Векторная диаграмма токов в фазах В и С, а также их симметричных составляющих показана на рис.7.27,б.

3. Проверку правильности решения задачи осуществим, воспользовавшись в качестве образца формулами (7.15), и найдем несимметричную систему токов генератора по известным симметричным составляющим этих токов:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = j200 - j200 + 0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= a^2\dot{I}_{A1} + a\dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = \left(e^{j240^\circ} \cdot 200e^{+j90^\circ} \right) + \left(e^{j120^\circ} \cdot 200e^{-j90^\circ} \right) + 0 = \\ &= 200e^{j330^\circ} + 200e^{j30^\circ} = (173 - j100) + (173 + j100) = 346 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= a\dot{I}_{A1} + a^2\dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = \left(e^{j120^\circ} \cdot 200e^{j90^\circ} \right) + \left(e^{j240^\circ} \cdot 200e^{-j90^\circ} \right) + 0 = \\ &= 200e^{j210^\circ} + 200e^{j150^\circ} = (-173 - j100) + (-173 + j100) = -346 \text{ A}. \end{aligned}$$

Полученные результаты совпадают с заданными токами генератора и поэтому задача решена верно.

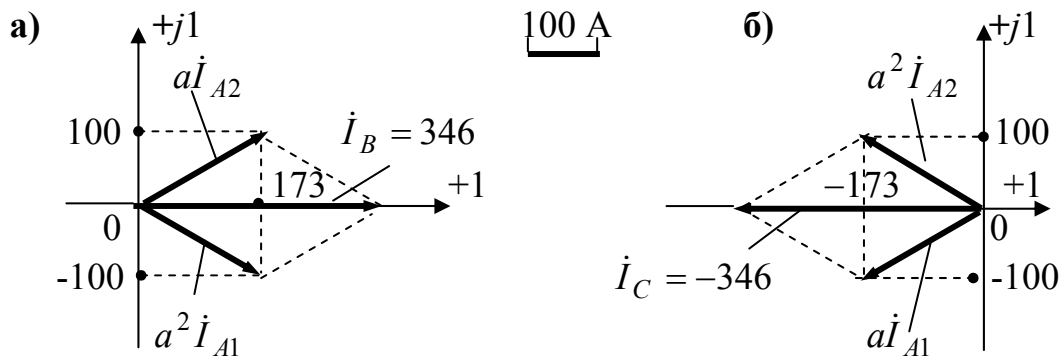


Рис.7.28

Графическое пояснение определения токов в фазах В и С по их симметричным составляющим дано на рис.7.28,а и б.

Пример 7.18. У трехфазного генератора, соединенного звездой, обмотка А статора закорочена, а обмотки В и С разомкнуты, как это показано на рис.7.29,а. Ток в обмотке А известен: $I_A = 600$ А. Требуется определить симметричные составляющие токов прямой, обратной и нулевой последовательностей этого генератора и построить их векторную диаграмму на комплексной плоскости.

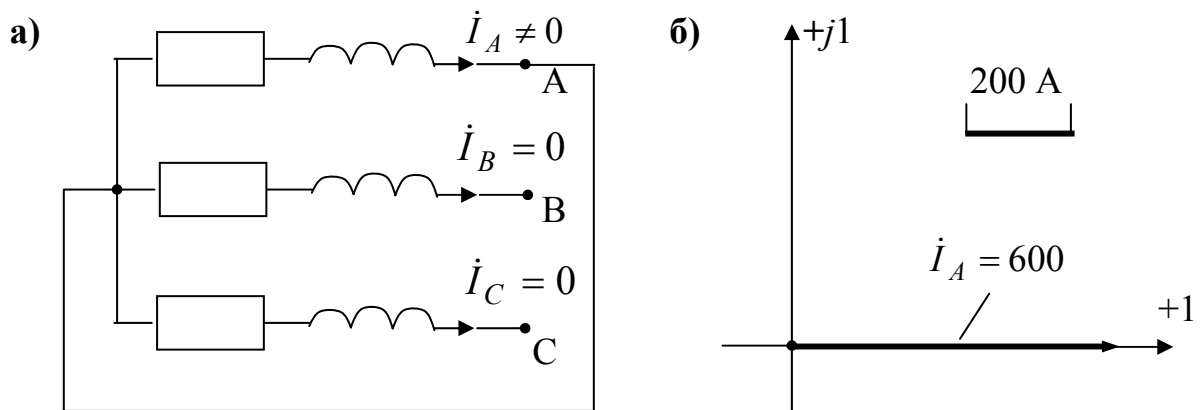


Рис.7.29

Решение. 1. Ток фазы А направим по оси вещественной комплексной плоскости, и тогда $\dot{I}_A = I_A e^{j0} = I_A = 600$ А. Векторная диаграмма этой несимметричной системы токов показана на рис.7.29,б.

2. Находим симметричные составляющие токов генератора, используя в качестве образца формулы (7.16):

а) симметричная составляющая тока нулевой последовательности для

фазы А $\dot{I}_{A0} = \frac{1}{3}[\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C] = \frac{1}{3}[600 + 0 + 0] = 200 \text{ A};$

б) симметричная составляющая тока прямой последовательности для фазы А $\dot{I}_{A1} = \frac{1}{3}[\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C] = \frac{1}{3}[600 + 0 + 0] = 200 \text{ A};$

в) симметричная составляющая тока обратной последовательности (в фазе А): $\dot{I}_{A2} = \frac{1}{3}[\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C] = \frac{1}{3}[600 + 0 + 0] = 200 \text{ A}.$

3. Симметричные составляющие токов в фазах В и С генератора определяются по образцу формул (7.14).

Симметричные составляющие токов прямой последовательности

$$\dot{I}_{B1} = a^2 \dot{I}_{A1} = e^{j240^\circ} \cdot 200 = (-0,5 - j0,87) \cdot 200 = (-100 - j173);$$

$$\dot{I}_{C1} = a \dot{I}_{A1} = e^{j120^\circ} \cdot 200 = (-0,5 + j0,87) \cdot 200 = (-100 + j173).$$

Симметричные составляющие токов обратной последовательности:

$$\dot{I}_{B2} = a \dot{I}_{A2} = e^{j120^\circ} \cdot 200 = (-0,5 + j0,87) \cdot 200 = (-100 + j173);$$

$$\dot{I}_{C2} = a^2 \dot{I}_{A2} = e^{j240^\circ} \cdot 200 = (-0,5 - j0,87) \cdot 200 = (-100 - j173).$$

Симметричные составляющие токов нулевой последовательности:

$$\dot{I}_{B0} = \dot{I}_{C0} = \dot{I}_{A0} = 200 \text{ A}.$$

Векторные диаграммы симметричных составляющих токов прямой (а), обратной (б) и нулевой (в) последовательностей показаны на рис.7.30.

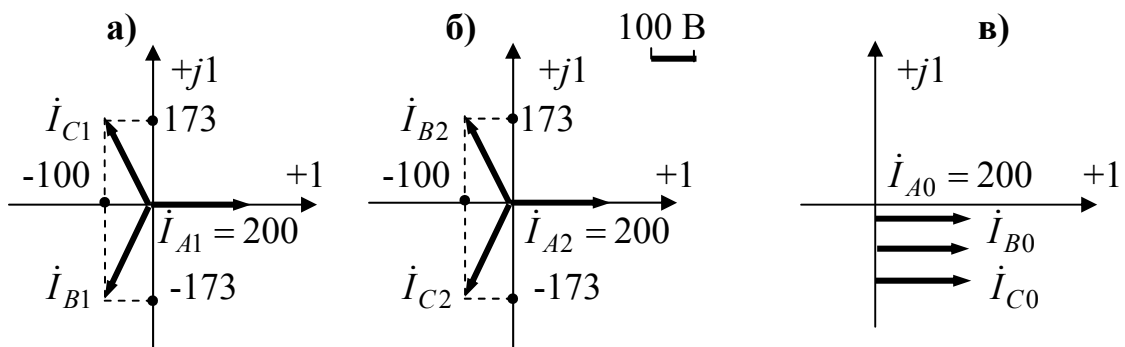


Рис.7.30

4. Проверку правильности расчетов симметричных составляющих токов осуществим по образцу формул (7.13) и определим исходную несимметричную систему токов генератора по найденным симметричным составляющим

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = 200 + 200 + 200 = 600 \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{B2} + \dot{I}_{B0} = 200e^{j240^\circ} + 200e^{j120^\circ} + 200 = \\ &= (-100 - j173) + (-100 + j173) + 200 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0} = 200e^{j120^\circ} + 200e^{j240^\circ} + 200 = \\ &= (-100 + j173) + (-100 - j173) + 200 = 0. \end{aligned}$$

Полученные результаты совпадали с исходными данными, поэтому задача решена верно.

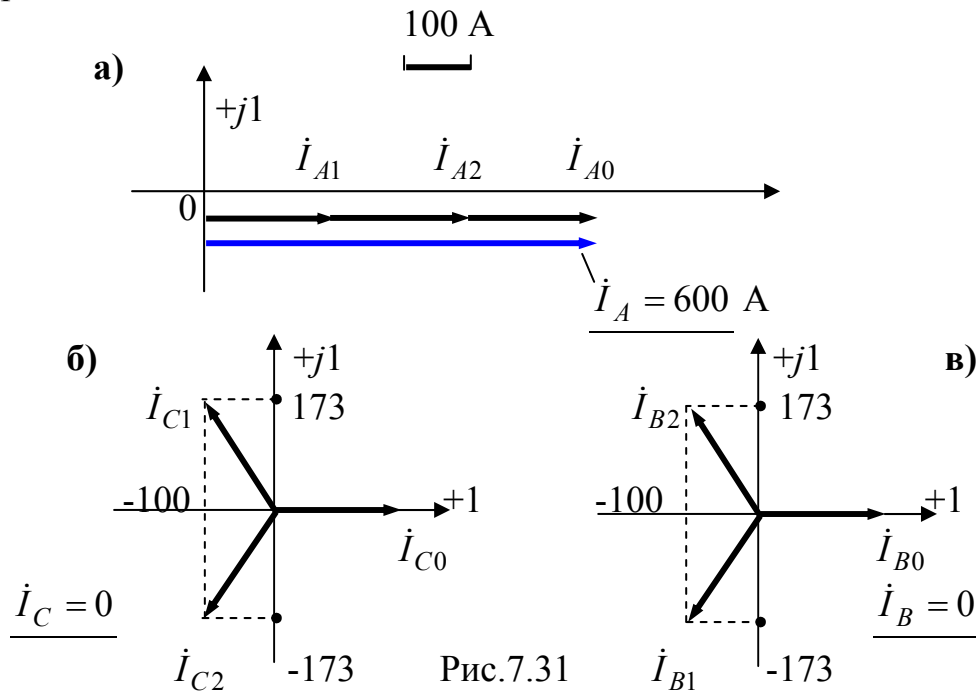


Рис.7.31

Векторные диаграммы, иллюстрирующие нахождение реальных токов генератора в фазах А, В и С по их симметричным составляющим, представлены на рис.7.31.

Пример 7.19. Трехфазный электродвигатель (рис.7.32), обмотки которого соединены звездой, подключен к трехфазной цепи, в которой действует симметричная система линейных напряжений прямой последовательности с $U_{\text{л}} = 380$ В. Сопротивления обмоток двигателя для токов прямой и обратной последовательностей известны: $\underline{Z}_1 = j8 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = j2 \text{ Ом}$. Активными сопротивлениями его обмоток можно пренебречь. Требуется определить показания амперметров электромагнитной системы во всех трех обмотках электродвигателя при обрыве фазы А и действующее значение напряжения U_A на этом обрыве.

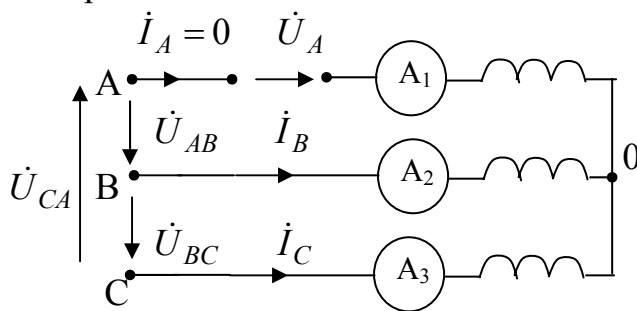


Рис.7.32

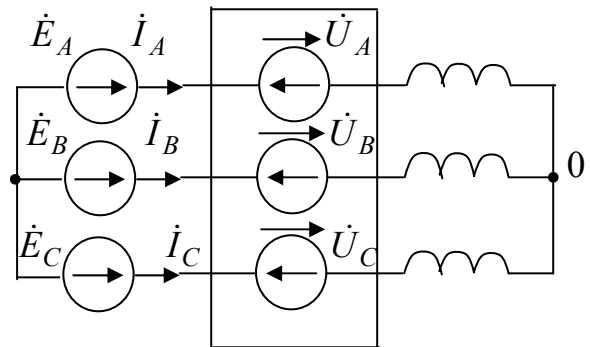


Рис.7.33

Решение. 1. Выберем направления действия линейных токов, линейных и

фазных напряжений в соответствии с рис.7.32. Очевидно, что $\dot{I}_C = -\dot{I}_B$.

2. При соединении трехфазной цепи звездой без нулевого провода симметричные составляющие токов нулевой последовательности отсутствуют ($\dot{I}_{A0} = \dot{I}_{B0} = \dot{I}_{C0} = 0$), так как только в этом случае для них будет справедливо уравнение, составленное для точки 0 приемника по первому закону Кирхгофа: $\dot{I}_{A0} + \dot{I}_{B0} + \dot{I}_{C0} = 0$.

3. Задачу решаем в последовательности, изложенной в примере 7.11.

а) Место несимметрии трехфазной цепи (место обрыва провода А) заменяем эквивалентным источником с несимметричной системой фазных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, как это показано на рис.7.33. Очевидно, что на этом участке $\dot{U}_B = 0$; $\dot{U}_C = 0$; $\dot{I}_A = 0$. Симметричную систему линейных напряжений источника $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ заменяем (для удобства последующих расчетов) эквивалентной симметричной системой фазных ЭДС $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ с действующим значением $E = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 220 \text{ В}$.

б) При такой замене трехфазная цепь становится симметричной, и, как показано выше, в ней независимо друг от друга действуют симметричные составляющие токов прямой, обратной и нулевой последовательностей.

в) Принимаем фазу А исследуемой цепи за основную и составляем три независимых друг от друга схемы (рис.7.34) для симметричных составляющих токов прямой (левая схема), обратной (центральная схема) и нулевой (правая схема) последовательностей.

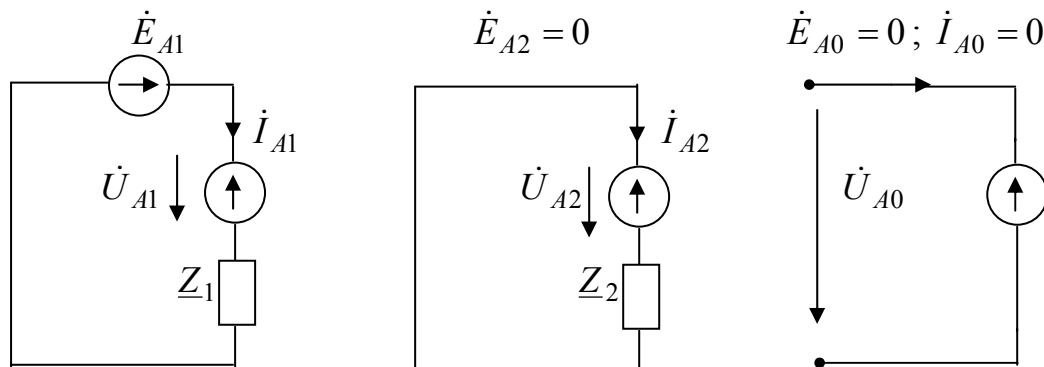


Рис.7.34

Заметим, что, согласно предыдущему изложению, в схеме для токов обратной и нулевой последовательностей отсутствуют симметричные составляющие ЭДС генератора $\dot{E}_{A2}$ и $\dot{E}_{A0}$, а в схеме для токов нулевой последовательности отсутствует симметричная составляющая тока нулевой последовательности $\dot{I}_{A0}$.

г) Составляем для указанных выше схем уравнения по второму закону Кирхгофа и получаем

$$\dot{E}_{A1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{A1} + \dot{U}_{A1} \quad (1^*); \quad 0 = \underline{Z}_2 \dot{I}_{A2} + \dot{U}_{A2} \quad (2^*).$$

В этой системе уравнений четыре неизвестных величины:

$\dot{I}_{A1}, \dot{I}_{A2}, \dot{U}_{A1}, \dot{U}_{A2}$. Недостающие дополнительные уравнения получаем из условий на несимметричном участке цепи: $\dot{U}_A = 0, \dot{U}_B = 0, \dot{I}_A = 0$. Разлагая $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{I}_A$ на симметричные составляющие прямой обратной и нулевой последовательностей в соответствии с образцом, данным формулами (7.15), получаем

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = 0 \quad (3^*); \quad \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = 0 \quad (4^*);$$

$$\dot{U}_C = a \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = 0 \quad (5^*).$$

Анализируя уравнения (3*), (4*) и (5*), находим:

во-первых: $\dot{I}_{A2} = -\dot{I}_{A1}$. (6*)

Это следует из уравнения (3*), так как $\dot{I}_{A0} = 0$ по условию задачи;

во-вторых: $\dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A2}$. Это равенство получаем, вычитая уравнение (5*) из уравнения (4*) и учитывая, что в соответствии с формулами (7.1,б) $(a^2 - a) = -j1,73$ и $(a - a^2) = +j1,73$, находим

$$\dot{U}_B - \dot{U}_C = (a^2 - a)\dot{U}_{A1} + (a - a^2)\dot{U}_{A2} = -j1,73\dot{U}_{A1} + j1,73\dot{U}_{A2} = 0;$$

в третьих: $\dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A0}$. Это соотношение вытекает из уравнения (4*) при условии $\dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A2}$ и с учетом того, что $(a^2 + a) = -1$, находим

$$a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = (a^2 + a)\dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A0} = 0.$$

Таким образом, из уравнений (4*) и (5*) следует, что

$$\dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A2} = \dot{U}_{A0}. \quad (7^*)$$

д) Дополнительные условия, выраженные формулами (6*) и (7*), позволяют решить систему уравнений (1*) и (2*). Из уравнения (2*) следует, что

$\dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A2} = -\underline{Z}_2 \dot{I}_{A2} = -\underline{Z}_2 (-\dot{I}_{A1}) = +\underline{Z}_2 \dot{I}_{A1}$. Подставляя это значение $\dot{U}_{A1}$ в уравнение (1), получаем $\dot{E}_{A1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_{A1} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{A1} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \dot{I}_{A1}$ или

$$\dot{I}_{A1} = \dot{E}_{A1} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2). \quad (8^*)$$

В этой формуле симметричная составляющая ЭДС генератора прямой последовательности $\dot{E}_{A1} = 220$ В, что вытекает из формул (7.16). В самом деле, при симметрии систем фазных ЭДС (совместив вектор $\dot{E}_A$ с осью вещественных чисел) имеем $\dot{E}_A = 220$ В; $\dot{E}_B = 220e^{j240^\circ}$ В; $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{E}_{A1} &= \frac{1}{3} [\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C] = \frac{1}{3} \left[220 + \left(e^{j120^\circ} \cdot 220e^{j240^\circ} \right) + \left(e^{j240^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3} [220 + 220 + 220] = \frac{1}{3} (660) = 220 \text{ В.} \end{aligned}$$

Продолжая расчет симметричных составляющих токов источника, подставляем полученное значение $\dot{E}_{A1}$ в формулу (8*) и находим

$$\dot{I}_{A1} = \dot{E}_{A1} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 220 / j8 + j2 = 220 / j10 = -j22 \text{ А.}$$

Симметричная составляющая тока обратной последовательности в

соответствии с формулой (6*) имеет вид $\dot{I}_{A2} = -I_{A1} = +j22 \text{ A}$.

е) Реальный ток трехфазной цепи в фазе В определяется на основании образцов, заданных формулами (7.15):

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = a^2 \dot{I}_{A1} - a \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A0} = (a^2 - a) \dot{I}_{A1} + 0 = -j1,73(-j22) = -38 \text{ A}.$$

Тогда $\dot{I}_C = -\dot{I}_B = +38 \text{ A}$.

ж) Находим реальное напряжение $\dot{U}_A$. Предварительно определяем $\dot{U}_{A2}$ из уравнения (2*) в пункте г): $\dot{U}_{A2} = -\underline{Z}_2 \dot{I}_{A2} = +\underline{Z}_2 \dot{I}_{A1} = [(+j2) \cdot (-j22)] = +44 \text{ В}$.

С учетом формулы (7**) имеем, что $\dot{U}_{A2} = \dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A0} = +44 \text{ В}$. Тогда реальное напряжение на разрыве фазы А в соответствии с образцом, данным формулами (7.13): $\dot{U}_A = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = 132 \text{ В}$.

з) В качестве проверки вычислений убедимся, что напряжения $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$, определенные через их симметричные составляющие по формулам (7.15), равны нулю:

$$\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A0} = \dot{U}_{A1} (a^2 + a + 1) = 0;$$

$$\dot{U}_C = a \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A0} = \dot{U}_{A1} (a + a^2 + 1) = 0.$$

Напомним, что в этих формулах $(a^2 + a + 1) = 0$.

7.8. Дополнительные задания к главе 7. Вопросы и примеры для самотестирования

1. В условиях примера 7.1 определить действующие значения токов и напряжений приемника при обрыве фазы А ($\underline{Z} = \infty$) и наличии нейтрального провода. Определить также действующее значение тока в нейтральном проводе.

Ответы: $I_A = 0 \text{ A}$; $I_B = 10 \text{ A}$; $I_C = 10 \text{ A}$; $I_N = 10 \text{ A}$.

2. В условиях примера 7.1 определить действующие значения токов и напряжений приемника при обрыве фазы В и отсутствии нулевого провода. Определить также напряжение между нейтральными точками приемника и генератора.

Ответы: $I_A = 8,7 \text{ A}$; $I_B = 0$; $I_C = 8,7 \text{ A}$; $U_A = 190 \text{ В}$; $U_B = 330$; $U_C = 190 \text{ В}$; $U_N = 110 \text{ В}$.

3. В условиях примера 7.1 определить действующие значения токов и напряжений приемника при коротком замыкании фазы В и отсутствии нулевого провода.

Ответы: $I_A = 17,3 \text{ A}$; $I_B = 30 \text{ A}$; $I_C = 17,3 \text{ A}$; $U_N = 220 \text{ В}$.

4. В условиях примера 7.11 определить действующие значения токов и напряжений приемника при обрыве фазы ВС.

Ответы: $I_{AB} = 0$; $I_{BC} = 10 \text{ A}$; $I_{CA} = 10 \text{ A}$; $I_A = 10 \text{ A}$; $I_B = 10 \text{ A}$; $I_C = 17,3 \text{ A}$.

5. В условиях примера 7.11 определить действующие значения токов и напряжений приемника при обрыве линейного провода В.

Ответы: $I_{AB} = I_{BC} = 5 \text{ A}$; $I_{CA} = 10 \text{ A}$; $I_A = 15 \text{ A}$; $I_B = 0 \text{ A}$; $I_C = 15 \text{ A}$.

6. В условиях примера 7.1 определить активную, реактивную и полную мощности трехфазного приемника.

Ответы: $P = S = 6600 \text{ Вт}$; $Q = 0$.

7. В условиях примера 7.2 определить активную, реактивную и полную мощности трехфазного приемника.

Ответы: $P = 15,49$ кВт; $Q = 20,56$ вар; $S = 25,74$ кВА.

8. Ответить на все вопросы любого из шести вариантов разд.5 сборника тестовых карт [6].

9. Рассмотреть примеры 13 и 14 с решением из методического сборника [7].

Глава 8

Четырехполюсники

8.1. Определение, классификация

Четырехполусником называется электрическая цепь или ее часть, имеющая два входных и два выходных зажима. К входным зажимам подсоединяется источник энергии, а к выходным – сопротивление нагрузки.

Понятием о четырехполуснике пользуются в тех случаях, когда объектом анализа являются токи и напряжения на входных и выходных зажимах цепи, электромагнитные процессы в которой не исследуются. Любое электротехническое устройство, включенное между источником и приемником энергии, может рассматриваться как четырехполусник. На электрических схемах четырехполусники изображаются так, как это показано на рис.8.1. Здесь зажимы 1-1' являются входными, а зажимы 2-2' – выходными.

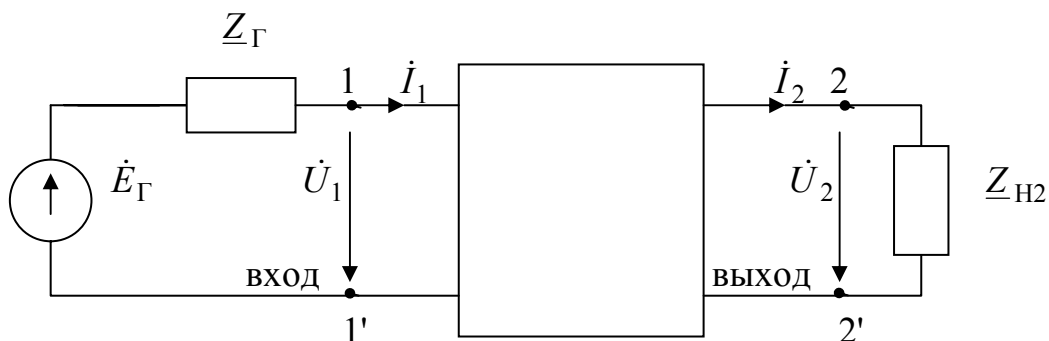


Рис.8.1

Четырехполусники классифицируются по различным признакам. Они могут быть активными и пассивными, симметричными и несимметричными, обратимыми и необратимыми, линейными и нелинейными.

Четырехполусник называется *активным*, если содержит внутри себя источники электрической энергии (например, усилитель). Четырехполусник является *симметричным*, если перемена местами входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепях, к которым он присоединен. Четырехполусник называется *обратимым*, если отношение напряжения на входе к току на выходе не зависит от того, какая из двух пар зажимов является входной, а какая выходной. Пассивные линейные четырехполусники всегда обратимы. Четырехполусник называется *линейным*, если его внутренняя структура не содержит нелинейных элементов.

В данной главе рассматривается главным образом теория линейных пассивных (без внутренних источников энергии) четырехполусников,

основной смысл которой состоит в том, что соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника могут быть найдены путем использования некоторых обобщенных его параметров.

8.2. Системы уравнений. Различные формы записи

Комплексные действующие значения токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника связаны между собой системой из двух линейных уравнений. Существует шесть различных по форме, но равнозначных по существу систем уравнений четырехполюсника, в зависимости от того, какие две из четырех комплексных величин $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ известны, а какие две требуется определить. Если, например, входные величины $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ необходимо выразить через выходные величины $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, то система уравнений будет иметь следующий вид * (при заданных на рис.8.1 направлениях токов) :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2. \end{cases} \quad (8.1)$$

Здесь $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ – коэффициенты четырехполюсника.

Систему (8.1) называют *А-формой записи уравнений*. Если поменять местами входные и выходные зажимы, т.е. к выходным зажимам подключить источник энергии, а к входным зажимам подключить приемник и поменять направления токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ на противоположные, то получим систему уравнений, в которой выходные величины $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ выражены через входные величины $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \underline{D}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1, \\ \dot{I}_2 = \underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1. \end{cases} \quad (8.1 \text{ а})$$

Эту систему называют *В-формой записи уравнений четырехполюсника*.

Легко заметить, что в формулах (8.1) и (8.1 а) коэффициенты $\underline{A}$ и $\underline{D}$ являются безразмерными, коэффициент $\underline{B}$ имеет размерность сопротивления, а $\underline{C}$ – размерность проводимости.

Параметры А-формы и В-формы записи уравнений связаны между собой соотношением, вытекающим из свойства обратимости линейного пассивного четырехполюсника:

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1. \quad (8.2)$$

Кроме этих двух форм существуют еще так называемые Z, Y, H и G – *формы записи уравнений четырехполюсника*. Все они представлены в табл.8.1. Там же показаны принятые для них направления токов и напряжений.

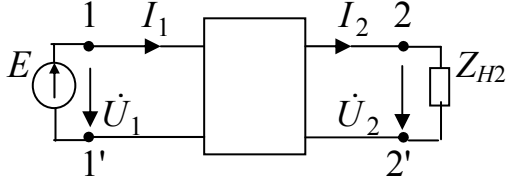
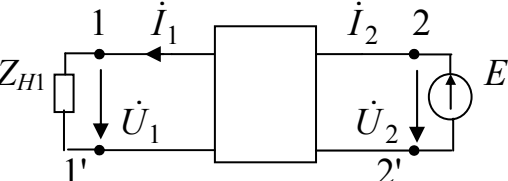
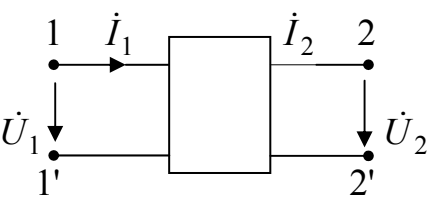
Коэффициенты при токах и напряжениях в каждой системе уравнений в общем случае представляют собой комплексные величины, зависящие от внутренней структуры четырехполюсника и частоты

* Вывод этих уравнений имеется в [1 – 4].

приложенного напряжения. При постоянной частоте источника коэффициенты четырехполюсника представляют собой постоянные величины и поэтому являются его *параметрами*. Четырехполюсник считается заданным, если известны его параметры.

Т а б л и ц а 8.1

Различные формы записей уравнений пассивных четырехполюсников

№ п/п	Положительные направления токов и напряжений	Форма записи уравнений	Условное обозначение формы
1	Прямая передача 	$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2$ $\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2$	A
2	Обратная передача 	$\dot{U}_2 = \underline{D} \dot{U}_1 + \underline{B} \dot{I}_1$ $\dot{I}_2 = \underline{C} \dot{U}_1 + \underline{A} \dot{I}_1$	B
3		$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2$ $\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2$	Y
4		$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2$ $\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2$	Z
5		$\dot{U}_1 = \underline{H}_{11} \dot{I}_1 + \underline{H}_{12} \dot{U}_2$ $\dot{I}_2 = \underline{H}_{21} \dot{I}_1 + \underline{H}_{22} \dot{U}_2$	H
6		$\dot{I}_1 = \underline{G}_{11} \dot{U}_1 + \underline{G}_{12} \dot{I}_2$ $\dot{U}_2 = \underline{G}_{21} \dot{U}_1 + \underline{G}_{22} \dot{I}_2$	G

Переход от одной формы записи к другой осуществляется путем решения систем уравнений четырехполюсника относительно искомых величин. Полученные результаты представлены в табл.8.2.

Таблица 8.2

**Матрицы систем уравнений четырехполюсника
при переходе от одной формы записи к другой**

От какой формы записи уравнений					
В какую форму записи	Z	Y	H	G	A
Z	$\underline{Z}_{11} \quad \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{21} \quad \underline{Z}_{22}$	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y} \quad \frac{-\underline{Y}_{12}}{\Delta_Y}$ $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y} \quad \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y}$	$\frac{\Delta_H}{\underline{H}_{22}} \quad \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$ $\frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{11}} \quad \frac{-\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{11}}$ $\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{11}} \quad \frac{\Delta_G}{\underline{G}_{11}}$	$\frac{\underline{A}}{\underline{C}} \quad \frac{1}{\underline{C}}$ $\frac{1}{\underline{C}} \quad \frac{\underline{D}}{\underline{C}}$
Y	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta_Z} \quad \frac{-\underline{Z}_{12}}{\Delta_Z}$ $\frac{-\underline{Z}_{21}}{\Delta_Z} \quad \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta_Z}$	$\underline{Y}_{11} \quad \underline{Y}_{12}$ $\underline{Z}_{21} \quad \underline{Z}_{22}$	$\frac{1}{\underline{H}_{11}} \quad \frac{-\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} \quad \frac{\Delta_H}{\underline{H}_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{\underline{G}_{22}} \quad \frac{\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{22}}$ $\frac{-\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{G}_{22}}$	$\frac{\underline{D}}{\underline{B}} \quad \frac{1}{\underline{B}}$ $\frac{-1}{\underline{B}} \quad \frac{\underline{A}}{\underline{B}}$
H	$\frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{22}} \quad \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}} \quad \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} \quad \frac{\Delta_Y}{\underline{Y}_{11}}$	$\underline{H}_{11} \quad \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{21} \quad \underline{H}_{22}$	$\frac{\underline{G}_{22}}{\Delta_G} \quad \frac{-\underline{G}_{12}}{\Delta_G}$ $\frac{-\underline{G}_{12}}{\Delta_G} \quad \frac{\underline{G}_{11}}{\Delta_G}$	$\frac{\underline{B}}{\underline{D}} \quad \frac{1}{\underline{D}}$ $\frac{-1}{\underline{D}} \quad \frac{\underline{C}}{\underline{D}}$
G	$\frac{1}{\underline{Z}_{11}} \quad \frac{-\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} \quad \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{\underline{Y}_{22}} \quad \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$ $\frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{\Delta_H} \quad \frac{-\underline{H}_{12}}{\Delta_H}$ $\frac{-\underline{H}_{21}}{\Delta_H} \quad \frac{\underline{H}_{11}}{\Delta_H}$	$\underline{G}_{11} \quad \underline{G}_{12}$ $\underline{G}_{21} \quad \underline{G}_{22}$	$\frac{\underline{C}}{\underline{A}} \quad \frac{1}{\underline{A}}$ $\frac{1}{\underline{A}} \quad \frac{\underline{B}}{\underline{A}}$
A	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \quad \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{21}} \quad \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	$\frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \quad \frac{-1}{\underline{Y}_{21}}$ $\frac{-\Delta_Y}{\underline{Y}_{21}} \quad \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{-\Delta_H}{\underline{H}_{21}} \quad \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$ $\frac{-\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} \quad \frac{-1}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{21}} \quad \frac{\underline{G}_{22}}{\underline{G}_{21}}$ $\frac{\underline{G}_{11}}{\underline{G}_{21}} \quad \frac{\Delta_G}{\underline{G}_{21}}$	$\underline{A} \quad \underline{B}$ $\underline{C} \quad \underline{D}$

В этой таблице

$$\Delta_Z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}; \quad \Delta_H = \underline{H}_{11}\underline{H}_{22} - \underline{H}_{12}\underline{H}_{21};$$

$$\Delta_Y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}; \quad \Delta_G = \underline{G}_{11}\underline{G}_{22} - \underline{G}_{12}\underline{G}_{21}.$$

Заметим : анализ приведенных в табл.8.2 матриц показывает, что

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \quad \underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}; \quad \underline{G}_{12} = -\underline{G}_{21}. \quad (8.3)$$

Из этих соотношений, а также из формулы (8.2) следует, что для любой формы записи уравнений четырехполюсника только три из четырех его параметров являются независимыми. Иначе говоря, *несимметричный пассивный четырехполюсник однозначно задается любыми тремя его параметрами.*

Все описанные выше формы записи уравнений широко используются в электротехнической практике.

При дальнейшем изложении в качестве основной будем использовать А-форму.

Пример 8.1. Известны Z –параметры четырехполюсника. Найти его А-параметры.

Решение. Уравнения четырехполюсника формы Z в соответствии с позицией 4 табл.8.1 имеют вид

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2.$$

Решая эту систему уравнений относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, получаем систему уравнений формы А (поз.1 табл.8.1) и ее параметры $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ и $\underline{D}$. Для этого из второго уравнения формы Z имеем

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_{22}\dot{I}_2}{\underline{Z}_{21}} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}\dot{U}_2 - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\dot{I}_2.$$

Подставляя полученное значение $\dot{I}_1$ в первое уравнение, находим

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\left(\frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_{22}\dot{I}_2}{\underline{Z}_{21}}\right) + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 = \left(\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\right)\dot{U}_2 - \left(\frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{21}}\right)\dot{I}_2.$$

Сопоставляя полученные выражения для $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ с общим видом уравнений формы А и учитывая, что ток $\dot{I}_2$ в уравнениях формы А направлен в уравнениях формы Z в противоположную сторону и, следовательно, имеет обратный знак, находим, что

$$\underline{A} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{B} = \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{D} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}.$$

Для облегчения перехода от одной формы записи к другой можно использовать табл.8.2, в которой дана связь между параметрами четырехполюсника при различных формах записи его уравнений для принятых в табл.8.1 положительных направлений токов и напряжений.

Так, например, для перехода от формы Z к форме А находим с помощью табл.8.2 значения искомых параметров на пересечении вертикали Z и горизонтали А:

$$\underline{A} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{B} = \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{D} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}.$$

Как видим, полученный результат соответствует ранее выполненному расчету.

Пример 8.2. Воспользовавшись результатами примера 8.1, показать справедливость формулы (8.2).

Решение.

$$1. \quad \underline{BC} = \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{21}} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{(\underline{Z}_{21})^2} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}}{(\underline{Z}_{21})^2} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{(\underline{Z}_{21})^2}.$$

$$2. \underline{BD} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \cdot \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}}{(\underline{Z}_{21})^2}.$$

$$3. \underline{AD} - \underline{BC} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}}{(\underline{Z}_{21})^2} - \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}}{(\underline{Z}_{21})^2} + \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{(\underline{Z}_{21})^2} = 1,$$

так как в соответствии с формулами (8.3) $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$.

8.3. Входные сопротивления. Параметры холостого хода и короткого замыкания

Если источник энергии подключен к приемнику через четырехполусник, то режим работы источника зависит от сопротивления этого четырехполусника. Сопротивление четырехполусника со стороны входных зажимов найдем, поделив $\dot{U}_1$ на $\dot{I}_1$, т.е. разделив первое уравнение (8.1) на второе. Тогда, с учетом того, что комплексное напряжение на выходе $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_{H2}$, получим

$$\underline{Z}_{1BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2}{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2} + \frac{\underline{A}\dot{I}_2 \underline{Z}_{H2} + \underline{B}\dot{I}_2}{\underline{C}\dot{I}_2 \underline{Z}_{H2} + \underline{D}\dot{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}}. \quad (8.4)$$

Сопротивление четырехполусника со стороны выходных зажимов найдем, поделив $\dot{U}_2$ на $\dot{I}_2$, т.е. разделив первое уравнение (8.1a) на второе уравнение. Тогда с учетом того, что комплексное напряжение на входе $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{H1}$, имеем

$$\underline{Z}_{2BX} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{D}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1}{\underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1} = \frac{\underline{D}\dot{I}_1 \underline{Z}_{H1} + \underline{B}\dot{I}_1}{\underline{C}\dot{I}_1 \underline{Z}_{H1} + \underline{A}\dot{I}_1} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_{H1} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{H1} + \underline{A}}. \quad (8.5)$$

Из полученных соотношений следует, что входные сопротивления зависят как от параметров четырехполусника, так и от сопротивления нагрузки. Однако в частных случаях при отключенных (холостой ход-ХХ) и при закороченных (короткое замыкание – КЗ) приемниках входные сопротивления характеризуют только сам четырехполусник. Поэтому входные сопротивления четырехполусника при ХХ и КЗ можно также рассматривать в качестве его параметров.

В самом деле, при питании со стороны входных зажимов 1-1' в соответствии с формулой (8.4) имеем:

а) сопротивление на входе при ХХ на выходных зажимах ($\dot{I}_2 = 0$)

$$\underline{Z}_{1X} = \underline{A} / \underline{C}; \quad (8.6)$$

б) сопротивление на входе при КЗ на выходных зажимах ($\dot{U}_2 = 0$)

$$\underline{Z}_{1K} = \underline{B} / \underline{D}. \quad (8.7)$$

При питании со стороны выходных зажимов в соответствии с формулой (8.5) имеем:

в) сопротивление на выходных зажимах при ХХ на входе ($\dot{I}_1 = 0$)

$$\underline{Z}_{2X} = \underline{D} / \underline{C}; \quad (8.8)$$

г) сопротивление на выходных зажимах при КЗ на входе ($\dot{U}_1 = 0$)

$$\underline{Z}_{2K} = \underline{B} / \underline{A}. \quad (8.9)$$

Легко проверить, что эти четыре сопротивления связаны соотношением

$$\underline{Z}_{1X} / \underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_{2X} / \underline{Z}_{2K} = \underline{AD} / \underline{BC}. \quad (8.10)$$

8.4. Экспериментальное определение А-параметров

Если внутренняя структура четырехполюсника и сопротивления составляющих ее элементов известны, то параметры четырехполюсника можно найти расчетным путем. В противном случае они находятся экспериментально с помощью опытов холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ). При этом достаточно получить только три из указанных выше четырех уравнений*.

Используя опыты ХХ и КЗ при подключении источника к входным зажимам и опыт ХХ при подключении источника к выходным зажимам, получаем $\underline{Z}_{1K} = \underline{B} / \underline{D}$; $\underline{Z}_{1X} = \underline{A} / \underline{C}$; $\underline{Z}_{2X} = \underline{D} / \underline{C}$.

Решая эту систему уравнений относительно А-параметров, сначала находим разность $\left(1 - \frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}}\right) = \frac{\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}}$, которая может быть выражена через А-параметры:

$$\left(1 - \frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}}\right) = 1 - \frac{\underline{CB}}{\underline{DA}} = \frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{DA}} = \left(\frac{1}{\underline{DA}}\right).$$

Умножим левую и правую часть этого уравнения на $\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}} = \frac{\underline{D}}{\underline{A}}$ и получим

$$\frac{\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}} \cdot \frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}} = \frac{1}{\underline{A}^2},$$

откуда

$$\underline{A} = \frac{\underline{Z}_{1X}}{\sqrt{\underline{Z}_{2X}(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}}. \quad (8.11)$$

Из формулы (8.6) имеем

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1X}} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_{1X}}\right) \frac{\underline{Z}_{1X}}{\sqrt{\underline{Z}_{2X}(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{2X}(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}}. \quad (8.12)$$

Из формулы (8.8) находим, что

$$\underline{D} = \underline{Z}_{2X} \cdot \underline{C} = \frac{\underline{Z}_{2X}}{\sqrt{\underline{Z}_{2X}(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2X}}{(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}}. \quad (8.13)$$

Наконец, из формулы (8.7) получаем

$$\underline{B} = \underline{Z}_{1K} \underline{D} = \underline{Z}_{1K} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K}}}. \quad (8.14)$$

* Экспериментальное определение А-параметров пассивного четырехполюсника проводится в лабораторной работе №8 [8].

Заметим, что полученные формулы для А-параметров дают два набора решений: со знаком (+) и со знаком (–).

Пример 8.3. У несимметричного четырехполюсника со стороны входных зажимов были измерены действующие значения напряжений, токов и активные мощности при ХХ и КЗ на выходных зажимах. Затем при перемене местами входных и выходных зажимов были измерены действующие значения напряжения, тока и активная мощность со стороны выходных зажимов при ХХ на входных зажимах. Определить А-параметры четырехполюсника, если измерения показали

$$U_{1X} = 158,1 \text{ В}; I_{1X} = 10 \text{ А}; P_{1X} = 500 \text{ Вт}, \quad \varphi_{1X} > 0;$$

$$U_{1K} = 126,5 \text{ В}; I_{1K} = 10 \text{ А}; P_{1K} = 400 \text{ Вт}, \quad \varphi_{1K} > 0;$$

$$U_{2X} = 158,1 \text{ В}; I_{2X} = 10 \text{ А}; P_{2X} = 1500 \text{ Вт}, \quad \varphi_{2X} > 0.$$

Решение. 1. Положительные значения углов φ сдвига фаз между напряжением и током во всех опытах свидетельствуют о том, что исследуемый четырехполюсник имеет активно-индуктивную внутреннюю структуру.

2. Определяем комплексное сопротивление на входе четырехполюсника при ХХ на его выходных зажимах ($\dot{I}_2 = 0$)

$$\underline{Z}_{1X} = z_{1X} e^{j\varphi_{1X}} = 15,81 e^{j71,56^\circ} = (5 + j15) \text{ Ом},$$

$$\text{где } z_{1X} = \frac{U_{1X}}{I_{1X}} = 15,81 \text{ Ом}; \quad \varphi_{1X} = \arccos \frac{P_{1X}}{(U_{1X} \cdot I_{1X})} = 71,56^\circ.$$

3. Определяем комплексное сопротивление на входе четырехполюсника при КЗ на его выходных зажимах ($\dot{U}_2 = 0$)

$$\underline{Z}_{1K} = z_{1K} e^{j\varphi_{1K}} = 12,65 e^{j71,56^\circ} = (4 + j12) \text{ Ом},$$

$$\text{где } z_{1K} = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} = 12,65 \text{ Ом}, \quad \varphi_{1K} = \arccos \frac{P_{1K}}{(U_{1K} \cdot I_{1K})} = 71,56^\circ.$$

4. Определяем комплексное сопротивление на выходе четырехполюсника при ХХ на его входных зажимах

$$\underline{Z}_{2X} = z_{2X} e^{j\varphi_{2X}} = 15,81 e^{j18,44^\circ} = (15 + j5) \text{ Ом},$$

$$\text{где } z_{2X} = \frac{U_{2X}}{I_{2X}} = 15,81 \text{ Ом}; \quad \varphi_{2X} = \arccos \frac{P_{2X}}{(U_{2X} \cdot I_{2X})} = 18,44^\circ.$$

5. Определяем А-параметры четырехполюсника, воспользовавшись формулами (8.11–8.14):

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{\underline{Z}_{1X}}{\sqrt{\underline{Z}_{2X}(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}} = \frac{15,81 e^{j71,56^\circ}}{\sqrt{15,81 e^{j18,44^\circ} (1 + j3)}} = \frac{15,81 e^{j71,56^\circ}}{\sqrt{15,81 e^{j18,44^\circ} \cdot 3,16 e^{j71,56^\circ}}} = \\ &= \frac{15,81 e^{j71,56^\circ}}{\sqrt{50 e^{j90^\circ}}} = \frac{15,81 e^{j71,56^\circ}}{7,07 e^{j45^\circ}} = 2,24 e^{+j26,56^\circ} = (2 + j1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \underline{Z}_{1K} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K}}} = 12,65e^{j71,56^\circ} \cdot \sqrt{\frac{15,81e^{j18,44^\circ}}{3,16e^{j71,56^\circ}}} = 12,65e^{j71,56^\circ} \cdot \sqrt{5e^{-j53,12^\circ}} = \\ &= 12,65e^{j71,56^\circ} \cdot 2,24e^{-j26,56^\circ} = 28,34e^{-j45^\circ} = (20 + j20) \text{ Ом}; \\ \underline{C} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{2X}(\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K})}} = \frac{1}{\sqrt{50e^{j90^\circ}}} = \frac{1}{7,07e^{j45^\circ}} = 0,141e^{-j45^\circ} = (0,1 - j0,1) \text{ См}; \\ \underline{D} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X} - \underline{Z}_{1K}}} = \sqrt{\frac{15,81e^{j18,44^\circ}}{3,16e^{j71,56^\circ}}} = \sqrt{5e^{-j53,12^\circ}} = 2,24e^{-j26,56^\circ} = (1,6 - j1,6).\end{aligned}$$

6. Проверку расчетов осуществляем с помощью формулы (8.2)

$$\begin{aligned}\underline{AD} &= 2,24e^{j26,56^\circ} \cdot 2,24e^{-j26,56^\circ} = 5; \quad \underline{BC} = 28,34e^{j45^\circ} \cdot 0,141e^{-j45^\circ} = 4; \\ \underline{AD} - \underline{BC} &= 5 - 4 = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, расчеты произведены верно.

8.5. Схемы замещения. Соотношения между А-параметрами и параметрами схем замещения

Любой четырехполюсник может быть заменен простейшей трехэлементной схемой, поскольку он характеризуется тремя независимыми параметрами. Таких схем две: Т-образная (звезда), представленная на рис.8.2,а, и П-образная (треугольник), показанная на рис.8.2,б. Комплексные величины $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Y}_0$ и $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Z}_0$ являются параметрами указанных схем замещения.

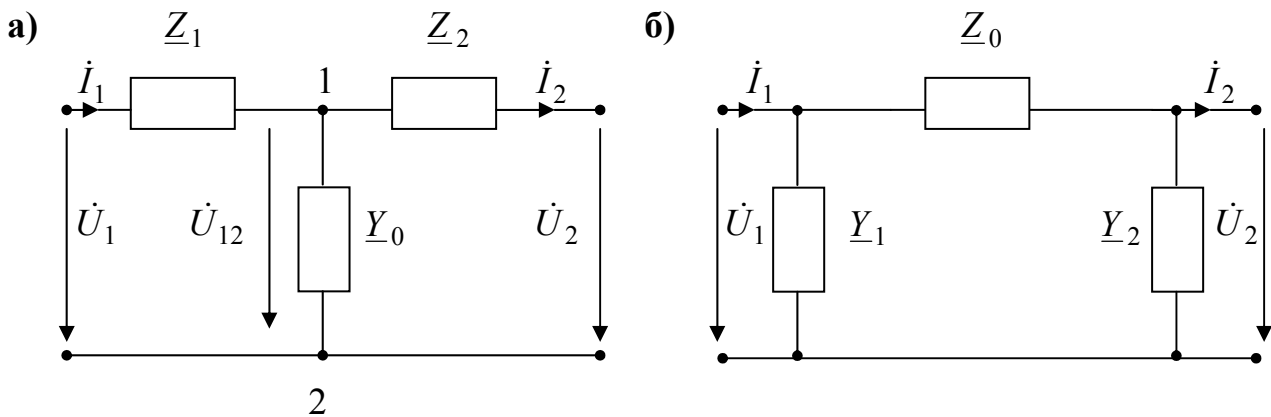


Рис.8.2

А-параметры четырехполюсника связаны с параметрами схем его замещения следующими соотношениями *.

а) для Т-образной схемы

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 \quad (8.15)$$

* Вывод этих уравнений имеется в [1 – 4].

$$\text{или } \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}}; \quad \underline{Y}_0 = \underline{C}; \quad (8.15 \text{ а})$$

б) для П-образной схемы

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1; \quad \underline{B} = \underline{Z}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2 \quad (8.16)$$

$$\text{или } \underline{Z}_0 = \underline{B}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{B}}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}}. \quad (8.16 \text{ а})$$

Пример 8.4. Известны комплексные сопротивления $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ и комплексная проводимость $\underline{Y}_0$ элементов Т-образной схемы (рис.8.2,а): $\underline{Z}_1 = -j2000 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = -j1000 \text{ Ом}; \quad \underline{Y}_0 = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См}.$ Определить А-параметры эквивалентного четырехполюсника.

Решение. Воспользовавшись формулами (8.15), получаем:

$$1. \underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0 = 1 + [(-j2000)(-j2 \cdot 10^{-4})] = 1 - 0,4 = 0,6;$$

$$2. \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = (-j2000) + (-j1000) + [(-j2000)(-j1000)(-j2 \cdot 10^{-4})] = -j3000 + j400 = -j2600 \text{ Ом};$$

$$3. \underline{C} = \underline{Y}_0 = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$4. \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = 1 + [(-j1000)(-j2 \cdot 10^{-4})] = 1 - 0,2 = 0,8.$$

5. Проверка по соотношению $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1$ показывает, что задача решена верно. Предоставляем читателю возможность убедиться в этом самостоятельно.

Пример 8.5. Известны А-параметры четырехполюсника: $\underline{A}=0,6$; $\underline{B}= -j2600 \text{ Ом}; \underline{C} = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См}; \underline{D} = 0,8.$ Определить параметры Т-образной схемы замещения.

Решение. Воспользуемся формулами (8.15,а) и получаем:

$$1. \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = \frac{0,6-1}{-j2 \cdot 10^{-4}} = \frac{-0,4 \cdot 10^4}{-j2} = -j2000 \text{ Ом};$$

$$2. \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}} = \frac{0,8-1}{-j2 \cdot 10^{-4}} = \frac{-0,2 \cdot 10^4}{-j2} = -j1000 \text{ Ом};$$

$$3. \underline{Y}_0 = \underline{C} = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См} \quad \text{или} \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_0} = +j5000 \text{ Ом}.$$

Физическими элементами $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ являются емкости, а физическим элементом $\underline{Y}_0$ – индуктивность.

Пример 8.6. Известны А-параметры четырехполюсника предыдущего примера: $\underline{A}=0,6$; $\underline{B}= -j2600 \text{ Ом}; \underline{C} = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См}; \underline{D} = 0,8.$ Определить параметры П-образной схемы замещения.

Решение. Воспользуемся формулами (8.16 а) и получаем:

$$1. \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{B}} = \frac{0,8-1}{-j2600} = -j77 \cdot 10^{-6} \text{ См};$$

$$2. \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}} = \frac{0,6-1}{-j2600} = -j154 \cdot 10^{-6} \text{ См};$$

3. $\underline{Z}_0 = \underline{B} = -j2600 \text{ Ом.}$

Физическими элементами $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$ здесь являются индуктивности, а физическим элементом $\underline{Z}_0$ – емкость.

8.6. Характеристические параметры. Их связь с А-параметрами

Наряду с рассмотренными выше А-параметрами широко используются так называемые *характеристические параметры четырехполюсника*. Ими являются характеристические сопротивления $\underline{Z}_{1C}$, $\underline{Z}_{2C}$ и постоянная передачи $\underline{g}$.

Всегда можно найти такие два сопротивления, которые удовлетворяли следующим условиям (рис.8.3): входное сопротивление четырехполюсника равно $\underline{Z}_{1C}$, если он нагружен сопротивлением $\underline{Z}_{2C}$; выходное сопротивление четырехполюсника равно $\underline{Z}_{2C}$, если он нагружен сопротивлением $\underline{Z}_{1C}$. Эти сопротивления называются *характеристическими сопротивлениями четырехполюсника*.

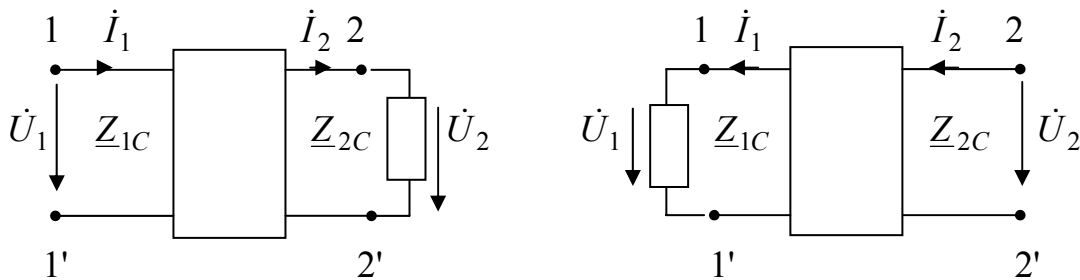


Рис.8.3

Подробный анализ показывает, что связь источника с нагрузкой является наиболее выгодной, если комплексное сопротивление нагрузки $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{2C}$. Этот режим работы называют *режимом согласованной нагрузки* или согласованного включения. При таком режиме работы

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_{1C}; \quad \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_{2C}. \quad (8.17)$$

Характеристические сопротивления определенным образом связаны с А-параметрами. Положив в уравнениях (8.4) и (8.5) $\underline{Z}_{1BX} = \underline{Z}_{1C}$ и $\underline{Z}_{2BX} = \underline{Z}_{2C}$, получим

$$\underline{Z}_{1C} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{2C} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{2C} + \underline{D}}; \quad \underline{Z}_{2C} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_{1C} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{1C} + \underline{A}}. \quad (8.18)$$

Совместное решение этих уравнений относительно $\underline{Z}_{1C}$ и $\underline{Z}_{2C}$ дает следующий результат:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}\underline{B}}{\underline{C}\underline{D}}}; \quad \underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{D}\underline{B}}{\underline{C}\underline{A}}}. \quad (8.19)$$

Параметров $\underline{Z}_{1C}$ и $\underline{Z}_{2C}$ недостаточно для описания всех свойств несимметричного четырехполюсника. Для этого необходимо ввести еще один, третий параметр, связывающий процессы на входе и выходе

четырёхполосника. Таким параметром является *постоянная передачи* $\underline{g}$. В общем случае – это комплексное число $\underline{g} = \alpha + j\beta$. Его вещественная часть (α) называется *собственным затуханием* четырёхполосника и измеряется в неперах. Мнимая его часть (β) называется *коэффициентом фазы* и измеряется в радианах.

Постоянная передачи $\underline{g}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{ch} \underline{g} = \sqrt{\underline{AD}}; \quad \operatorname{sh} \underline{g} = \sqrt{\underline{BC}}. \quad (8.20)$$

Они всегда выполняются, так как имеющая место связь между коэффициентами $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ соответствует тригонометрической формуле *

$$\operatorname{ch}^2 \underline{g} - \operatorname{sh}^2 \underline{g} = 1.$$

Постоянную передачи $\underline{g}$ можно выразить через А-параметры четырёхполосника, если вспомнить, что $\operatorname{ch} \underline{g} + \operatorname{sh} \underline{g} = e^{\underline{g}}$. Подставив в эту формулу соотношения (8.20), получаем

$$e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}} \quad \text{или} \quad \underline{g} = \ln(\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}}). \quad (8.21)$$

Таким образом, формулы (8.19) и (8.21) дают возможность выразить характеристические параметры четырёхполосника через его А-параметры.

В свою очередь, А-параметры четырёхполосника могут быть выражены через его характеристические параметры. На основании (8.19) имеем

$$\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}} = \frac{\underline{A}}{\underline{D}}; \quad \underline{Z}_{1C} \cdot \underline{Z}_{2C} = \frac{\underline{B}}{\underline{C}}. \quad (8.22)$$

Совместное решение уравнений (8.20) и (8.22) дает

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \cdot \operatorname{ch} \underline{g}; & \underline{B} &= \sqrt{\underline{Z}_{1C} \cdot \underline{Z}_{2C}} \cdot \operatorname{sh} \underline{g}; \\ \underline{D} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \cdot \operatorname{ch} \underline{g}; & \underline{C} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1C} \cdot \underline{Z}_{2C}}} \cdot \operatorname{sh} \underline{g}. \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Характеристические параметры могут быть выражены также и через параметры холостого хода и короткого замыкания. На основании (8.6–8.9), (8.19) и (8.20) получаем

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\underline{Z}_{1X} \cdot \underline{Z}_{1K}}; \quad \underline{Z}_{2C} = \sqrt{\underline{Z}_{2X} \cdot \underline{Z}_{2K}}; \quad \operatorname{th} \underline{g} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{2X}}}. \quad (8.24)$$

Пример 8.7. Для четырёхполосника примера 8.5 по известным А-параметрам: $\underline{A}=0,6$; $\underline{B} = -j2600$ Ом; $\underline{C} = -j2 \cdot 10^{-4}$; $\underline{D} = 0,8$, найти его характеристические параметры $\underline{Z}_{1C}$, $\underline{Z}_{2C}$ и $\underline{g}$.

* Справочник по математике, п. 2.5.2.3.1 [9].

Решение. Находим характеристические параметры четырехполосника, воспользовавшись формулами (8.19) и (8.21):

$$1. \underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{AB}}{\underline{CD}}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot (-j2600)}{(-j2 \cdot 10^{-4}) \cdot 0,8}} = \sqrt{\frac{-j1560}{-j1,6 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{-1560 \cdot 10^{+4}}{-1,6}} = \\ = \sqrt{975 \cdot 10^{+4}} = 3122 \text{ Ом.}$$

$$2. \underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{DB}}{\underline{CA}}} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot (-j2600)}{(-j2 \cdot 10^{-4}) \cdot 0,6}} = \sqrt{\frac{-j2080}{-j1,2 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{2080 \cdot 10^{+4}}{1,2}} = \\ = \sqrt{1730 \cdot 10^{+4}} = 41,63 \cdot 10^2 = 4163 \text{ Ом.}$$

$$3. \underline{e}^{\underline{g}} = e^{\alpha} e^{j\beta} = [\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}}] = [\sqrt{0,6 \cdot 0,8} + \sqrt{(-j2600)(-j2 \cdot 10^{-4})}] = \\ = (\sqrt{0,48} + \sqrt{-0,52}) = 0,6928 + j0,7211 = 1e^{j46^\circ}.$$

Таким образом: $e^{\alpha} = 1$ и $e^{j\beta} = e^{j46^\circ}$. Отсюда $\alpha = \ln 1 = 0$ непер; $\beta = 46^\circ$ или $\beta = 0,8$ радиан. Поэтому постоянная передачи $\underline{g} = (0 + j0,8)$.

4. Проверку расчетов осуществим, перейдя от характеристических параметров вновь к А-параметрам четырехполосника. Для этого воспользуемся формулами (8.23). В этих формулах:

$$a) \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} = \sqrt{\frac{3122}{4163}} = \sqrt{0,75} = 0,866;$$

$$б) \sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}} = \sqrt{3122 \cdot 4163} = \sqrt{12996886} = 3605;$$

$$с) \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} = \sqrt{1,333} = 1,156.$$

Для определения гиперболических синуса и косинуса воспользуемся следующими формулами*:

$$\operatorname{sh} \underline{g} = \frac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{2}; \quad \operatorname{ch} \underline{g} = \frac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2}.$$

$$\text{Здесь } e^{\underline{g}} = e^{j46^\circ} = \cos 46^\circ + j \sin 46^\circ = 0,693 + j0,721;$$

$$e^{-\underline{g}} = e^{-j46^\circ} = 0,693 - j0,721.$$

$$\text{Поэтому } \operatorname{sh} \underline{g} = \frac{(0,693 + j0,721) - (0,693 - j0,721)}{2} = \frac{j1,442}{2} = j0,721;$$

$$\operatorname{ch} \underline{g} = \frac{(0,693 + j0,721) + (0,693 - j0,721)}{2} = \frac{1,386}{2} = 0,693.$$

Таким образом:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \cdot \operatorname{ch} \underline{g} = 0,866 \cdot 0,693 = 0,6;$$

* Справочник по математике, п. 2.5.2.3.1 [9].

$$\underline{B} = \sqrt{\underline{Z}_{1C} \cdot \underline{Z}_{2C}} \cdot \operatorname{sh} \underline{g} = 3605 \cdot j0,721 = j2600;$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1C} \cdot \underline{Z}_{2C}}} \cdot \operatorname{sh} \underline{g} = \frac{1}{3605} j0,721 = j0,0002 = j2 \cdot 10^{-4};$$

$$\underline{D} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \cdot \operatorname{ch} \underline{g} = 1,156 \cdot 0,693 = 0,8.$$

Заметим, что каждый из А-параметров четырехполюсника, определяемый по формулам (8.23), может иметь как знак (+), так и знак (–). Поэтому в нашем случае проверка решения возможна только для абсолютных значений параметров.

8.7. Уравнения в гиперболической форме записи

Подставим полученные в предыдущем пункте значения А-параметров (8.23), выраженные через гиперболические синус и косинус в уравнения (8.1), и получим $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, выраженные через характеристические параметры

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{g} + \sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \underline{g} = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{g} + \underline{Z}_{2C} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \underline{g}); \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}}} \left(\dot{U}_2 \operatorname{sh} \underline{g} + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{g} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \left(\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{2C}} \operatorname{sh} \underline{g} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{g} \right). \end{aligned} \quad (8.25 \text{ a})$$

Уравнения четырехполюсника в гиперболической форме записи широко применяются в радиотехнике и автоматике, в частности при описании электрических фильтров.

При согласованном режиме, когда $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{2C}$ и напряжение на его выходных зажимах $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_{2C}$, уравнения (8.24) значительно упрощаются:

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 (\operatorname{ch} \underline{g} + \operatorname{sh} \underline{g}); \quad \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \dot{I}_2 (\operatorname{sh} \underline{g} + \operatorname{ch} \underline{g}).$$

Из курса математики известно, что $\operatorname{ch} \underline{g} + \operatorname{sh} \underline{g} = e^{\underline{g}}$ и тогда

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 e^{\underline{g}}; \quad \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \dot{I}_2 e^{\underline{g}}; \quad (8.26)$$

или

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} e^{\underline{g}}; \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} e^{\underline{g}}. \quad (8.27)$$

8.8. Экспериментальное определение собственного затухания и коэффициента фазы

Формулы (8.27) позволяют найти соотношения для экспериментального определения собственного затухания (α) и коэффициента фазы (β) четырехполосника. Рассмотрим в начале формулу (8.27) для напряжений.

Левая часть этой формулы

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}}} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})}. \quad (8.27 \text{ а})$$

Здесь U_1 / U_2 - отношение действующих значений напряжений на входе и выходе четырехполосника при согласованной нагрузке; $(\psi_{u1} - \psi_{u2})$ - разность начальных фаз напряжений на входе и выходе четырехполосника при согласованной нагрузке.

Правая часть этой формулы

$$\sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} e^g = \sqrt{\frac{z_{1C} e^{j\varphi_{1C}}}{z_{2C} e^{j\varphi_{2C}}}} e^{(\alpha + j\beta)} = \sqrt{\frac{z_{1C}}{z_{2C}}} e^{j(\varphi_{1C} - \varphi_{2C})} e^{(\alpha + j\beta)}. \quad (8.27 \text{ б})$$

Здесь z_{1C} / z_{2C} - отношение модулей характеристических сопротивлений; φ_{1C} и φ_{2C} - аргументы характеристических сопротивлений, определяющие углы сдвига фаз между напряжением и током на входе и выходе четырехполосника при согласованной нагрузке; $(\varphi_{1C} - \varphi_{2C})$ - разность фазовых сдвигов между напряжением и током на входе и выходе четырехполосника при согласованной нагрузке.

Сопоставляя формулы (8.27 а) и (8.27 б) и учитывая, что два комплексных числа равны друг другу, когда по отдельности равны их модули и равны их аргументы *, получаем:

$$\text{уравнение для модулей} \quad \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{z_{1C}}{z_{2C}}} e^\alpha; \quad (8.28)$$

$$\text{уравнение для аргументов} \quad (\psi_{U1} - \psi_{U2}) = \beta + \frac{1}{2}(\varphi_{1C} - \varphi_{2C}). \quad (8.29)$$

Произведя аналогичные преобразования для токов, находим:

$$\text{уравнение для модулей} \quad \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{z_{2C}}{z_{1C}}} \cdot e^\alpha; \quad (8.30)$$

$$\text{уравнение для аргументов} \quad (\psi_{i1} - \psi_{i2}) = \beta - \frac{1}{2}(\varphi_{1C} - \varphi_{2C}). \quad (8.31)$$

Для нахождения собственного затухания (α) умножаем (8.28) на (8.30) и получаем $e^{2\alpha} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{S_1}{S_2}$, где $S_1 = U_1 I_1$ - полная мощность четырехполосника на его входных зажимах, а $S_2 = U_2 I_2$ - полная мощность на его выходных зажимах. Отсюда следует, что

* Справочник по математике, разд.3.4 [9].

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right) \text{ Нп.} \quad (8.32)$$

Напомним, что при экспериментальном определении собственного затухания (α) с использованием формулы (8.32) надо вначале согласовать четырехполусник с нагрузкой (положить $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{2C}$), а затем измерить полные мощности на его входе (S_1) и на выходе (S_2). Если, например, для четырехполусника, согласованного с нагрузкой $S_1/S_2 = e$, то $\alpha = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5 \text{ Нп}$, а если $S_1/S_2 = 10$, то $\alpha = \frac{1}{2} \ln 10 = \frac{1}{2} \cdot 2,3 = 1,15 \text{ Нп}$.

Для нахождения коэффициента фазы (β) складываем левые и правые части уравнений (8.29) и (8.31) и находим

$$2\beta = (\psi_{u1} - \psi_{u2}) + (\psi_{i1} - \psi_{i2}) \quad \text{или} \quad \beta = \frac{(\psi_{u1} - \psi_{u2}) + (\psi_{i1} - \psi_{i2})}{2}. \quad (8.33)$$

Очевидно, что полученные значения α и β , являясь параметрами четырехполусника, не зависят от того, согласован ли он с нагрузкой или нет.

Пример 8.8. Дан четырехполусник с известными А-параметрами: $\underline{A} = 1$, $\underline{B} = 5 \text{ Ом}$, $\underline{C} = j0,2 \text{ См}$. Определить собственное затухание α и коэффициент фазы β этого четырехполусника, используя комплексные токи и напряжения на входе и выходе четырехполусника при согласованной нагрузке.

Решение. 1. Находим параметр $\underline{D}$:

$$\underline{D} = \frac{1 + \underline{BC}}{\underline{A}} = \frac{1 + 5 \cdot 0,2e^{j90^\circ}}{1} = 1 + j1 = 1,41e^{j45^\circ}.$$

2. Находим характеристическое сопротивление

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{DB}}{\underline{CA}}} = \sqrt{\frac{1,41e^{j45^\circ} \cdot 5}{0,2e^{j90^\circ} \cdot 1}} = 6e^{-j22,5^\circ} \text{ Ом.}$$

3. Нагружаем четырехполусник со стороны выходных зажимов сопротивлением $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{2C} = 6e^{-j22,5^\circ} \text{ Ом}$.

4. Полагаем (произвольно) напряжение $\dot{U}_2 = 60e^{-j22,5^\circ} \text{ В}$. Тогда ток на выходе четырехполусника $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_{2C} = 10e^{j0} = 10 \text{ А}$. Здесь $\psi_{i2} = 0$.

5. Находим напряжение $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ на входе, используя систему уравнений (8.1):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = 1 \cdot 60e^{-j22,5^\circ} + 5 \cdot 10 = (54,9 - j22,7) + 50 = \\ &= 104,9 - j22,7 = 107,3e^{-j12,2^\circ} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2 = 0,2e^{+j90^\circ} \cdot 60e^{-j22,5^\circ} + 1,41e^{j45^\circ} \cdot 10 = 12e^{j67,5^\circ} + 14,1e^{j45^\circ} = \\ &= (4,59 + j11,09) \cdot (10 + j10) = 14,59 + j21,1 = 25,6e^{j55,3^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Для проверки этих вычислений найдем входное сопротивление четырехполюсника

$$\underline{Z}_{1BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{107,3e^{-j12,2^\circ}}{25,65e^{j55,3^\circ}} = 4,2e^{-j67,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Сопротивление четырехполюсника, согласованного с нагрузкой (8.17), должно соответствовать характеристическому сопротивлению $\underline{Z}_{1C}$, которое определяется формулой (8.19) :

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{\frac{5}{j0,2 \cdot 1,41e^{j45^\circ}}} = \sqrt{17,24e^{-j135^\circ}} = 4,2e^{-j67,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Таким образом, наши расчеты произведены верно.

6. Находим отношение полных мощностей на входе и выходе

$$S_1 = U_1 I_1 = 107,3 \cdot 25,65 = 2752 \text{ В} \cdot \text{А}; \quad S_2 = U_2 I_2 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Тогда $S_1 / S_2 = 2752 / 600 = 4,59$.

7. Определяем собственное затухание α , воспользовавшись формулой

$$(8.32): \alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right) = \frac{1}{2} \ln 4,59 = \frac{1}{2} \cdot 1,52 = 0,76 \text{ Нп.}$$

8. Определяем коэффициент фазы β , используя формулу (8.33) :

$$\psi_{u1} = -12,2^\circ; \quad \psi_{u2} = -22,5^\circ; \quad \psi_{u1} - \psi_{u2} = (-12,2^\circ) - (-22,5^\circ) = +10,3^\circ;$$

$$\psi_{i1} - \psi_{i2} = 55,3^\circ - (0) = 55,3^\circ.$$

$$\beta = \frac{(\psi_{u1} - \psi_{u2}) + (\psi_{i1} - \psi_{i2})}{2} = \frac{+10,3^\circ - 55,3^\circ}{2} = \frac{-45^\circ}{2} = -22,5^\circ$$

или $\beta = -0,3925 \text{ рад.}$

Пример 8.9. В условиях примера 8.8 определить характеристические параметры четырехполюсника $\underline{Z}_{1C}$, $\underline{Z}_{2C}$ и $\underline{g}$ с помощью данных опытов ХХ и КЗ.

Решение. **1.** Находим сопротивление холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ), используя формулы (8.6 – 8.9) :

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} = \frac{5}{1,41e^{j45^\circ}} = 3,55e^{-j45^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{1X} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = \frac{1}{0,2e^{j90^\circ}} = 5e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{5}{1} = 5 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{2X} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} = \frac{1,41e^{j45^\circ}}{0,2e^{j90^\circ}} = 7,05e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Находим характеристические сопротивления $\underline{Z}_{1C}$ и $\underline{Z}_{2C}$, воспользовавшись формулами (8.24):

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\underline{Z}_{1X} \underline{Z}_{1K}} = \sqrt{3,55e^{-j45^\circ} \cdot 5e^{-j90^\circ}} = \sqrt{17,75e^{-j135^\circ}} = 4,2e^{-j67,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\underline{Z}_{2X} \underline{Z}_{2K}} = \sqrt{7,05e^{-j45^\circ} \cdot 5} = \sqrt{35,25e^{-j45^\circ}} \approx 6e^{-j22,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Заметим, что полученные здесь значения $\underline{Z}_{1C}$ и $\underline{Z}_{2C}$ практически совпали с результатами расчетов этих величин другим способом в примере 8.8.

3. Находим постоянную передачи $\underline{g}$:

$$\operatorname{th} \underline{g} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{1X}}} = \sqrt{\frac{3,55e^{-j45^\circ}}{5e^{-j90^\circ}}} = 0,71e^{j45^\circ} = (0,78 + j0,32).$$

Известно, что гиперболический тангенс равен отношению гиперболического синуса ($\operatorname{sh} \underline{g}$) к гиперболическому косинусу ($\operatorname{ch} \underline{g}$). В свою

очередь, * $\operatorname{sh} \underline{g} = \frac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{2}$ и $\operatorname{ch} \underline{g} = \frac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2}$.

Тогда $\operatorname{th} \underline{g} = \frac{\operatorname{sh} \underline{g}}{\operatorname{ch} \underline{g}} = \frac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}} \left(\frac{e^{\underline{g}}}{e^{\underline{g}}} \right) = \frac{e^{2\underline{g}} - 1}{e^{2\underline{g}} + 1}$. Решая полученное уравнение

относительно $e^{2\underline{g}}$, получаем $e^{2\underline{g}} = \frac{1 + \operatorname{th} \underline{g}}{1 - \operatorname{th} \underline{g}}$. Подставляя сюда численные

значения $\operatorname{th} \underline{g}$, находим

$$e^{2\underline{g}} = \frac{1 + (0,78 + j0,32)}{1 - (0,78 + j0,32)} = \frac{1,78 + j0,32}{0,22 - j0,32} = \frac{1,81e^{j10,2^\circ}}{0,39e^{j55,5^\circ}} = 4,63e^{-j45,3^\circ},$$

но $\underline{g} = \alpha + j\beta$, поэтому $e^{2\underline{g}} = e^{2\alpha} e^{j2\beta}$. Отсюда $e^{2\alpha} = 4,63$ или

$$\alpha = 1/2 \ln 4,63 = 0,766 \text{ Нп}; e^{j2\beta} = -e^{-j45,3^\circ}, \beta = -22,15^\circ \text{ или } \beta = -0,3864 \text{ рад.}$$

Заметим, что полученные результаты соответствуют (с учетом точности расчетов) результатам примера 8.8.

8.9. Передаточные функции

Передаточной функцией называется зависимость от частоты отношения комплексных действующих значений электрических величин на выходе и входе четырехполюсника.

Если передаточная функция соответствует отношению двух одноименных электрических величин, то ее называют *коэффициентом передачи*. В усилительных устройствах коэффициент передачи является коэффициентом усиления по току или по напряжению:

$$\underline{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}; \quad \underline{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}. \quad (8.34)$$

Если передаточная функция соответствует отношению разноименных электрических величин, то она является либо *передаточным сопротивлением*, либо *передаточной проводимостью*:

* Справочник по математике, разд. 2.5 [9].

$$\underline{Z}_{пер} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}; \quad \underline{Y}_{пер} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}. \quad (8.35)$$

Зависимости модулей всех указанных отношений от частоты называются *амплитудно-частотными характеристиками* четырехполюсника, а зависимости аргументов этих отношений от частоты – *фазочастотными характеристиками* четырехполюсника. Эти характеристики широко используются для описания работы многих устройств автоматики и радиотехники.

Пример 8.10. Выразить передаточные функции четырехполюсника через его А-параметры.

Решение. При выводе искомых соотношений воспользуемся уравнениями четырехполюсника в А-форме записи, применив формулы (8.1).

1. Находим коэффициент передачи по напряжению. Для этого поделим левую и правую часть первого уравнения (8.1) на напряжение $\dot{U}_2$:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_{H2}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}}{\underline{Z}_{H2}},$$

где $\underline{Z}_{H2}$ – сопротивление нагрузки, включенное со стороны выходных зажимов.

Тогда $K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}}.$

2. Находим коэффициент передачи по току, для чего поделим второе уравнение (8.1) на ток $\dot{I}_2$: $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = \underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}.$

Тогда $K_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}}.$

3. Находим передаточное сопротивление четырехполюсника. С этой целью поделим второе уравнение (8.1) на напряжение $\dot{U}_2$:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \underline{C} + (\underline{D}/\underline{Z}_{H2}) = \frac{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}}{\underline{Z}_{H2}}.$$

При этом $\underline{Z}_{пер} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}}.$

4. Находим передаточную проводимость четырехполюсника. Для этого разделим первое уравнение (8.1) на ток $\dot{I}_2$: $\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = \underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}.$

Тогда $\underline{Y}_{пер} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}}.$

Пример 8.11. Дан четырехполюсник, показанный на рис.8.4. Сопротивление $Z_0 = j\omega L$ известно. Определить передаточные функции этого четырехполюсника, если он нагружен на сопротивление $\underline{Z}_{H2} = R$.

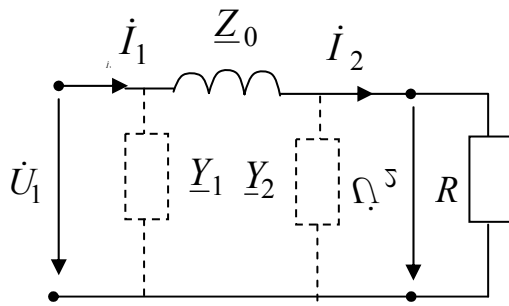


Рис.8.4

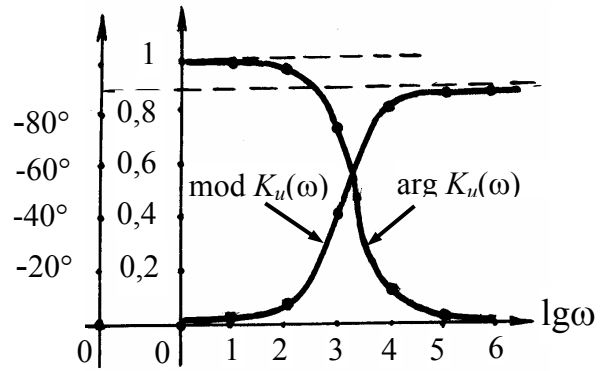


Рис.8.5

Решение. 1. В начале определяем А-параметры четырехполюсника. Будем считать, что этот четырехполюсник имеет Π -образную схему, у которой $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = 0$, а $\underline{Z}_0 = j\omega L$. Тогда, в соответствии с формулами (8.16), получаем $\underline{A} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 = 1$; $\underline{B} = \underline{Z}_0 = j\omega L$ Ом; $\underline{C} = 0$ См; $\underline{D} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2 = 1$.

2. Определяем передаточные функции четырехполюсника, выраженные через А-параметры (пример 8.10):

$$\text{а) } K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}};$$

$$\text{б) } K_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{в) } \underline{Z}_{nep} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{D}} = \frac{R}{0 + 1} = R;$$

$$\text{г) } \underline{Y}_{nep} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 \cdot e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Заметим, что эти соотношения легко проверить, исходя непосредственно из схемы этого простейшего четырехполюсника.

Пример 8.12. Рассчитать и построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики коэффициента передачи по напряжению K_u четырехполюсника, рассмотренного в примере 8.11.

Решение. Модуль и аргумент K_u в соответствии с результатами примера 8.11 имеют вид $\text{mod } K_u = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$; $\arg K_u = -\arctg \frac{\omega L}{R}$.

Зависимость модуля K_u от частоты — это амплитудно-частотная характеристика, а зависимость аргумента K_u от частоты — фазочастотная

характеристика. Они представлены на рис.8.5 для $R = 100$ Ом и $L = 0,1$ Гн. Результаты расчетов сведены в табл.8.3.

Т а б л и ц а 8.3

Зависимости $\text{mod } K_u$ $\arg K_u$ от частоты ω

$\lg \omega$	0	1	2	3	4	5	6
ω (1/с)	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\text{mod } K_u$	1	1	0,995	0,707	0,1	0,01	0,001
$\arg K_u$ (град)	0,06	0,6	5,7	45	84,3	89,4	89,9

8.10. Симметричные четырехполюсники

Четырехполюсник, у которого перемена местами входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в присоединенных цепях, называется *симметричным*.

У симметричного четырехполюсника параметр $\underline{A} = \underline{D}$, и тогда уравнения (8.1) и (8.1a) становятся одинаковыми. При этом $\underline{A}^2 - \underline{B}\underline{C} = 1$. У такого четырехполюсника число независимых параметров равно двум. Все ранее полученные соотношения, характеризующие несимметричный четырехполюсник, справедливы и для симметричного при условии, что $\underline{A} = \underline{D}$. Основные его характеристики приведены в табл.8.4.

Т а б л и ц а 8.4

Основные свойства и характеристики симметричных
четырехполюсников

№ п/п	Характеристики или свойства	Аналитические выражения характеристик
1	Соотношение между А-параметрами	$\underline{A} = \underline{D}; \quad \underline{A}^2 - \underline{B}\underline{C} = 1$
2	Уравнение четырехполюсника в А и В-формах записи	$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{A}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= \underline{A}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 &= \underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1 \end{aligned} \right\}$
3	Входные сопротивления	$\underline{Z}_{1BX} = \underline{Z}_{2BX} = \underline{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{A}}$
4	Данные опытов ХХ и КЗ и связь между ними	$\underline{Z}_X = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_K = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}; \quad \frac{\underline{Z}_X}{\underline{Z}_K} = \frac{\underline{A}^2}{\underline{B}\underline{C}}$

Окончание табл.8.4

5	Связь параметров схем замещения с А-параметрами: а) для <u>Т-образной схемы</u> (рис.8.2,а) б) для <u>Π-образной схемы</u> (рис.8.2,б)	а) $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}} ; \quad \underline{Y}_0 = \underline{C} ;$ $\underline{A} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_0 ; \quad \underline{B} = 2\underline{Z} + \underline{Z}^2 \underline{Y}_0 ; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0$ б) $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}} ; \quad \underline{Z}_0 = \underline{B} ;$ $\underline{A} = 1 + \underline{Y}\underline{Z}_0 ; \quad \underline{B} = \underline{Z}_0 ; \quad \underline{C} = 2\underline{Y} + \underline{Y}^2 \underline{Z}_0$
6	Характеристическое (повторное) сопротивление и постоянная передачи (коэффициент распространения)	$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} ; \quad \underline{g} = \alpha + j\beta ; \quad e^{\underline{g}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}$
7	Выражение А-параметров через характеристические	$\underline{A} = \operatorname{ch} \underline{g} ; \quad \underline{B} = \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{g} ; \quad \underline{C} = \frac{\operatorname{sh} \underline{g}}{\underline{Z}_C}$
8	Выражение характеристических параметров через данные ХХ и КЗ	$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_X \underline{Z}_K} ; \quad \operatorname{th} \underline{g} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_K}{\underline{Z}_X}}$
9	Уравнения в гиперболической форме записи при произвольной нагрузке	$\dot{U}_1 = \operatorname{ch} \underline{g} \dot{U}_2 + \operatorname{sh} \underline{g} \underline{Z}_C \dot{I}_2 ;$ $\dot{I}_1 = \frac{\operatorname{ch} \underline{g}}{\underline{Z}_C} \dot{U}_2 + \operatorname{sh} \underline{g} \dot{I}_2$
10	Уравнение в гиперболической форме записи при согласованной нагрузке ($\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_C$ и $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_C$)	$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\underline{g}} ; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\underline{g}}$ или $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^{\underline{g}} ; \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\underline{g}}$
11	Коэффициент затухания (собственное затухание) α	$\frac{U_1}{U_2} = e^{\alpha} ; \quad \frac{I_1}{I_2} = e^{\alpha}$
12	Коэффициент фазы (β)	$\beta = (\psi_{u1} - \psi_{u2}) - (\psi_{i1} - \psi_{i2})$
13	Коэффициент передачи по напряжению	$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}$
14	Коэффициент передачи по току	$K_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{A}}$
15	Передаточное сопротивление	$\underline{Z}_{nep} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{A}}$
16	Передаточная проводимость	$\underline{Y}_{nep} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}$

Пример 8.13. Дан симметричный четырехполюсник, имеющий Т-образную структуру (рис.8.6,а). Сопротивления его элементов известны: $\underline{Z}=R=100$ Ом; $\underline{Y}_0 = j5 \cdot 10^{-3}$ См. Требуется определить: 1) А-параметры четырехполюсника; 2) параметры П-образной схемы его замещения; 3) характеристические параметры; 4) ток и напряжение на входе четырехполюсника по известному напряжению на выходе при согласованной нагрузке; 5) переходные функции этого четырехполюсника.

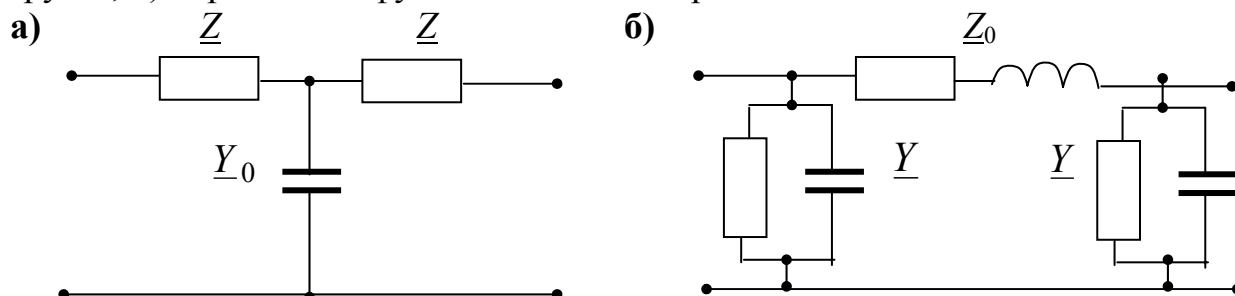


Рис.8.6

Решение. 1. Находим А-параметры, используя формулы позиции 5 табл.8.4 : $\underline{A} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_0 = 1 + j5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = (1 + j0,5) = 1,12e^{j26,5^\circ}$;

$$\underline{B} = 2\underline{Z} + \underline{Z}^2 \underline{Y}_0 = 2R + R^2 \underline{Y}_0 = 200 + 10000 \cdot j5 \cdot 10^{-3} = (200 + j50) = 206e^{j14^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{C} = \underline{Y}_0 = +j5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \text{ См.}$$

Проверку правильности этих вычислений можно произвести, вновь определив параметры Т-образной схемы замещения по известным А-параметрам (табл.8.4). Предоставляем читателю возможность проделать это самостоятельно и получить вышенайденные значения $\underline{A}$, $\underline{B}$ и $\underline{C}$.

2. Находим параметры П-образной схемы замещения четырехполюсника в соответствии с формулами поз.5 из табл.8.4

$$\underline{Z}_0 = \underline{B} = 200 + j50 = 206e^{j14^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}} = \frac{(1 + j0,5) - 1}{206e^{j14^\circ}} = \frac{0,5e^{j90^\circ}}{206e^{j14^\circ}} = 2,43 \cdot 10^{-3} e^{j76^\circ} = (6,58 \cdot 10^{-3} + j2,36 \cdot 10^{-3}) \text{ См.}$$

Заметим, что элемент $\underline{Z}_0$ состоит из последовательного соединения активного и индуктивного сопротивлений, а элемент $\underline{Y}$ – из параллельного соединения активной и емкостной проводимостей.

Проверку правильности расчетов предлагаем читателю провести самостоятельно, найдя А-параметры четырехполюсника по известным $\underline{Z}_0$ и $\underline{Y}$.

3. Находим характеристические параметры $\underline{Z}$ и $\underline{g}$ через А-параметры, используя формулы позиции 6 табл.8.4. Характеристическое (повторное) сопротивление четырехполюсника $\underline{Z}_C$:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{206e^{j14^\circ}}{5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}}} = \sqrt{41,23 \cdot 10^3 e^{-j76^\circ}} = 203 e^{-j38^\circ} \text{ Ом.}$$

Постоянная передачи $\underline{g}$:

$$\begin{aligned}\underline{g} &= \ln[\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}] = \ln\left[(1 + j0,5) + \sqrt{206e^{j14^\circ} \cdot 5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}}\right] = \\ &= \ln\left[(1 + j0,5) + \sqrt{1,03e^{j104^\circ}}\right] = \ln\left[(1 + j0,5) + 1,015e^{j52^\circ}\right] = \ln[(1 + j0,5) + (0,625 + j0,8)] = \\ &= \ln[1,625 + j1,3] = \ln\left[2,08e^{j39^\circ}\right] = \ln\left[e^\alpha e^{j39^\circ}\right] = \alpha + j\beta = 0,732 + j0,68.\end{aligned}$$

Здесь $\alpha = \ln 2,08 = 0,732$ Нп; $\beta = 39^\circ$ или $\beta = 0,68$ рад.

Проверим правильность расчетов, вновь определив параметры А-формы по известным характеристическим параметрам $\underline{Z}_C$ и $\underline{g}$. В соответствии с позицией 7 табл.8.4 имеем $\underline{A} = \operatorname{ch} \underline{g}$; $\underline{B} = \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{g}$; $\underline{C} = \frac{\operatorname{sh} \underline{g}}{\underline{Z}_C}$.

Из курса математики известно *, что $\operatorname{ch} \underline{g} = \operatorname{ch} \alpha \cdot \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \cdot \sin \beta$ и $\operatorname{sh} \underline{g} = \operatorname{sh} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{ch} \alpha \cdot \sin \beta$. В этих формулах

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \alpha &= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{0,732} + e^{-0,732}}{2} = \frac{2,08 + 0,48}{2} = 1,28; \\ \operatorname{sh} \alpha &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \frac{2,08 - 0,48}{2} = \frac{1,6}{2} = 0,8; \quad \sin \beta = \sin 39^\circ = 0,63; \quad \cos \beta = 0,78.\end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \operatorname{ch} \underline{g} = 1,28 \cdot 0,78 + j0,8 \cdot 0,63 = (1 + j0,5) = 1,12e^{j26,5^\circ};$$

$$\operatorname{sh} \underline{g} = 0,8 \cdot 0,78 + j1,28 \cdot 0,63 = (0,624 + j0,8) = 1,01e^{j52^\circ}.$$

$$\text{Таким образом, } \underline{A} = \operatorname{ch} \underline{g} = (1 + j0,5) = 1,12e^{j26,5^\circ};$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{g} = 203e^{-j38^\circ} \cdot 1,01e^{j52^\circ} = 206e^{+j14^\circ} = (200 + j50) \text{ Ом};$$

$$\underline{C} = \frac{\operatorname{sh} \underline{g}}{\underline{Z}_C} = \frac{1,01e^{j52^\circ}}{203e^{-j38^\circ}} = 0,005e^{j90^\circ} = 5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \text{ См.}$$

Как видим, полученный результат совпадает с исходными А-параметрами исследуемого четырехполюсника, следовательно, все предыдущие расчеты произведены правильно.

4. Находим ток и напряжение на входе четырехполюсника при согласованной нагрузке. Для этого подключим на выходные зажимы нагрузочное сопротивление $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_C = 203e^{-j38^\circ}$ Ом, приняв (произвольно) напряжение на выходных зажимах $\dot{U}_2 = 203e^{-j38^\circ}$ В. Тогда ток в нагрузке составит $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_C = 1$ А.

Используя формулы (8.1), получаем

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = 1,12e^{j26,5^\circ} \cdot 203e^{-j38^\circ} + 206e^{j14^\circ} \cdot 1 = 227e^{-j11,5^\circ} + 206e^{j14^\circ} = \\ &= (222,4 - j45,3) + (200 + j50) = (422,4 + j4,7) = 422,4e^{j0,63^\circ} \cong 422 \text{ В.}\end{aligned}$$

* Справочник по математике, разд. 2.5, 2.3.2 [9].

$$\dot{I}_1 = \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{A}\dot{I}_2 = 5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \cdot 203e^{-j38^\circ} + 1,12e^{j26,5^\circ} \cdot 1 = 1,015e^{j52^\circ} + 1,12e^{j26,5^\circ} =$$

$$= (0,625 + j0,8) + (1 + j0,5) = 1,625 + j1,3 = 2,08e^{j39^\circ} \text{ А.}$$

Проверку правильности вычислений осуществим, найдя входное сопротивление четырехполюсника, которое при согласованной нагрузке должно быть равно характеристическому (8.17):

$$\underline{Z}_{1BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{422}{2,08e^{j39^\circ}} = 203e^{-j39^\circ} \text{ Ом, что и имеет место.}$$

5. Определяем переходные функции четырехполюсника, используя данные поз.13–16 табл.8.4.

Коэффициент передачи по напряжению

$$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{1,12e^{j26,5^\circ} \cdot 203e^{-j38^\circ} + (200 + j50)} =$$

$$= \frac{203e^{-j38^\circ}}{227e^{-j11,5^\circ} + (200 + j50)} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{(422 + j4,7)} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{422e^{j0,63^\circ}} = 0,48e^{-j39^\circ}.$$

Коэффициент передачи по току

$$K_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{A}} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \cdot 203e^{-j38^\circ} + (1 + j0,5)} =$$

$$= \frac{1}{1,015e^{+j52^\circ} + (1 + j0,5)} = \frac{1}{(0,62 + j0,8) + (1 + j0,5)} = \frac{1}{1,62 + j1,3} =$$

$$= \frac{1}{2,08e^{+j39^\circ}} = 0,48e^{-j39^\circ}.$$

Передаточное сопротивление

$$\underline{Z}_{пер} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_{H2}}{\underline{C}\underline{Z}_{H2} + \underline{A}} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \cdot 203e^{-j38^\circ} + (1 + j0,5)} =$$

$$= \frac{203e^{-j38^\circ}}{1,015e^{+j52^\circ} + (1 + j0,5)} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{(0,62 + j0,8)(1 + j0,5)} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{2,08e^{+j39^\circ}} = 97,6e^{-j77^\circ} \text{ Ом.}$$

Передаточная проводимость

$$\underline{Y}_{пер} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{\underline{A}\underline{Z}_{H2} + \underline{B}} = \frac{1}{1,12e^{j26,5^\circ} \cdot 203e^{-j38^\circ} + (200 + j50)} =$$

$$= \frac{1}{422 + j4,7} = \frac{1}{422e^{j0,63^\circ}} \cong \frac{1}{422} = 0,00237 = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Проверим результаты расчетов, используя известные токи и напряжения на входных и выходных зажимах четырехполюсника, полученные в п.4 данного примера:

$$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{422} = 0,48e^{-j38^\circ}; \quad K_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{2,08e^{j39^\circ}} = 0,48e^{-j39^\circ};$$

$$\underline{Z}_{nep} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{203e^{-j38^\circ}}{2,08e^{j39^\circ}} = 97,6e^{-j77^\circ}; \quad \underline{Y}_{nep} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{422} = 0,00237 = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Эти данные совпадают с результатами расчетов переходных функций с использованием А-параметров, и, следовательно, предыдущие расчеты произведены верно.

8.11. Способы соединения четырехполюсников

В электротехнической практике широко используются цепи, состоящие из нескольких четырехполюсников, различным образом связанных между собой. Различают каскадное, параллельное, последовательное, последовательно-параллельное и параллельно-последовательное соединения.

В табл.8.5 показаны различные способы соединения на примере двух четырехполюсников. В зависимости от способа их соединения для описания работы составного четырехполюсника используют ту или иную форму записи уравнений. Критерием выбора являются соображения удобства определения параметров составного четырехполюсника.

Так, при каскадном соединении используют А-форму записи уравнений, в связи с тем, что А-матрица составного четырехполюсника равна произведению А-матриц составляющих его четырехполюсников. При параллельном соединении используют Y-форму записи уравнений, поскольку Y-матрица составного четырехполюсника равна сумме Y-матриц составляющих его четырехполюсников. При последовательном соединении используют Z-форму записи, так как Z-матрица составного четырехполюсника представляет собой сумму Z-матриц отдельных четырехполюсников, входящих в это соединение. Аналогичные утверждения справедливы также для H-матрицы при последовательно-параллельном соединении четырехполюсников и для G-матрицы при параллельно-последовательном их соединении. При всех способах соединения четырехполюсников необходимо соблюдать *условия регулярности соединения*: через первичные, а также вторичные зажимы каждого четырехполюсника должны протекать равные по величине и противоположные по направлению токи. Тогда матрица каждого четырехполюсника остается, такой же, какой она была до соединения четырехполюсников между собой.

Пример 8.14. Два одинаковых симметричных четырехполюсника с параметрами, соответствующими примеру 8.13, соединены каскадно так, что выходные зажимы первого четырехполюсника соединены с входными зажимами второго в соответствии с поз.1 табл.8.5. Требуется определить А-параметры результирующего четырехполюсника.

Т а б л и ц а 8.5

Различные виды соединения пассивных четырехполюсников

№ п/п	Вид соединения и матри- ца четырехполюсника	Схема соединения
1	Каскадное $ A = A' \cdot A'' $	
2	Параллельное $ Y = Y' + Y'' $	
3	Последовательное $ Z = Z' + Z'' $	
4	Последовательно- параллельное $ H = H' + H'' $	
5	Параллельно- последовательное $ G = G' + G'' $	

В этой таблице $|A|$, $|Y|$, $|Z|$, $|H|$, и $|G|$ – матрицы четырехполюсников.

Решение. При каскадном соединении двух четырехполюсников матрица $|A|$ результирующего четырехполюсника равна произведению матриц соединенных четырехполюсников *.

* Справочник по математике, разд. 2.4.4.2.1 [9].

Для двух одинаковых четырехполюсников имеем

$$|A| = |A'| \cdot |A''| = \begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{A} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}^2 + \underline{B}\underline{C} & \underline{A}\underline{B} + \underline{B}\underline{A} \\ \underline{C}\underline{A} + \underline{A}\underline{C} & \underline{C}\underline{B} + \underline{A}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{\Sigma} & \underline{B}_{\Sigma} \\ \underline{C}_{\Sigma} & \underline{A}_{\Sigma} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\underline{A}^2 = (1,12e^{j26,5})^2 = 1,25e^{j53^\circ} = (0,75 + j1)$;

$$\underline{B}\underline{C} = 206e^{j14^\circ} \cdot 5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} = 1,03e^{j104^\circ} = (-0,25 + j1);$$

$$\underline{C}\underline{A} = 5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \cdot 1,12e^{j26,5^\circ} = 5,6 \cdot 10^{-3} e^{j116,5^\circ} = (-2,5 + j5) \cdot 10^{-3};$$

$$\underline{A}\underline{B} = 1,12e^{j26,5^\circ} \cdot 206e^{j14^\circ} = 230,7e^{j40,5^\circ} = (175 + j150).$$

Тогда А-параметры результирующего четырехполюсника

$$\underline{A}_{\Sigma} = \underline{A}^2 + \underline{B}\underline{C} = (0,75 + j1) + (-0,25 + j1) = (0,5 + j2) = 2,06e^{j76^\circ};$$

$$\underline{B}_{\Sigma} = 2(\underline{A}\underline{B}) = 2(230,7e^{j40,5^\circ}) = 461,4e^{j40,5^\circ} = (350 + j300);$$

$$\underline{C}_{\Sigma} = 2(\underline{C}\underline{A}) = 2(5,6 \cdot 10^{-3} e^{j116,5^\circ}) = 11,2 \cdot 10^{-3} e^{j116,5^\circ} = (-5 + j10) \cdot 10^{-3} = (-0,005 + j0,01).$$

Проверку вычислений осуществляем по формуле, соответствующей позиции 1 табл.8.4: $\underline{A}_{\Sigma}^2 - \underline{B}_{\Sigma}\underline{C}_{\Sigma} = 1$. Здесь

$$\underline{A}_{\Sigma}^2 = (2,06e^{j76^\circ})^2 = 4,24e^{j152^\circ} = (-3,75 + j2);$$

$$\underline{B}_{\Sigma}\underline{C}_{\Sigma} = 461,4e^{j40,5^\circ} \cdot 11,2 \cdot 10^{-3} e^{j116,5^\circ} = 5,17e^{j157^\circ} = (-4,75 + j2).$$

$$\text{Таким образом, } \underline{A}_{\Sigma}^2 - \underline{B}_{\Sigma}\underline{C}_{\Sigma} = (-3,75 + j2) - (-4,75 + j2) = 1.$$

Поэтому можно считать, что расчеты произведены правильно.

Пример 8.15. Два одинаковых симметричных четырехполюсника с А-параметрами, как в примере 8.13 (п.1 решения), соединены последовательно, в соответствии с поз.3 табл.8.5. Требуется определить А-параметры результирующего четырехполюсника.

Решение. 1. При последовательном соединении двух четырехполюсников удобно пользоваться Z-формой записи их уравнений, при которой матрица $|Z|$ результирующего четырехполюсника равна сумме матриц соединяемых четырехполюсников. Для двух одинаковых четырехполюсников (табл.8.1) имеем

$$|Z_{\Sigma}| = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\underline{Z}_{11} & 2\underline{Z}_{12} \\ 2\underline{Z}_{21} & 2\underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11\Sigma} & \underline{Z}_{12\Sigma} \\ \underline{Z}_{21\Sigma} & \underline{Z}_{22\Sigma} \end{vmatrix}.$$

2. Предварительно находим Z-параметры симметричного четырехполюсника ($\underline{A} = \underline{D}$) из примера 8.13, воспользовавшись табл.8.2:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}.$$

Подставляя в эти соотношения известные значения $\underline{A}$ и $\underline{C}$, получаем

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \frac{1,12e^{j26,5^\circ}}{5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}} = 224e^{-j63,5^\circ} = (100 - j200) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}} = 200e^{-j90^\circ} = -j200 \text{ Ом}.$$

Тогда Z-параметры результирующего четырехполюсника

$$\underline{Z}_{11\mathcal{D}} = \underline{Z}_{22\mathcal{D}} = 2\underline{Z}_{11} = 448e^{-j63,5^\circ} = (200 - j400) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{12\mathcal{D}} = \underline{Z}_{21\mathcal{D}} = 2\underline{Z}_{12} = 400e^{-j90^\circ} = -j400 \text{ Ом}.$$

Для нахождения искомых А-параметров результирующего четырехполюсника вновь используем табл.8.2 и на пересечении вертикали Z и горизонтали А получаем

$$\underline{A}_{\mathcal{D}} = \frac{\underline{Z}_{11\mathcal{D}}}{\underline{Z}_{21\mathcal{D}}}; \quad \underline{B}_{\mathcal{D}} = \frac{\Delta_{Z\mathcal{D}}}{\underline{Z}_{21\mathcal{D}}}; \quad \underline{C}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{\underline{Z}_{21\mathcal{D}}}.$$

Подставляя в эти формулы известные Z-параметры, находим

$$\underline{A}_{\mathcal{D}} = \frac{448e^{-j63,5^\circ}}{400e^{-j90^\circ}} = 1,12e^{+j26,5^\circ} = (1 + j0,5);$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_{\mathcal{D}} &= \frac{\Delta_{Z\mathcal{D}}}{\underline{Z}_{12\mathcal{D}}} = \frac{\underline{Z}_{11\mathcal{D}}\underline{Z}_{22\mathcal{D}} - (\underline{Z}_{12\mathcal{D}})^2}{\underline{Z}_{12\mathcal{D}}} = \frac{[448e^{-j63,5^\circ}]^2 - [400e^{-j90^\circ}]^2}{-j400} = \\ &= \frac{20 \cdot 10^4 e^{-j127^\circ} - 16 \cdot 10^4 e^{-j180^\circ}}{-j400} = \frac{(-12 \cdot 10^{-4} - j16 \cdot 10^4) + 16 \cdot 10^4}{-j400} = \\ &= \frac{(4 \cdot 10^4 - j16 \cdot 10^4)}{-j400} = j(100 - j400) = 400 + j100 = 412e^{j14^\circ}; \end{aligned}$$

$$\underline{C}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{\underline{Z}_{21\mathcal{D}}} = \frac{1}{-j400} = +j0,0025 = 25 \cdot 10^{-4} e^{j90^\circ}.$$

Проверку расчетов произведем двумя способами: а) С помощью формулы

$$(8.2) \quad \underline{A}_{\mathcal{D}}^2 = 1,25 \cdot 10^{+j53^\circ} = 0,75 + j1;$$

$$\underline{B}_{\mathcal{D}}\underline{C}_{\mathcal{D}} = 412e^{j14^\circ} 25 \cdot 10^{-4} e^{j90^\circ} = 1,03e^{j104^\circ} = (-0,25 + j1);$$

$$\underline{A}_{\mathcal{D}}^2 - \underline{B}_{\mathcal{D}}\underline{C}_{\mathcal{D}} = (0,75 + j1) + (0,25 - j1) = 1.$$

Таким образом, расчеты произведены верно.

б) Путем обратного перехода от А-параметров к исходным Z-параметрам. Используя данные табл.8.2, получаем

$$\underline{Z}_{11\mathcal{D}} = \underline{Z}_{22\mathcal{D}} = \frac{\underline{A}_{\mathcal{D}}}{\underline{C}_{\mathcal{D}}} = \frac{1,12e^{j26,5^\circ}}{25 \cdot 10^{-4} e^{j90^\circ}} = 448e^{-j63,5^\circ}; \quad \underline{Z}_{12\mathcal{D}} = \underline{Z}_{21\mathcal{D}} = \frac{1}{\underline{C}_{\mathcal{D}}} = 400e^{-j90^\circ}.$$

Эти результаты соответствуют рассчитанным выше Z-параметрам результирующего четырехполюсника, следовательно, все расчеты выполнены верно.

8.12. Понятие об активном четырехполюснике

Активным называется четырехполюсник, содержащий в своей структуре источники энергии (усилители, линии передачи с дополнительными источниками энергии, подключенными между ее входными и выходными зажимами). Эти внутренние источники энергии вызывают появление напряжения на разомкнутых зажимах такого четырехполюсника. Активный двухполюсник может быть эквивалентно заменен пассивным четырехполюсником и некоторыми эквивалентными ЭДС на его входных ($\dot{E}_{01}$) и выходных ($\dot{E}_{02}$) зажимах (рис.8.7).

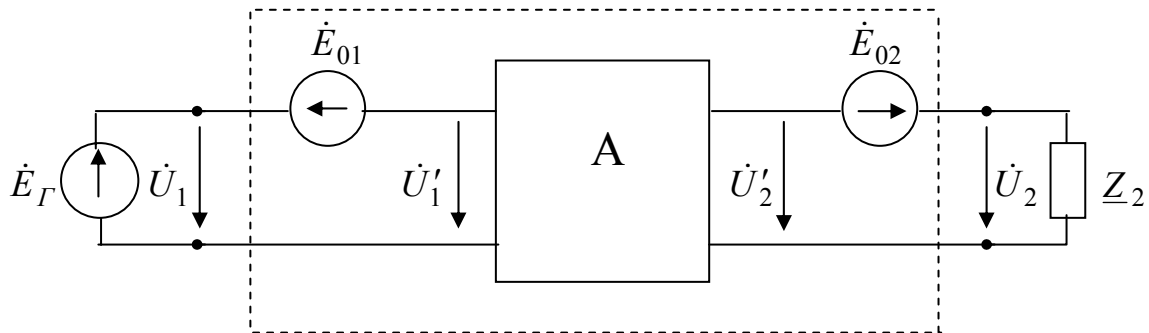


Рис.8.7

Вспользуемся $\underline{Z}$ -формой записи уравнений четырехполюсника (в соответствии с поз.4 табл.8.1) и получим для активного четырехполюсника следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 + \dot{E}_{01} \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 + \dot{E}_{02} \end{aligned} \right\}. \quad (8.36)$$

Заметим, что активный четырехполюсник характеризуется пятью независимыми параметрами. Параметры $\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{21}$, $\underline{Z}_{22}$ его пассивной части соответствуют параметрам пассивного четырехполюсника и не зависят от внутренних источников энергии. Однако параметры $\dot{E}_{01}$ и $\dot{E}_{02}$ зависят как от источников энергии внутри четырехполюсника, так и от внутренней его структуры.

8.13. Дополнительные задания к главе 8. Вопросы и примеры для самотестирования

1. В условиях примера 8.1 найти Y-параметры четырехполюсника (поз.3 табл.8.1) путем непосредственного решения его уравнений в Z-форме записи относительно $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, а также с помощью табл.8.2.

2. По известным параметрам T-образной схемы замещения четырехполюсника (ответы примера 8.5) определить параметры холостого хода и короткого замыкания ($\underline{Z}_{1X}$, $\underline{Z}_{1K}$, $\underline{Z}_{2X}$, $\underline{Z}_{2K}$).

Ответы: $\underline{Z}_{1X} = +j3000$ Ом; $\underline{Z}_{1K} = -j3250$ Ом; $\underline{Z}_{2X} = +j4000$ Ом; $\underline{Z}_{2K} = -j4333$ Ом. Полученные результаты соответствуют формуле (8.10).

3. По данным опытов холостого хода и короткого замыкания из задания 2 найти А-параметры четырехполюсника.

Ответы: полученные А-параметры должны соответствовать результату решения примера 8.5, т.е. $A = 0,6$; $B = -j2600 \text{ Ом}$; $C = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См}$; $D = 0,8$.

4. Известны данные опытов холостого и короткого замыкания четырехполюсника: $\underline{Z}_{1X} = +j3000 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{1K} = -j3250 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2X} = +j4000 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2K} = -j4333 \text{ Ом}$. Найти характеристические параметры $\underline{Z}_{1C}$, $\underline{Z}_{2C}$ и $\underline{g}$ этого четырехполюсника.

Ответы: воспользовавшись формулами (8.24), получаем $\underline{Z}_{1C} = 3122 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2C} = 4163 \text{ Ом}$; $\alpha = 0$; $\beta = 0,8 \text{ рад}$; $\underline{g} = \alpha + j\beta = j0,8 \text{ рад}$.

5. Определить характеристические параметры четырехполюсника по известным А-параметрам: $\underline{A} = 2$; $\underline{B} = (2 + j10) \text{ Ом}$; $\underline{C} = 0,5 \text{ См}$; $\underline{D} = 1 + j2,5$.

Ответы: $\underline{Z}_{1C} = 2,83 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2C} = (1,5 + j5) \text{ Ом}$; $\underline{g} = 1,32 + j0,8$.

6. Найти передаточное сопротивление $\underline{Z}_{пер}$ и передаточную проводимость $\underline{Y}_{пер}$ четырехполюсника по известным А-параметрам: $\underline{A} = 0,6$; $\underline{B} = -j2600 \text{ Ом}$; $\underline{C} = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См}$; $\underline{D} = 0,8$, если сопротивление нагрузки $\underline{Z}_{H2} = R = 3000 \text{ Ом}$.

Ответы: воспользовавшись формулами примера 8.10, находим, что

$$\underline{Z}_{пер} = 3000e^{j37^\circ} = (2400 + j1805) \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_{пер} = 3,16 \cdot 10^{-4} e^{j55,3^\circ} = (1,8 + j2,6) \cdot 10^{-4} \text{ См}.$$

7. Найти коэффициент передачи по напряжению (K_u) и коэффициент передачи по току (K_i) для четырехполюсника с известными А-параметрами: $\underline{A} = 0,6$; $\underline{B} = -j2600 \text{ Ом}$; $\underline{C} = -j2 \cdot 10^{-4} \text{ См}$; $\underline{D} = 0,8$, если сопротивление нагрузки $\underline{Z}_2 = 3000 \text{ Ом}$.

Ответы: воспользовавшись формулами примера 8.10, получаем $K_u = 0,95e^{j55^\circ}$; $K_i = 1e^{+j37^\circ}$.

8. Найти передаточные функции четырехполюсника, А-параметры которого известны из задания 7, при напряжении $\dot{U}_2 = 300 \text{ В}$ и $\underline{Z}_{H2} = 3000 \text{ Ом}$, непосредственно используя А-форму записи уравнений.

Ответы: предварительно рассчитаем ток и напряжение на входе четырехполюсника, а также ток на его выходе. Тогда $K_u = 0,95e^{-j55,3^\circ}$; $K_i = 1e^{-j37^\circ}$; $\underline{Z}_{пер} = 3000e^{j37^\circ} \text{ Ом}$; $\underline{Y}_{пер} = 3,16 \cdot 10^{-4} e^{j55,3^\circ} \text{ См}$.

9. Ответить на все вопросы любого из шести вариантов тестовых карт разд.6 сборника тестовых карт [6].

10. Рассмотреть примеры с решениями 15 и 16 из методического сборника [7].

Глава 9

Цепи с распределенными параметрами

9.1. Общие положения

Параметры линий электропередачи, линий связи, волноводов и некоторых других электро- и радиотехнических устройств распределены на всем их протяжении и указываются на единицу длины (на 1 метр или 1 километр). Обозначим их R , L , G и C и назовем *первичными параметрами*. Линии, у которых параметры распределены равномерно по их длине, называются *однородными*. Именно такие линии рассматриваются в данной главе.

В качестве примера возьмем двухпроводную линию передач. Если к ней приложить некоторое напряжение u_1 , то, продвигаясь вдоль линии, можно заметить, что напряжение между проводами и ток в проводах не остаются одинаковыми, а изменяются вдоль линии из-за токов утечки через изоляцию и токов смещения.

Таким образом, напряжение и ток в линии есть функции двух переменных - времени t и расстояния x от ее начала.

9.2. Дифференциальные уравнения линии

Найдем зависимость тока i и напряжения u от времени t и расстояния x . Для этого рассмотрим бесконечно малый участок линии длиной dx , расположенный на расстоянии x от начала линии (левые зажимы). Общую длину линии обозначим ℓ .

Электрическая схема этого участка dx показана на рис.9.1. Вся линия может рассматриваться как цепная схема с бесконечно большим числом бесконечно малых звеньев. Каждое из звеньев состоит из следующих элементов: Rdx – активное сопротивление проводов участка; Ldx – индуктивность участка; Cdx – емкость между проводами участка; Gdx – активная проводимость изоляции участка.

При этом: напряжение в начале участка (u); напряжение в конце участка ($u+du$); ток в начале участка (i); ток в конце участка ($i+di$); ток в изоляции $i(x)$.

В начале составим уравнение по 2-му закону Кирхгофа для контура $acdb$, обойдя его по часовой стрелке:

$$-u + iRdx + Ldx \frac{di}{dt} + (u + du) = 0, \quad \text{откуда} \quad -du = iRdx + Ldx \frac{di}{dt}$$

или
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR + L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (9.1)$$

Заметим, что (9.1) записано в частных производных поскольку u и i являются функциями двух независимых переменных: времени t и расстояния x .

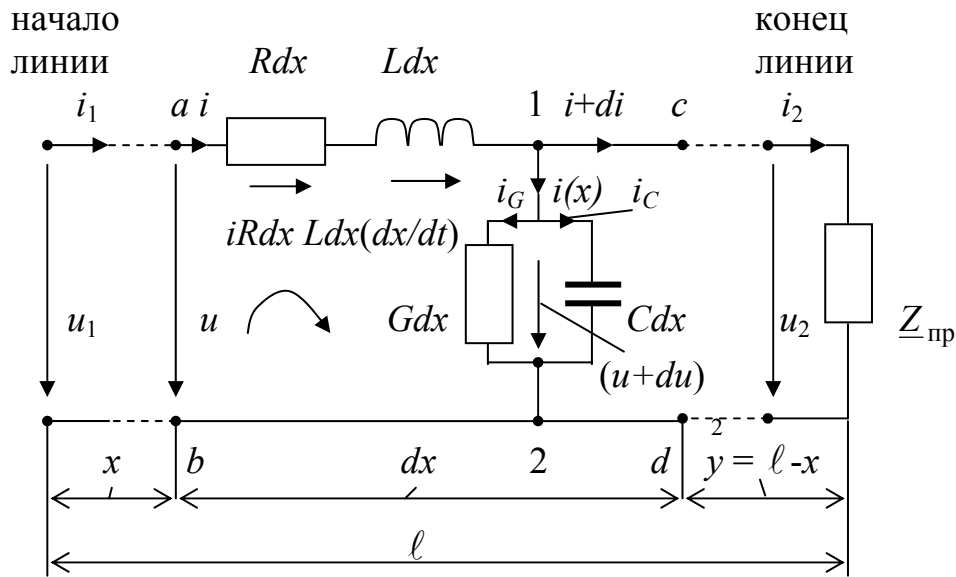


Рис.9.1

Затем составим уравнение для токов, протекающих на участке dx . В соответствии с 1-м законом Кирхгофа для узла 1 имеем $i = i(x) + (i + di)$ или $i(x) = i - (i + di) = -di$.

В свою очередь, ток $i(x)$ есть сумма токов, протекающих через активную проводимость $i_G = Gdx(u + du)$ и через емкость $i_C = Cdx \frac{d}{dt}(u + du)$ участка dx .

Поэтому

$$i(x) = Gdx(u + du) + Cdx \frac{d}{dt}(u + du) = Gdxu + Gdxdu + Cdx \frac{du}{dt} + Cdx \frac{d}{dt}(du).$$

В этом уравнении величинами $Gdxdu$ и $Cdx \frac{d}{dt}(du)$ можно пренебречь как бесконечно малыми второго порядка малости. Тогда получаем, что $i(x) = -di = Gdxu + Cdx \frac{du}{dt}$, откуда $-di = \left(Gu + C \frac{du}{dt} \right) dx$ или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot u + C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

(9.2)

Заметим, что (9.2) записано в частных производных поскольку u и i являются функциями двух независимых переменных: времени t и расстояния x .

Уравнения (9.1) и (9.2) представляют собой систему дифференциальных уравнений линии. В электротехнической литературе эти уравнения известны как *телеграфные*. Их решение дает значения тока и напряжения в любой точке линии при любом характере изменения тока и напряжения во времени на зажимах линии и при любых видах электромагнитных процессов в ней - установившихся и переходных.

9.3. Уравнения для установившегося синусоидального режима

Пусть ток и напряжение в начале линии определяются следующими уравнениями:

$$u_1 = U_{m1} \sin(\omega t + \psi_{u1}) ; \quad i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) .$$

Определим значения тока i и напряжения u на расстоянии x от начала линии. При решении задачи воспользуемся символическим методом (гл. 4). В соответствии с табл.4.3 имеем следующие соответствия:

$$iR \div \dot{I}R ; \quad L \frac{di}{dt} \div j\omega L \dot{I} ; \quad Gu \div G\dot{U} ; \quad C \frac{du}{dt} \div j\omega C \dot{U} .$$

Тогда уравнения (9.1) и (9.2) приобретают в комплексной форме записи следующий вид:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R + j\omega L)\dot{I}; \quad -\frac{d\dot{I}}{dx}(G + j\omega C)\dot{U}. \quad (9.3)$$

Заметим, что в этих уравнениях частные производные заменены на обыкновенные, так как комплексные числа $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются только функциями от x и не зависят от времени t .

Решая эту систему уравнений сначала относительно $\dot{U}$, а затем относительно $\dot{I}$, после ряда простых преобразований получаем

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\dot{U}, \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\dot{I}. \end{cases} \quad (9.4)$$

Обозначим для сокращения записи коэффициент при $\dot{I}$ и $\dot{U}$ через γ^2 , т.е. положим, что

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta. \quad (9.5)$$

Эта величина называется *коэффициентом распространения*. В общем случае это комплексное число, вещественная часть которого α называется *коэффициентом затухания*, а мнимая часть β - *коэффициентом фазы*. Подробный анализ, выходящий за пределы данного учебного пособия, показывает, что эти коэффициенты всегда положительны, т.е. $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Физический смысл коэффициента распространения будет выявлен при последующем изложении в пункте 9.5.

С учетом формулы (9.5) уравнения (9.4) приобретают следующий вид:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0; \quad \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{I} = 0. \quad (9.6)$$

Это однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Из курса высшей математики известно, что общий интеграл (решение) таких уравнений представляет собой сумму экспонент вида $\dot{A}e^{px}$.

Для напряжения $\dot{U}$ получаем

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{p_1 x} + \dot{A}_2 e^{p_2 x}.$$

Здесь $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ - постоянные интегрирования; p_1 и p_2 - корни характеристического уравнения, которое получают из исходного уравнения заменой $d^2\dot{U}/dx^2$ на p^2 и заменой $\dot{U}$ на 1.

Произведя указанную замену, получаем

$$p^2 - \gamma^2 = 0. \quad (9.7)$$

Корни этого уравнения $p_{12} = \pm\sqrt{\gamma^2}$. Отсюда $p_1 = -\gamma$ и $p_2 = +\gamma$.

Таким образом, решение уравнения (9.6) для комплексного напряжения приобретает вид

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{+\gamma x}. \quad (9.8)$$

Комплексный ток в линии $\dot{I}$ получаем, подставив (9.8) в первое уравнение (9.3):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{R + j\omega L} \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{R + j\omega L} \frac{d}{dx} [\dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{+\gamma x}] = \\ &= -\frac{1}{R + j\omega L} [-\gamma \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \dot{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{\gamma}{R + j\omega L} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{+\gamma x}) \end{aligned}$$

Используя понятие о коэффициенте распространения (9.5), получаем

$$\dot{I} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{+\gamma x}). \quad (9.9)$$

Здесь коэффициент перед скобками представляет собой обратную величину так называемого волнового сопротивления линии

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \text{ Ом.} \quad (9.10)$$

С учетом (9.10) уравнение (9.9) приобретает вид

$$\dot{I} = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{+\gamma x}) \quad (9.11)$$

Постоянные интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$, входящие в (9.8) и (9.11), определяются из граничных условий. В начале линии (при $x=0$) имеем

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_1 e^{-\gamma 0} + \dot{A}_2 e^{+\gamma 0} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2, \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\dot{A}_1 e^{-\gamma 0} - \dot{A}_2 e^{+\gamma 0}) = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\dot{A}_1 - \dot{A}_2). \end{cases} \quad (9.12)$$

Решая систему из двух уравнений (9.12) относительно $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$, получаем

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_B); \quad \dot{A}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_B). \quad (9.13)$$

Подставляя $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ из уравнения (9.13) в уравнения (9.8) и (9.11), окончательно получаем для тока и напряжения в любом месте x от начала линии

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{+\gamma x}; \\ \dot{I} = \frac{1}{\underline{Z}_B} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{+\gamma x} \right]. \end{cases} \quad (9.14)$$

Если известны ток и напряжение не в начале линии, а в ее конце $(\dot{U}_2, \dot{I}_2)$, то удобно рассчитывать расстояние до любой точки линии от ее конца. При этом уравнения для тока и напряжения в любой точке линии на любом расстоянии y от ее конца (после ряда простых преобразований) приобретают следующий вид^{*}:

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B) e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B) e^{-\gamma y}; \\ \dot{I} = \frac{1}{\underline{Z}_B} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B) e^{\gamma y} - \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B) e^{-\gamma y} \right]. \end{cases} \quad (9.14 \text{ а})$$

В ряде случаев уравнения длинной линии удобно выражать через гиперболические функции. Из курса математики известно^{**}, что

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \text{ch} \gamma x \quad \text{и} \quad \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \text{sh} \gamma x.$$

Используя эти соотношения, получаем выражения для тока и напряжения в любом месте x линии через гиперболические синус и косинус. Для этого в формулах (9.14) раскрываем скобки и группируем члены, содержащие только $\dot{U}$ и только $\dot{I}$. Тогда при счете расстояний от начала линии получаем

$$\dot{U} = U_1 \text{ch} \gamma x - \dot{I}_1 \underline{Z}_B \text{sh} \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \text{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_B} \text{sh} \gamma x. \quad (9.15)$$

Поступая аналогичным образом с формулами (9.14а) при счете расстояний от конца линии находим, что

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \text{ch} \gamma y + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh} \gamma y; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \text{ch} \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh} \gamma y. \quad (9.15 \text{ а})$$

9.4. Линия как симметричный четырехполюсник

Если в (9.15 а) положить $y = \ell$, то получим уравнения, выражающие ток и напряжение линии в начале через ток и напряжение в ее конце:

^{*} Подробное преобразование имеется в [1–3], [5].

^{**} Справочник по математике, п.2.5.2.3.1 [9].

$$\dot{U}_1 = U_2 \operatorname{ch} \gamma \ell + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma \ell; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell}{\underline{Z}_B} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma \ell. \quad (9.16)$$

Это уравнения симметричного четырехполюсника в А-параметрах (поз.2 табл.8.4), где

$$\underline{A} = \underline{D} = \operatorname{ch} \gamma \ell; \quad \underline{B} = \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma \ell; \quad \underline{C} = \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell}{\underline{Z}_B}. \quad (9.17)$$

При этом $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$, поскольку $\operatorname{ch}^2 \gamma \ell - \operatorname{sh}^2 \gamma \ell \equiv 1$.

9.5. Характеристические параметры линии

Волновое сопротивление $\underline{Z}_B$ выражается через первичные параметры линии формулой (9.10), а коэффициент распространения $\gamma = (\alpha + j\beta)$ – формулой (9.5). Они однозначно определяются через R, G, L, C и поэтому также являются параметрами линии. Их называют *вторичными* или *характеристическими* параметрами. Подробный анализ показывает, что коэффициент затухания (α) и коэффициент фазы (β) выражаются через первичные параметры линии R, G, L, C и частоту приложенного напряжения ω следующими соотношениями*:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right]}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

При высоких частотах (1 МГц и выше) формулы (9.18) упрощаются, так как при этом $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$. Тогда можно приближенно считать, что

$$\alpha \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (9.19)$$

9.6. Бегущие волны. Длина волны. Коэффициенты затухания и фазы. Фазовая скорость

Рассмотрим уравнение (9.14) для напряжения в любой точке линии. Каждое из них состоит из двух слагаемых. Обозначим для краткости

$$\dot{U}_\varphi = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x}; \quad \dot{U}_\psi = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma x}. \quad (9.20)$$

Они представляют собой бегущие волны напряжения, причем первое слагаемое $\dot{U}_\varphi$ является прямой (падающей) волной, а второе слагаемое $\dot{U}_\psi$ является обратной (отраженной) волной.

Рассмотрим вначале первое слагаемое. Выражение, стоящее здесь в скобках, представляет собой некоторое комплексное напряжение, которое в показательной форме записи имеет вид

* Их вывод имеется в [1].

$$\dot{U}_{\varphi} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_B) = U_{\varphi} e^{j\xi} e^{-\gamma x},$$

где U_{φ} - модуль (действующее значение) этого напряжения;

ξ - аргумент (начальная фаза) этого напряжения.

Учитывая, что $\gamma = \alpha + j\beta$, имеем $\dot{U}_{\varphi} = U_{\varphi} e^{j\xi} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} = U_{\varphi} e^{-\alpha x} e^{j(\xi - \beta x)}$.

Переходя от комплексного числа к синусоидальной функции времени (по известным из предыдущих глав правилам), получаем для любой точки линии на расстоянии x от ее начала

$$u_{\varphi} = U_{\varphi} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin(\omega t + \xi - \beta x). \quad (9.21)$$

Это напряжение есть не только функция времени t , но и функция расстояния x от начала линии.

При фиксированном значении $x = \text{const}$ (т.е. в каждой точке линии) напряжение есть синусоидальная функция времени с постоянной амплитудой и начальной фазой $(\xi - \beta x)$.

При фиксированном значении $t = \text{const}$ (т.е. в любой момент времени) напряжение вдоль линии изменяется по синусоидальному закону. Начальная фаза этой синусоиды - $(\omega t + \xi)$.

Коэффициент β в формуле (9.21) характеризует скорость изменения фазы напряжения вдоль линии на единицу ее длины и поэтому называется *коэффициентом фазы*. Множитель $(e^{-\alpha x})$ показывает, что по мере увеличения x (по мере удаления от начала линии) амплитуда синусоиды уменьшается (затухает), так как коэффициент α всегда положителен. Скорость уменьшения амплитуды зависит от величины этого коэффициента α , и поэтому он называется *коэффициентом затухания*.

Расстояние между двумя точками линии, на котором фаза напряжения изменяется на 2π , называется длиной волны λ . Следовательно, $2\pi = \beta\lambda$ или

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (9.22)$$

Расчеты показывают, что, например, при частоте $f=50$ Гц $\lambda=6000$ км; при $f=800$ Гц $\lambda=375$ км; при $f=3 \cdot 10^9$ Гц $\lambda=10$ см..

Линии, физическая длина которых соизмерима с длиной волны называются *длинными линиями*.

На рис.9.2,а представлен график изменения напряжения u_{φ} вдоль линии во времени, которое можно наглядно представить в виде бегущей волны. С течением времени t волна u_{φ} перемещается от начала линии к ее концу и поэтому называется прямой или падающей волной.

а) прямая (падающая) волна

б) обратная (отражённая) волна

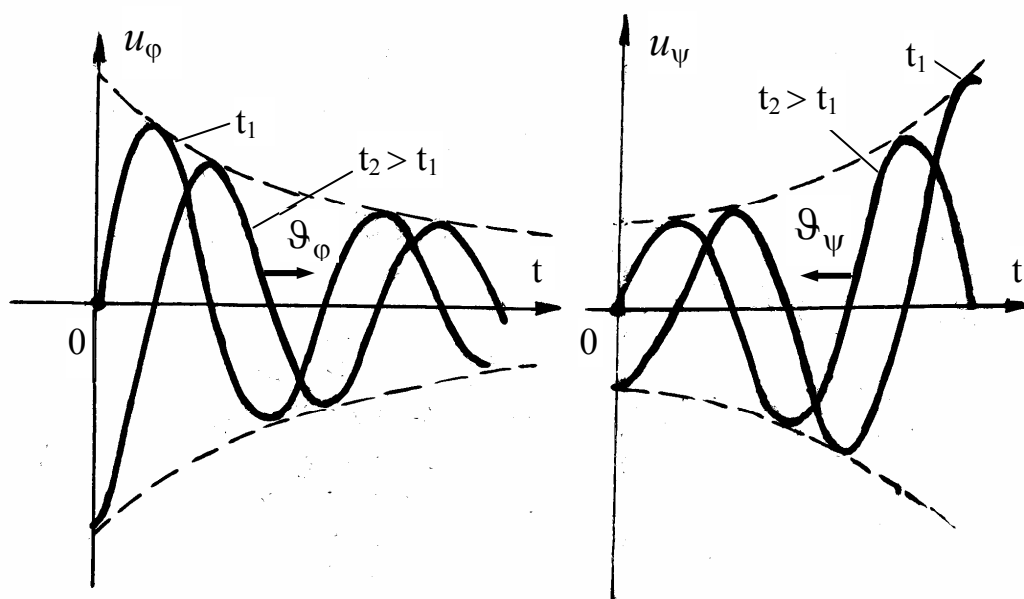


Рис.9.2

Скорость распространения падающей волны напряжения вдоль линии определяется скоростью перемещения любой ее точки, фаза колебаний которой остается постоянной, т.е. $\omega t + \xi - \beta x = \text{const}$, но тогда $\frac{d}{dt}(\omega t + \xi - \beta x) = 0$ или $\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0$ ($\xi = \text{const}$ и не зависит от x). В этой формуле $\frac{dx}{dt}$ – скорость изменения координаты x во времени при заданных условиях. Это и есть фазовая скорость волны ϑ_ϕ . Таким образом,

$$\vartheta_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (9.23)$$

На основании (9.22) имеем $\omega = 2\pi f = \beta \vartheta_\phi$ или $\beta = 2\pi f / \vartheta_\phi$. Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\vartheta_\phi}{f} = \vartheta_\phi T, \quad (9.24)$$

т.е. за время одного периода падающая волна перемещается на расстояние, равное длине волны λ .

Аналогичным образом можно исследовать *второе слагаемое напряжения* (предоставляем читателю возможность проделать это самостоятельно):

$$u_\psi = U_\psi e^{+\alpha x} \sqrt{2} \sin(\omega t + \eta + \beta x). \quad (9.25)$$

При этом оказывается, что вторая составляющая u_ψ напряжения представляет собой отраженную волну, движущуюся от конца линии к ее началу с той же скоростью, что и прямая волна (рис.9.2,б). Таким образом, мгновенное значение напряжения в каждой точке линии есть результат наложения двух бегущих волн – падающей (прямой) и отраженной (обратной).

Все сказанное выше относится и к уравнению (9.14) для тока в каждой точке линии x от ее начала

$$\begin{cases} \dot{I}_\varphi = \frac{1}{\underline{Z}_B} \left[\frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x} \right]; \\ \dot{I}_\psi = \frac{-1}{\underline{Z}_B} \left[\frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_B) e^{+\gamma x} \right]. \end{cases} \quad (9.26)$$

Заметим, что отношение напряжения прямой волны $\dot{U}_\varphi$ к току $\dot{I}_\varphi$ прямой волны в любой точке линии равно сопротивлению $\underline{Z}_B$, а отношение напряжения обратной волны $\dot{U}_\psi$ к току $\dot{I}_\psi$ обратной волны в любой точке линии равно $-\underline{Z}_B$:

$$\frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi} = \underline{Z}_B; \quad \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi} = -\underline{Z}_B. \quad (9.27)$$

Предоставляем читателю возможность убедиться в этом самостоятельно, используя формулы (9.20) и (9.26).

Физически в линии существуют только результирующие напряжение и ток, а разложение их на прямую и обратную волны является удобным приемом, облегчающим анализ процессов.

Заметим, что в цепях постоянного тока при $\omega = 0$ понятие фазовой скорости теряет смысл, но $\alpha = \sqrt{RG}$ и $\beta = 0$.

9.7. Коэффициенты отражения волн

Наличие обратных волн есть результат отражения прямых волн от конца линии. Отношение напряжения отраженной волны к напряжению падающей волны в конце линии (при $y=0$) называют *коэффициентом отражения по напряжению* (n_u), а отношение тока отраженной волны к току падающей волны называют коэффициентом отражения по току (n_i).

Используя формулы (9.14 а) и учитывая, что первое слагаемое в них представляет собой падающую волну, а второе - отраженную волну, получаем для коэффициентов n_u и n_i следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} n_u &= \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{U}_\varphi} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B} \cdot \frac{(1/\dot{I}_2)}{(1/\dot{I}_2)} = \frac{\underline{Z}_{np} - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_B}; \\ n_i &= \frac{\dot{I}_\psi}{\dot{I}_\varphi} = -\frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_B}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_B} = -\frac{\underline{Z}_{np} - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_B} = -n_u. \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

В этих формулах $\underline{Z}_{np} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ – комплексное сопротивление приемника, подключенного к концу линии. Заметим здесь, что при коротком замыкании линии ($\underline{Z}_{np} = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$) коэффициент $n_u = -1$, а при холостом ходе линии ($\underline{Z}_{np} = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$) коэффициент $n_u = 1$; если сопротивление приемника $\underline{Z}_{np} = \underline{Z}_B$, то $n_i = n_u = 0$ и отраженные волны отсутствуют. При отсутствии обратной волны вся мощность, переносимая прямой волной к концу линии, поглощается

приемником. Поэтому в линиях связи (относительно маломощных) стремятся к согласованию сопротивления приемника с волновым (характеристическим) сопротивлением линии. При этом входное сопротивление линии равно волновому.

9.8. Неискажающая линия

Волновое сопротивление $\underline{Z}_B$, коэффициент затухания α , коэффициент фазы β , а также скорость распространения волны ϑ_ϕ зависят от частоты. Это обстоятельство может вызвать искажение речи в телефонных линиях и искажение сигнала в телеграфных линиях, так как передача речи и сигналов осуществляется спектром токов разных частот. Однако, если в линии соблюдается соотношение $R C = G L$, то ϑ_ϕ и α не зависят от частоты, а β изменяется прямо пропорционально частоте, такая линия называется неискажающей. У нее форма сигнала в начале и в конце одинакова. Для неискажающей линии имеем

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \beta = \omega \sqrt{LC}; \quad \vartheta_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \alpha = \sqrt{RG}. \quad (9.29)$$

Кроме того, для устранения возможных искажений, вызванных наличием отраженных волн, сопротивление приемника должно быть равным характеристическому.

9.9. Линия без потерь

Если $\omega L \gg R$ и $\omega C \gg G$, то наличием R и G можно пренебречь, и тогда $\alpha = 0$ и $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$. На практике этим условиям соответствуют относительно короткие высокочастотные линии, применяемые в радиотехнике.

Выражения коэффициента фазы β , фазовой скорости ϑ_ϕ и волнового сопротивления $\underline{Z}_B$ совпадают с таковыми для неискажающей линии. Длина волны линии без потерь

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{LC}}. \quad (9.30)$$

Заметим, что в соответствии с формулой (9.10) волновое сопротивление $\underline{Z}_B$ в линии без потерь ($R = 0$ и $G = 0$) является вещественным числом:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = z_B.$$

Ввиду того, что в линии без потерь $\alpha = 0$ и $\gamma = j\beta$, гиперболические функции преобразуются в тригонометрические * $\operatorname{ch} j\beta = \cos \beta$ и $\operatorname{sh} j\beta = j \sin \beta$.

Поэтому уравнения (9.15a) для комплексных токов и напряжений в любом месте линии на расстоянии y от ее конца принимают вид

* Справочник по математике, п.3.4.4.3 [9].

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y + j z_B I_2 \sin \beta y; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta y + j (\dot{U}_2 / z_B) \sin \beta y. \quad (9.31)$$

Рассмотрим два важных режима работы линии без потерь – холостой ход и короткое замыкание.

Холостой ход линии без потерь ($Z_{np} = \infty$, $\dot{I}_2 = 0$).

Из формул (9.31) для такого режима получаем

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y; \quad \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \beta y. \quad (9.32)$$

Выразив здесь β через λ в соответствии с формулой (9.30), находим

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right); \quad \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right). \quad (9.33)$$

Из этих формул следует:

а) в точках линии, где $\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) = 0 + k\pi$, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) = 0$ и $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) = \pm 1$.

Следовательно, в них $\dot{I}$ равно нулю, а $\dot{U}$ соответствует максимальному значению. В этих точках имеют место узлы тока и пучности напряжения;

б) в точках линии, где $\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) = 0 + k\pi/2$, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) = \pm 1$ и $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) = 0$.

В них $\dot{U}$ равно нулю, а $\dot{I}$ максимален. В этих точках имеют место узлы напряжения и пучности тока.

Таким образом, в конце линии без потерь ($y=0$) при холостом ходе находится узел тока и пучность напряжения. Далее с увеличением координаты y узлы и пучности чередуются через расстояние, равное четверти длины волны ($\lambda/4$). Так, при $y = \lambda/4$ имеем узел $\dot{U}$ и пучность $\dot{I}$; при $y = \lambda/2$ имеем пучность $\dot{U}$ и узел $\dot{I}$ и т.д. Это легко обнаружить, подставив указанные значения y в формулы (9.33).

Картина распределения пучностей и узлов для модулей тока и напряжения при холостом ходе линии без потерь показана на рис.9.3,а (модули комплексных напряжений и токов – величины всегда положительные).

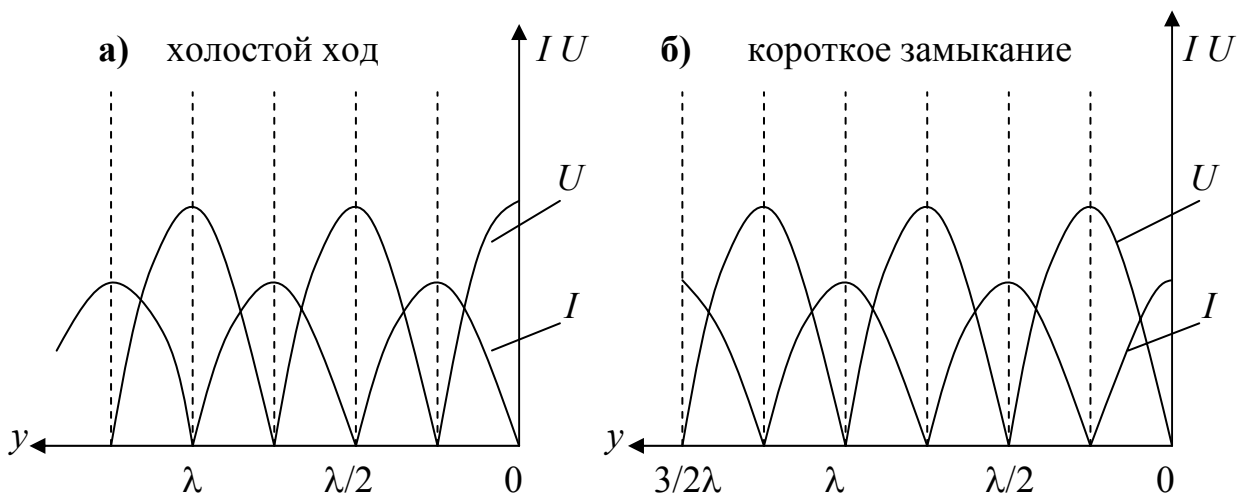


Рис.9.3

Короткое замыкание линии без потерь ($\underline{Z}_{np} = 0, \dot{U}_2 = 0$).

Из формул (9.31) для такого режима работы получаем

$$\dot{U} = j\dot{I}_2 z_B \sin \beta y = j\dot{I}_2 z_B \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta y = \dot{I}_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y. \quad (9.34)$$

Из этих формул следует:

а) в точках линии, где $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y = 0 + k\pi$, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y = 0$ и $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y = \pm 1$.

Следовательно, в них $\dot{U}$ равно нулю, а $\dot{I}$ максимален. В этих точках имеют место узлы напряжения и пучности тока;

б) в точках линии, где $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y = 0 + k\pi/2$, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y = \pm 1$ и $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y = 0$.

В них $\dot{U}$ достигает максимума, а $\dot{I}$ равно нулю. Следовательно, в них имеют место пучности напряжения и узлы тока.

Таким образом, в конце линии без потерь ($y=0$) при коротком замыкании находится узел напряжения и пучность тока. Далее с увеличением координаты y узлы и пучности чередуются через расстояние вдоль линии, равное четверти длины волны ($\lambda/4$). Так, при $y = \lambda/4$ имеем узел $\dot{I}$ и пучность $\dot{U}$; при $y = \lambda/2$ имеем пучность $\dot{I}$ и узел $\dot{U}$ и т.д.

Картина распределения пучностей и узлов для модулей тока и напряжения при коротком замыкании линии без потерь показана на рис.9.3,б.

Заметим, что узлы тока и узлы напряжения свидетельствуют здесь об отсутствии передачи энергии от источника к приемнику; в линии имеют место *стоячие волны*. Эффект стоячих волн наблюдается также при нагрузке линии чисто реактивным сопротивлением. Во всех других случаях имеют место *бегущие волны*.

9.10. Входное сопротивление линии

Входным сопротивлением $\underline{Z}_{BX}$ линии называется отношение $\dot{U}$ к $\dot{I}$ в любой ее точке на расстоянии y от ее конца:

$$\underline{Z}_{BX} = \dot{U} / \dot{I}, \quad (9.35)$$

где $\dot{U}$ и $\dot{I}$ соответствуют формулам (9.15 а).

Подробный анализ показывает, что модуль входного сопротивления с изменением координаты y колеблется между некоторыми максимумами и минимумами, которые чередуются вдоль координаты y через промежутки, равные $\lambda/4$.

При холостом ходе линии ($\underline{Z}_{np} = \infty, \dot{I}_2 = 0$) из уравнений (9.15 а) получаем для напряжения и тока

$$\dot{U}_{XX} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y; \quad \dot{I}_{XX} = (\dot{U}_2 / \underline{Z}_B) \operatorname{sh} \gamma y. \quad (9.36)$$

Тогда входное сопротивление линии на расстоянии y от ее конца

$$\underline{Z}_{BX(XX)} = \frac{\dot{U}_{XX}}{\dot{I}_{XX}} = \frac{\underline{Z}_B}{\operatorname{th} \gamma y}. \quad (9.37)$$

При коротком замыкании линии ($\underline{Z}_{np} = 0, \dot{U}_2 = 0$) из уравнений (9.15а) получаем для тока и напряжения в любой точке линии

$$\dot{U}_{K3} = \dot{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma y; \quad \dot{I}_{K3} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y. \quad (9.38)$$

Отсюда имеем входное сопротивление линии на расстоянии y от конца

$$\underline{Z}_{BX(K3)} = \frac{\dot{U}_{K3}}{\dot{I}_{K3}} = \underline{Z}_B \operatorname{th} \gamma y. \quad (9.38 \text{ а})$$

В частности, для линии без потерь с учетом того, что $\gamma = j\beta$ и $\operatorname{ch} j\beta = \cos \beta$, а $\operatorname{sh} j\beta = j \sin \beta$ для $\underline{Z}_{BX}$ при ХХ и КЗ, получаем*

$$\underline{Z}_{BX(XX)} = \frac{z_B}{j \operatorname{tg} \beta y} = \frac{z_B}{j \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) y}; \quad \underline{Z}_{BX(K3)} = z_B j \operatorname{tg} \beta y = z_B j \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) y. \quad (9.39)$$

Эти реактивные сопротивления через расстояние вдоль оси y , равное четверти длины волны, меняют свой характер (с емкости на индуктивность и наоборот), а по величине изменяются от 0 до $\pm \infty$.

График изменения этих сопротивлений с изменением координаты y показан на рис.9.4. Предоставляем читателю возможность убедиться в этом самостоятельно.

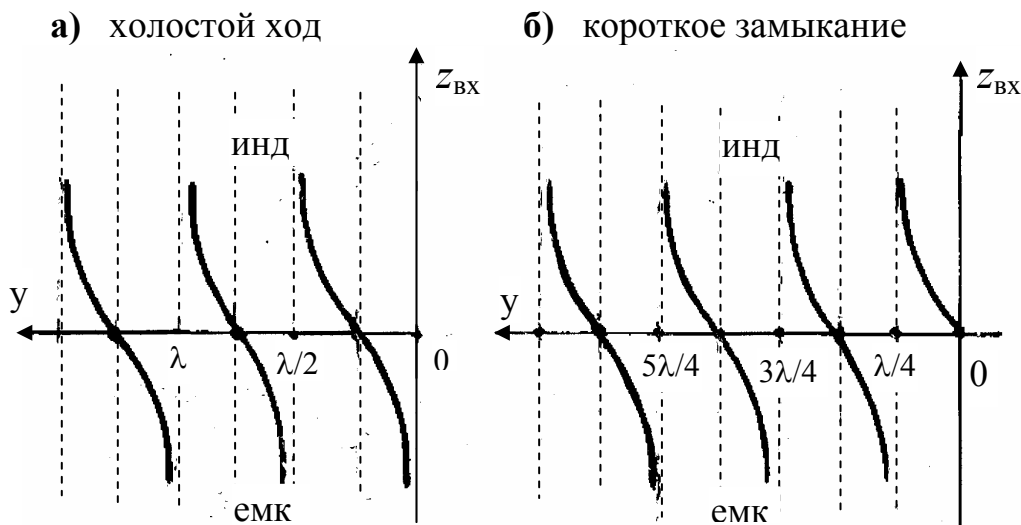


Рис.9.4

9.11. Экспериментальное определение параметров линии

Зная данные опытов холостого хода ($\underline{Z}_{BX(XX)}$) и короткого замыкания ($\underline{Z}_{BX(K3)}$), можно рассчитать характеристические параметры линии $\underline{Z}_B$ и γ . В самом деле:

а) умножив $\underline{Z}_{BX(XX)}$ на $\underline{Z}_{BX(K3)}$ в соответствии с (9.37) и (9.38), получим

$$\underline{Z}_{BX(XX)} \cdot \underline{Z}_{BX(K3)} = \underline{Z}_B^2 \quad \text{или} \quad \underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_{BX(XX)} \cdot \underline{Z}_{BX(K3)}}; \quad (9.40)$$

б) поделив $\underline{Z}_{BX(K3)}$ на $\underline{Z}_{BX(XX)}$, получим

* Справочник по математике, п.3.4.4.3 [9].

$$\frac{Z_{BX(K3)}}{Z_{BX(XX)}} = \operatorname{th}^2 \gamma \ell \quad \text{или} \quad \operatorname{th} \gamma \ell = \sqrt{\frac{Z_{BX(K3)}}{Z_{BX(XX)}}}. \quad (9.41)$$

Формулы (9.40) и (9.41) позволяют найти характеристические параметры линии.

9.12. Примеры расчетов длинных линий

Пример 9.1. Стальная двухпроводная линия связи имеет следующие первичные параметры: $R=38,4$ Ом/км; $L=88,4 \cdot 10^{-4}$ Гн/км; $C=5,12 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. $G=0,05 \cdot 10^{-6}$ См/км. Частота сигнала $f=800$ Гц. Определить вторичные параметры линии: волновое (характеристическое) сопротивление Z_B и коэффициент распространения γ .

Решение. 1. Волновое сопротивление определяем по формуле (9.10)

$$\begin{aligned} Z_B &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{38,4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 88,4 \cdot 10^{-4}}{0,05 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 5,12 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{\frac{38,4 + j44,5}{10^{-6}(0,05 + j25,7)}} = \\ &= \sqrt{\frac{58,8e^{+j49,17^\circ}}{10^{-6} \cdot 25,7e^{j89,87^\circ}}} = 1510e^{-j20,35^\circ} = (1415 - j525) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

2. Коэффициент распространения определяем по формуле (9.5)

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = (\alpha + j\beta) = \sqrt{58,8e^{j49,17^\circ} \cdot 10^{-6} \cdot 25,7e^{j89,87^\circ}} = \\ &= 38,9 \cdot 10^{-3} e^{j69,52^\circ} = (13,6 \cdot 10^{-3} + j36,4 \cdot 10^{-3}) \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = 13,6 \cdot 10^{-3}$ Нп/км, $\beta = 36,4 \cdot 10^{-3}$ рад/км.

Пример 9.2. Для некоторой линии с частотой $f=1000$ Гц известны вторичные параметры $Z_B = 500e^{-j37^\circ}$ Ом и $\gamma = 0,2e^{j45^\circ}$ км⁻¹. Определить первичные параметры линии R, G, L, C .

Решение. Из формул (9.5) и (9.10) следует, что $\gamma Z_B = R + j\omega L$ и $\gamma / Z_B = G + j\omega C$.

Следовательно:

$$\text{а) } R + j\omega L = 0,2e^{j45^\circ} \cdot 500e^{-j37^\circ} = 100e^{j8^\circ} = (99 + j13,9) \text{ Ом};$$

$$\text{б) } G + j\omega C = 0,2e^{j45^\circ} / 500e^{-j37^\circ} = 0,0557 \cdot 10^{-3} + j0,396 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} R &= 99 \text{ Ом/км}, L = \omega L / 2\pi f = 13,9 / 2\pi \cdot 1000 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}, G = 0,0557 \cdot 10^{-3} \text{ См/км}, \\ C &= \omega C / 2\pi f = 0,396 \cdot 10^{-3} / 2\pi \cdot 1000 = 0,063 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км.} \end{aligned}$$

Пример 9.3. Известны вторичные параметры линии связи:

$$\underline{Z}_B = 1510e^{-j20,21^\circ} \text{ Ом}, \quad \gamma = (\alpha + j\beta) = (13,6 \cdot 10^{-3} + j36,4 \cdot 10^{-3}) \text{ км}^{-1}.$$

К линии длиной $\ell = 38$ км подключен приемник с сопротивлением $Z_{np} = 1355e^{j21,1^\circ}$ Ом. Напряжение на входных зажимах линии $\dot{U}_1 = 10$ В при частоте $f = 800$ Гц. Определить напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ в нагрузке; ток $\dot{I}_1$ в начале линии; входное сопротивление $\underline{Z}_{BX}$ нагруженной линии; КПД линии.

Решение. 1. Напряжение в конце линии найдем, исходя из формул (9.15а). Примем в формуле для напряжения $y = \ell$ и получим $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch}\gamma\ell + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh}\gamma\ell$. Но $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_{np}$, и тогда

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch}\gamma\ell + \frac{\dot{U}_2 \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{np}} \text{sh}\gamma\ell = \dot{U}_2 \left(\text{ch}\gamma\ell + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_{np}} \text{sh}\gamma\ell \right).$$

Отсюда напряжение $\dot{U}_2$ на конце линии:

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\text{ch}\gamma\ell + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_{np}} \cdot \text{sh}\gamma\ell}.$$

Здесь $\gamma\ell = \ell(\alpha + j\beta) = 0,517 + j1,384$.

Из курса математики* известно, что

$$\text{ch}\gamma\ell = \text{ch}(\alpha\ell + j\beta\ell) = \text{ch}\alpha\ell \cos\beta\ell + j\text{sh}\alpha\ell \sin\beta\ell;$$

$$\text{sh}\gamma\ell = \text{sh}(\alpha\ell + j\beta\ell) = \text{sh}\alpha\ell \cos\beta\ell + j\text{ch}\alpha\ell \sin\beta\ell.$$

В свою очередь, $\text{ch}\alpha\ell$ и $\text{sh}\alpha\ell$ вычисляются по формулам

$$\text{ch}\alpha\ell = \frac{e^{\alpha\ell} + e^{-\alpha\ell}}{2}; \quad \text{sh}\alpha\ell = \frac{e^{\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}}{2}.$$

Произведя подробные вычисления, получаем, что

$$\text{ch}\gamma\ell = 0,56e^{j68^\circ} \quad \text{и} \quad \text{sh}\gamma\ell = 1,114e^{j85^\circ}.$$

При этом напряжение на конце линии

$$\dot{U}_2 = \frac{10}{0,56e^{j68^\circ} + \frac{1510e^{-j20,35^\circ}}{1355e^{j21,1^\circ}} 1,114e^{j85^\circ}} = 5,78e^{-j52,3^\circ} \text{ В}.$$

Ток в нагрузке

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{np}} = \frac{5,78e^{-j52,3^\circ}}{1355e^{j21,1^\circ}} = 4,27 \cdot 10^{-3} e^{-j73,35^\circ} \text{ А}.$$

2. Для нахождения тока в начале линии используем формулы (9.15 а).

Принимая в формуле для тока $y = \ell$, получаем

* Справочник по математике, п.2.5.2.3.3 и 3.4.4.3 [9].

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma \ell + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma \ell = 4,27 \cdot 10^{-3} e^{-j73,35^\circ} \cdot 0,56 e^{j68^\circ} + \\ &+ \frac{5,78 e^{-j52,3^\circ}}{1510 e^{-j20,21^\circ}} \cdot 1,114 e^{j85^\circ} = 5,78 \cdot 10^{-3} e^{j32,8^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

3. Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{10}{5,78 \cdot 10^{-3} e^{j32,8^\circ}} = 1731 e^{-j32,8^\circ} \text{ Ом.}$$

4. КПД любой электротехнической установки, как известно, есть отношение активной мощности P_2 на ее выходе к активной мощности P_1 на входе: $\eta = P_2 / P_1$.

Активная мощность на выходе линии (на ее конце)

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_2 \dot{I}_2^* \right] = \operatorname{Re} \left[5,78 e^{-j52,3^\circ} \cdot 4,27 \cdot 10^{-3} e^{+j73,35^\circ} \right] = 23,1 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Активная мощность на входе линии (в начале)

$$P_1 = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_1 \dot{I}_1^* \right] = \operatorname{Re} \left[10 \cdot 5,78 \cdot 10^{-3} e^{-j32,8^\circ} \right] = 48,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Напомним, что в этих формулах (гл.4) $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2^*$ - комплексные токи, сопряженные известным токам $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$.

Таким образом, КПД линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{23,1}{48,6} = 0,475.$$

Пример 9.4. Для линии, приведенной в примере 9.3, определить коэффициенты отражения по напряжению и по току.

Решение. Коэффициенты отражения определяем из (9.28).

Для волны напряжения

$$\begin{aligned} n_u &= \frac{\underline{Z}_{np} - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_B} = \frac{1355 e^{j21,1^\circ} - 1510 e^{-j20,35^\circ}}{1355 e^{j21,1^\circ} + 1510 e^{-j20,35^\circ}} = \frac{(1264 + j488) - (1417 - j522)}{(1264 + j488) + (1417 - j522)} = \\ &= \frac{(-206 + j1010)}{(2681 - j34)} = \frac{1031 e^{j101,5^\circ}}{2681 e^{-j0,7^\circ}} = 0,38 e^{j102^\circ}. \end{aligned}$$

Для волны тока $n_i = -n_u = -0,38 e^{j102^\circ}$.

Пример 9.5. Для линии с известным характеристическим сопротивлением $\underline{Z}_B = 1510 e^{-j20,21^\circ}$ найти мгновенные значения напряжений прямой и обратной волны на ее конце ($y=0$), если известно, что $U_2=10$ В и сопротивление $\underline{Z}_{np} = 1355 e^{j21,1^\circ}$.

Решение. 1. Определяем комплексный ток в конце линии, воспользовавшись формулой закона Ома:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{np}} = \frac{10}{1355e^{j21,1^\circ}} = 0,0074e^{-j21,1^\circ} \text{ А.}$$

2. Определяем комплексные действующие значения прямой и обратной волны напряжения в конце линии ($y = 0$), используя формулы (9.14 а):

$$\dot{U}_\varphi = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_B)e^{j0}; \quad \dot{U}_\psi = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_B)e^{j0}.$$

$$\text{а) } \dot{U}_\varphi = \frac{10 + 0,0074e^{-j21,1^\circ} \cdot 1510e^{j20,21^\circ}}{2} = \frac{10 + (8,72 - j7,85)}{2} = \\ = (9,36 - j3,93) = 10,3e^{-j22,7^\circ} \text{ В.}$$

$$\text{б) } \dot{U}_\psi = \frac{10 - 0,0074e^{-j21,1^\circ} \cdot 1510e^{j20,21^\circ}}{2} = \frac{10 - (8,72 - j7,85)}{2} = \\ = (0,64 + j3,93) = 3,98e^{j80,7^\circ} \text{ В.}$$

3. Определяем мгновенные значения напряжений прямой и обратной волны в конце линии

$$u_\varphi = 10,3 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - 22,7^\circ) \text{ В;} \quad u_\psi = 3,98 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 80,7^\circ) \text{ В.}$$

4. Проверку расчетов осуществляем путем нахождения коэффициента отражения волны по напряжению, используя его определение данное в п.9.7:

$$n_u = \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{U}_\varphi} = \frac{3,98e^{j80,7^\circ}}{10,3e^{-j22,7^\circ}} = 0,38e^{j103,4^\circ}.$$

Этот результат практически совпадает с величиной коэффициента отражения, полученного для тех же условий в примере 9.4 иным способом. Следовательно, все вышеприведенные расчеты выполнены верно.

Пример 9.6. Известны первичные параметры телефонной линии: $R = 14 \text{ Ом/км}$; $L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$; $G = 5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$; $C = 6,35 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$. Определить, является ли эта линия неискажающей и, если нет, как нужно изменить ее параметры, чтобы линия стала неискажающей.

Решение. Для неискажающей линии должно иметь место соотношение $RC = GL$ или $R/L = G/C$.

В нашем примере

$$\frac{R}{L} = \frac{14}{2 \cdot 10^{-3}} = 7 \cdot 10^3; \quad \frac{G}{C} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{6,35 \cdot 10^{-9}} = 0,787 \cdot 10^3.$$

Таким образом, линия является искажающей. Для того чтобы линия стала неискажающей, нужно на каждый километр ее длины включить такую дополнительную индуктивность $L_{дон}$, чтобы отношение R/L стало равным $0,787 \cdot 10^3$. Отсюда результирующая индуктивность $R_{рез}$ для неискажающей линии

$$L_{рез} = \frac{R}{0.787 \cdot 10^3} = \frac{14}{0.787 \cdot 10^3} = 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км.}$$

Тогда дополнительная индуктивность, необходимая для придания линии свойств неискажающей:

$$L_{дон} = L_{рез} - L = 17,8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = 15,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км.}$$

Пример 9.7. Определить вторичные параметры неискажающей линии, рассмотренной в примере 9.6, и скорость распространения волны.

Решение. 1. Находим волновое сопротивление в соответствии с формулами (9.29)

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{6,35 \cdot 10^{-9}}} = 1675 \text{ Ом.}$$

2. Находим коэффициент распространения $\gamma = (\alpha + j\beta)$ неискажающей линии в соответствии с формулами (9.29):

$$\alpha = \sqrt{RG} = \sqrt{14 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 8,37 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км,}$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{17,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}} = 6,68 \text{ рад/км.}$$

3. Находим фазовую скорость волны в неискажающей линии

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{17,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}}} = \frac{1}{\sqrt{113 \cdot 10^{-12}}} = 0,094 \cdot 10^6 = 9,4 \cdot 10^4 \text{ км/с.}$$

Пример 9.8. Энергия передается от генератора к излучающей системе с помощью линии (фидера) с параметрами: $L = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м, } C = 7,1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$

Потерями в фидере можно пренебречь ($R = 0, G = 0$). Частота генератора $f = 10^8 \text{ Гц}$. Определить вторичные параметры линии, длину волны, входное сопротивление отрезка фидера длиной, равной $1/8$ длины волны при холостом ходе и коротком замыкании.

Решение. 1. Определяем вторичные параметры линии:

а) волновое сопротивление линии без потерь является вещественным числом (п.9.9) $Z_B = z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1,57 \cdot 10^{-6}}{7,1 \cdot 10^{-12}}} = 470 \text{ Ом;}$

б) коэффициент затухания $\alpha = 0$;

в) коэффициент фазы β :

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \sqrt{LC} = 2\pi \cdot 10^8 \sqrt{1,57 \cdot 10^{-6} \cdot 7,1 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 2\pi \cdot 10^8 \sqrt{11,15 \cdot 10^{-18}} = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 3,34 \cdot 10^{-9} = 2,1 \text{ рад/м.} \end{aligned}$$

2. Длина волны в соответствии с формулой (9.30) составляет

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2,1} = 3 \text{ м.}$$

3. Входное сопротивление фидера при холостом ходе $Z_{BX(XX)}$ и коротком замыкании $Z_{BX(KЗ)}$ находим с помощью формул (9.39). Полагая, $y = \lambda/8$, получаем $\beta y = \frac{2\pi}{\lambda} y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$ и тогда $\operatorname{tg} \beta \ell = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. При этом $Z_{BX(XX)} = \frac{Z_B}{j \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right)} = -j Z_B = -j 470 \text{ Ом}$; $Z_{BX(KЗ)} = j \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = Z_B = j 470 \text{ Ом}$.

Пример 9.9. У линии без потерь длиной $\ell = 35 \text{ м}$ длина волны составляет $\lambda = 50 \text{ м}$, а волновое сопротивление $z_B = 505 \text{ м}$. Определить входное сопротивление этой линии при коротком замыкании ($U_2 = 0$) и при холостом ходе ($I_2 = 0$) на ее конце.

Решение. Для определения входного сопротивления линии воспользуемся формулами (9.39), у которых $\frac{2\pi}{\lambda} \ell = \frac{6,28}{50} \cdot 35 = 4,396 \text{ рад}$ (или 252°) и $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \ell = \operatorname{tg} 252^\circ = 3,08$. Тогда $Z_{BX(XX)} = \frac{z_B}{j \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell \right)} = \frac{505}{j 3,08} = -j 164 \text{ Ом}$;

$$Z_{BX(KЗ)} = z_B j \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell \right) = j 505 \cdot 3,08 = j 1555 \text{ Ом}.$$

Пример 9.10. Определить комплексные ток и напряжение в начале линии предыдущего примера при разомкнутых зажимах на ее конце, если $U_2 = 10 \text{ В}$.

Решение. Для определения комплексного тока и комплексного напряжения, воспользуемся формулами (9.33), в которых $\frac{2\pi}{\lambda} \ell = 4,396 \text{ рад}$ (или 252°), при этом $\cos \frac{2\pi}{\lambda} \ell = \cos 252^\circ = -0,309$; $\sin \frac{2\pi}{\lambda} \ell = \sin 252^\circ = -0,95$.

Тогда $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \ell = 10(-0,309) = -3,09 \text{ В}$ и $\dot{I}_1 = j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \ell = -j 0,0188 \text{ А}$.

Проверка. В соответствии с формулой (9.35) входное сопротивление данной линии в ее начале $Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{-3,09}{-j 0,0188} = -j 164,3 \text{ Ом}$ соответствует сопротивлению $Z_{BX(XX)}$, рассчитанному в предыдущем примере иным способом. Поэтому можно считать, что все вышеприведенные расчеты выполнены верно.

Пример 9.11. Дана линия без потерь, первичные параметры которой $L = 1,67 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$, $C = 6,67 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Длина линии $\ell = 5 \text{ м}$. Она нагружена на чисто активное сопротивление $Z_{np} = 5 z_B$. Напряжение на нагрузке $U_2 = 10 \text{ В}$ при частоте $f = 10^8 \text{ Гц}$. Определить напряжение и ток в начале линии, а также входное сопротивление линии.

Решение. 1. Определяем вторичные параметры $\underline{Z}_B$ и β

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-6}}{6,67 \cdot 10^{-12}}} = 500 \text{ Ом};$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = 2\pi \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1,67 \cdot 10^{-6} \cdot 6,67 \cdot 10^{-12}} = 2,1 \text{ рад/м.}$$

2. Определяем сопротивление приемника

$$\underline{Z}_{np} = R_{np} = 5z_B = 5 \cdot 500 = 2500 \text{ Ом.}$$

3. Определяем комплексные напряжение и ток в начале линии при расчете расстояний от конца, используя формулы (9.31) и полагая в них $y = \ell$:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta \ell + j \dot{I}_2 z_B \sin \beta \ell; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \beta \ell + j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \beta \ell.$$

$$\text{Здесь } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_{np}} = \frac{10}{2500} = 0,004; \quad \beta \ell = 2,1 \cdot 5 = 10,5 \text{ рад или } \beta \ell = 602^\circ;$$

$$\cos \beta \ell = 0,47; \quad \sin \beta \ell = -0,88.$$

$$\text{Тогда } \dot{U}_1 = 10(-0,47) + j0,004 \cdot 500 \cdot (-0,88) = (4,7 - j1,76) = 5,02e^{j200^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_1 = 0,004 \cdot (-0,47) + j0,02(-0,88) = (-1,9 - j1,8) \cdot 10^{-3} = 1,81 \cdot 10^{-3} e^{j264^\circ} \text{ А.}$$

Здесь при переводе комплексных напряжения и тока из одной формы записи в другую использовали рис.4.4 и приложенные к нему формулы.

4. Входное сопротивление линии в ее начале (на расстоянии $\ell = 5$ м от ее конца)

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{5,02e^{-j200^\circ}}{1,81 \cdot 10^{-3} e^{j264^\circ}} = 2773e^{-j64^\circ} \text{ Ом.}$$

Пример 9.12. Измерения сопротивлений холостого хода и короткого замыкания телефонной линии длиной $\ell = 5$ км на частоте $f = 1000$ Гц дали следующие результаты:

$$\underline{Z}_{BX(XX)} = 535 \cdot e^{-j64^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{BX(KЗ)} = 467,5e^{-j10^\circ} \text{ Ом.}$$

Определить вторичные и первичные параметры длинной линии.

Решение.1. Определяем вторичные параметры линии $\underline{Z}_B, \gamma$. Используя формулы (9.40) и (9.41), получаем

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_{BX(XX)} \cdot \underline{Z}_{BX(KЗ)}} = \sqrt{535e^{-j64^\circ} \cdot 467,5e^{-j10^\circ}} = 500e^{-j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\text{th}\gamma\ell = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{BX(KЗ)}}{\underline{Z}_{BX(XX)}}} = \sqrt{\frac{467,5e^{-j10^\circ}}{535e^{-j64^\circ}}} = 0,935e^{+j27^\circ}.$$

$$\text{Известно } *, \text{ что } \text{th}\gamma\ell = \frac{e^{2\gamma\ell} - 1}{e^{2\gamma\ell} + 1}. \text{ Отсюда имеем } e^{2\gamma\ell} = \frac{1 + \text{th}\gamma\ell}{1 - \text{th}\gamma\ell}.$$

* Справочник по математике, п. 2.5.2.3.1 [9].

Используя полученное значение $\text{th}\gamma\ell$ и учитывая, что $\gamma = (\alpha + j\beta)$, находим

$$e^{2\gamma\ell} = e^{2\alpha\ell} \cdot e^{j2\beta\ell} = \frac{1 + 0,935e^{j27^\circ}}{1 - 0,935e^{+j27^\circ}} = 4,11e^{j81,2^\circ}.$$

Здесь $e^{2\alpha\ell} = 4,11 = e^{1,414}$; $e^{j2\beta\ell} = e^{j81,2^\circ}$. Тогда, сравнивая левую и правую части последнего соотношения, находим $2\alpha\ell = 1,414$ и $2\beta\ell = 1,414$.

Отсюда окончательно получаем, что $\alpha = 1414/2\ell = 0,1414$ Нп;

$\beta = 0,1414$ рад. Тогда $\gamma = (\alpha + j\beta) = 0,1414 + j0,1414 = 0,2e^{j45^\circ}$ км⁻¹.

2. Определяем первичные параметры линии R , G , L и C .

В соответствии с формулами (9.5) и (9.10), получаем (см. пример 9.2)

$$\gamma \underline{Z}_B = R + j\omega L \quad \text{и} \quad \gamma / \underline{Z}_B = G + j\omega C.$$

Из этих формул находим:

а) $\gamma \underline{Z}_B = 0,2e^{j45^\circ} \cdot 500e^{-j37^\circ} = 100e^{j8^\circ} = (99 + j13,9)$, следовательно, $R = 99$ Ом/км; $X_L = \omega L = 13,9$ Ом/км и $L = X_L / 2\pi f = 0,00221$ Гн/км;

$$\text{б) } \frac{\gamma}{\underline{Z}_B} = \frac{0,2e^{j45^\circ}}{500e^{-j37^\circ}} = 0,0004e^{j82^\circ} = (0,0557 \cdot 10^{-3} + j0,396 \cdot 10^{-3}),$$

следовательно, $G = 0,0557 \cdot 10^{-3}$ См/км; $b_C = \omega C = 0,396 \cdot 10^{-3}$ См/км и $C = b_C / 2\pi f = 63,3 \cdot 10^{-6}$ Ф/км.

9.13. Дополнительные задания к главе 9. Вопросы и примеры для самотестирования

1. Известны первичные параметры однородной линии:

$R = 6,5$ Ом/км; $L = 2,29 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; $C = 5,22 \cdot 10^{-9}$ Ф/км; $G = 50 \cdot 10^{-8}$ См/км. Определить волновое сопротивление линии $\underline{Z}_B$, коэффициент распространения γ и фазовую скорость волны ϑ_ϕ при частоте приложенного напряжения $f = 1000$ Гц.

Ответы: $\underline{Z}_B = 694e^{-j12^\circ}$; $\gamma = (47,3 + j222) \cdot 10^{-4}$ км⁻¹; $\vartheta_\phi = 282882$ км/с.

2. Известны параметры однородной линии: $R = 5$ Ом/км;

$C = 5 \cdot 10^{-3}$ мкФ/км; $G = 10^{-6}$ См/км. При какой индуктивности L линия будет неискажающей?

Ответ: $L = 25$ мГн/км.

3. Линия без потерь длиной $\ell = 35$ м имеет длину волны $\lambda = 50$ м и волновое сопротивление $\underline{Z}_B = 505$ Ом. Определить входное сопротивление этой линии при ХХ на ее конце.

Ответ: $\underline{Z}_{BX(XX)} = 164e^{-j90^\circ}$ Ом.

4. Линия без потерь длиной $\ell = 35$ м имеет длину волны $\lambda = 50$ м и волновое сопротивление $\underline{Z}_B = 505$ Ом. Определить действующие значения тока

и напряжения в начале этой линии при замкнутых накоротко ее выходных зажимах и токе в конце линии $\dot{I}_2 = 0,1 \text{ А}$.

Ответы: $\dot{U}_1 = -j4,8 \text{ В}$; $\dot{I}_1 = -0,0031 \text{ А}$.

5. Линия без потерь обладает параметрами, указанными в примере 9.8. Определить коэффициенты $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ и $\underline{D}$ симметричного четырехполюсника, эквивалентного данной линии, если длина линии ℓ равна удвоенной длине ее волны.

Ответы: $\underline{A} = \underline{D} = 0,89$; $\underline{B} = -j216 \text{ Ом}$; $\underline{C} = -j0,001 \text{ См}$.

6. В условиях примера 9.8 определить комплексные ток и напряжение в начале линии, если ее длина $\ell = 6 \text{ м}$ и линия нагружена на сопротивление, равное волновому при напряжении на ее выходных зажимах $U_2 = 10 \text{ В}$.

Ответы: $\dot{U}_1 = 10e^{-j27,8^\circ} \text{ В}$; $\dot{I}_1 = 0,0213e^{-j27,8^\circ} \text{ А}$.

7. Рассмотреть примеры с решениями 17 и 18 из методического сборника [7].

Заключение

Уважаемые студенты! Завершено рассмотрение теории линейных электрических цепей постоянного и синусоидального тока при установившихся режимах их работы. Вами изучена теория и освоены расчеты таких цепей, что вне всякого сомнения, пригодится при изучении последующих профилирующих дисциплин, а также в практической работе.

В следующем семестре Вас ожидает рассмотрение вопросов, касающихся расчетов линейных электрических цепей при воздействии на них периодических несинусоидальных напряжений, расчетов переходных процессов в линейных цепях различными методами, а также способов расчета нелинейных электрических и магнитных цепей.

В третьем семестре (из тех, что указаны в предисловии) те из Вас, кто изучает "Теоретические основы электротехники", будут осваивать теорию электромагнитного поля, а остальные – курс электроники.

Автор данного учебного пособия желает Вам дальнейших успехов в изучении этих важнейших для Вашего инженерного образования электротехнических дисциплин!

Библиографический список

Основная:

1. Нейман Л.Р., Демирчан К.С. . Теоретические основы электротехники. В 2 т. Т 1. – 3-е изд. - Л.: Энергоиздат, 1981.
2. Бессонов Л.А.. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд.-М.: Гардарики, 2002.
3. Атабеков Г.И.. Теоретические основы электротехники. Т.1.- М.: Энергия, 1978.

4. Основы теории цепей. И.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. - М.: Энергоатомиздат, 1989.

5. Шебес М.Р., Каблукова М.В.. Задачник по теории линейных электрических цепей. - М.: Высш.школа, 1990.

Дополнительная:

6. Евсеев М.Е.. Теоретические основы электротехники. Установившиеся процессы в линейных электрических цепях: Сборник тестовых карт.- СПб.: СЗТУ, 2004.

7. Евсеев М.Е.. Теоретические основы электротехники. Установившиеся процессы в линейных электрических цепях: Рабочая программа, задание на контрольную работу, методические указания к ее выполнению, типовые примеры с решениями. - СПб.: СЗТУ, 2004.

8. Теоретические основы электротехники. Установившиеся процессы в линейных электрических цепях: Методические указания к выполнению лабораторных работ. / Сост. М.Е.Евсеев и др.- СПб.: СЗПИ, 1999.

9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1986.

10. Аполлонский С.М., Леонтьев В.В. Электротехника и электроника. Трехфазные электрические цепи.-СПб.: СЗТУ, 2002.

Предметный указатель

А Активная

- мощность 50
- проводимость 39

Активное сопротивление 39

Активный

- двухполюсник 59
- четырехполюсник 210

Амплитуда

- напряжения 32
- напряжения комплексная 64
- синусоидального напряжения 32
- синусоидального тока 32
- тока комплексная 64

Амперметр 7

Аналогия с цепями постоянного тока 74

Асинхронный двигатель 164

Б Баланс мощностей цепи

- постоянного тока 29
 - синусоидального тока 115
- Бегущие волны в линии 217

В Ваттметр 19

Вектор вращающийся,

- напряжения 33,34
- тока 33,34

Векторная диаграмма 36

Ветвь цепи 5

Взаимная

- индуктивность 119
- проводимость узлов 108

Взаимное сопротивление контуров 103

Витки катушки 11

Волновое сопротивление 215

Волны

- бегущие 217
- стоячие 223

Вольт-амперная характеристика 26

Вращающееся магнитное поле 163

Встречное включение индуктивно связанных катушек 120

Входное сопротивление четырехполюсника 186

Г Генератор трехфазный 135

Графическое изображение

- идеальных элементов 6
- синусоидального напряжения 33
- синусоидального тока 33

Д Двухполюсник

- активный 59
- пассивный 59

Действующее значение

- синусоидального напряжения 38
- синусоидального тока 38

Диаграмма векторная 36

Диэлектрическая проницаемость абсолютная 11

Длина волны в линии 218

Двухполюсник

- активный 59
- пассивный 59

Е Емкостное реактивное сопротивление 40

Емкость

- параметр цепи 11
- идеальный элемент 13

З Закон

- Кирхгофа 1-й 18, 34, 73
- Кирхгофа 2-й 18, 34, 73
- Ома 18, 39, 40, 70, 72
- электромагнитной индукции 15

Заряд электрический 11

И Идеальные элементы цепи 12

Измерение

- мощности 19
- напряжения 21
- тока 21

Индуктивная катушка 12,118

Индуктивное реактивное
сопротивление 39

Индуктивно связанные
катушки 118

Индуктивность

- идеальный элемент 13
- параметр цепи 10

Индукцированная ЭДС 118,119

Источник ЭДС и тока 6, 93

К Каскадное соединение

четырёхполюсников 206

Катушка индуктивности 12, 13,
14, 118

Комплексная

- мощность 72
- проводимость 69

Комплексное

- напряжение 64
- сопротивление 69

Комплексные числа 64,65

Комплексный ток 64

Конденсатор 14

Контур цепи 5

- зависимый 102
- независимый 102

Короткое замыкание

- линии 222
- четырёхполюсника 186

Коэффициент

- магнитной связи 122
- мощности 51
- полезного действия 51
- распространения линии 214
- фазы четырёхполюсника 192

Л Линия

- без искажений 221
- без потерь 221

- однородная 212

- электропередачи 138

Линейные

- напряжения 137, 139
- токи 137,141
- цепи 11

М Магнитная проницаемость

абсолютная 11

Матрицы четырёхполюсника
183, 207

Мгновенное значение

- напряжения 32
- тока 32

Мера (постоянная) передачи
четырёхполюсника 192

Метод

- законов Кирхгофа 98
- контурных токов 102
- наложения 113
- симметричных составляющих 166
- узловых напряжений 107
- эквивалентного источника 111

Мостовая схема 92

Мощность

- цепи постоянного тока 19
- активная 50
- реактивная 50
- полная 50
- комплексная 72
- трёхфазной цепи 160

Н Наложения метод 113

Напряжение

- действующее 38
- комплексное 64
- линейное 138,140
- мгновенное 32
- фазное 138,140

Начальная фаза

- напряжения 32
- тока

Нейтральные точки генератора
и приемника 136

Нелинейные цепи 11
Несимметричные трехфазные
цепи 142

О Однородная линия 212
Опытное определение
- взаимной индуктивности 124
- параметров двухполюсника
161
- параметров четырехполюс-
ника 195
Осциллограф 3
Отраженные волны в линии
219,220

П Падающие волны в линии 219
Параллельное соединение
- сопротивлений 20
- четырехполюсников 206
Параллельно-последовательное
соединение
- сопротивлений 21
- четырехполюсников 206
Параметры
- четырехполюсника 182, 186
- электрической цепи 10
Пассивные
- двухполюсники 58
- четырехполюсники 181
Переходные процессы 26
Период синусоидального
- напряжения 32
- тока 32
П-образная схема замещения
четыреполюсника 189
Последовательное соединение
- сопротивлений 19
- четырехполюсников 206
Последовательно-параллельное
соединение
- сопротивлений 20
- четырехполюсников 206
Потокосцепление 118, 119
Преобразование цепей 89
Принцип наложения 113

Проводимость
- активная 39
- взаимная узлов 107
- комплексная 69
- полная 46
- реактивная 39
- собственная узлов цепи 108
Пульсирующее магнитное
поле 163
Пучности токов и напряжений
стоячих волн 222

Р Разветвленная цепь 80
Расчет цепей методом
- законов Кирхгофа 26, 98
- контурных токов 102
- наложения 113
- узловых напряжений 107
- эквивалентного источника 111
Реактивная
- мощность 50
- проводимость 39,40
Реактивное сопротивление 39, 40
Резонанс
- в разветвленных цепях 84
- напряжений 43
- токов 47
Резонансная частота 43,47, 85
Ротор генератора 135

С Сдвиг фаз 37
Символический метод
расчета 63, 64, 69, 72
Симметричные системы ЭДС,
токов и напряжений 135
Симметричные составляющие
- прямой, обратной и нулевой
последовательностей 167
- трехфазной системы ЭДС,
токов и напряжений 167, 168
Симметричные трехфазные
цепи 142
Синусоидальные токи
и напряжения 31
Скольжение 166

Скорость волны в линии 219
 Сложные цепи 97
 Смешанное соединение сопротивлений 20, 21
 Собственная проводимость узлов 108
 Собственное

- сопротивление независимого контура 103
- затухание четырехполюсника 192

Согласное включение индуктивно связанных катушек 121
 Согласование четырехполюсника с нагрузкой 194, 196
 Соединение сопротивлений

- звездой 92, 136
- последовательное 19, 41, 75
- параллельное 20, 22, 45, 75
- смешанное 20, 21, 22, 75
- треугольником 92, 142

Соединение четырехполюсников

- каскадное 206, 207
- параллельное 206, 207
- параллельно-последовательное 206, 207
- последовательное 206, 207
- последовательно-параллельное 206, 207

Сопротивление

- активное 39
- емкостное 42
- индуктивное 42
- комплексное 69
- полное 42
- токам прямой, обратной и нулевой последовательностей 166, 170, 171
- характеристическое 191

Статор трехфазного генератора 135
 Стоячие волны в линии 223
 Схемы замещения

- двухполюсника 59
- четырехполюсника 189

- эквивалентная 58

Схема цепи 5

Т Телеграфные уравнения 213
 Теорема об эквивалентном источнике 111
 Т-образная эквивалентная схема четырехполюсника 189
 Ток

- комплексный 64
- контурный 102
- линейный 137, 140
- периодический 31
- постоянный 18
- синусоидальный 31
- фазный 137, 140

Треугольник

- мощностей 50, 51
- напряжений 42
- проводимостей 44
- сопротивлений 42
- токов 44

Трехфазная электрическая цепь

- несвязанная 135
- несимметричная 142
- связанная звездой 136
- связанная треугольником 140
- симметричная 142

Трехфазный генератор 135

У Угловая частота 31, 33
 Угол сдвига фаз 37
 Удельная электрическая проводимость 11
 Узел цепи 5
 Узлы стоячих волн 223
 Уравнения

- баланса мощностей 29, 115
- второго закона Кирхгофа 18
- длинной линии 212
- первого закона Кирхгофа 18, 34, 73
- четырехполюсника 182

Условия

- эквивалентности цепей 58
- резонанса 84

Установившийся режим работы цепи 26

Ф Фаза

- напряжения 32
- начальная 32
- тока 32

Фазные

- напряжения 137, 140
- токи 137, 140

Фазовая скорость волны 219

Фазовый множитель трехфазной цепи 136

Х Характеристики нелинейных элементов 11

Характеристические параметры

- длинной линии 217
- четырехполюсника 191

Холостой ход

- линии 223
- четырехполюсника 186

Ц Цепь

- линейная 11
- нелинейная 11
- с распределенными параметрами 212
- электрическая 5

Ч Частота

- в герцах 31
- вращения магнитного поля 163
- резонансная 43, 47, 84
- угловая 31

Частотные характеристики 43, 47

Четырехполюсник 181

Э Эквивалентные

- преобразование цепей 59, 89
- электрические цепи 59

Электрическая схема цепи 5

Элементы электрических цепей

- ветвь, узел, контур 5
- взаимная индуктивность 119
- сопротивление 10
- емкость 11
- индуктивность 10
- линейные 11
- нелинейные 11

Энергетический баланс цепи 29, 115

Энергия магнитного поля 10

- тепловая 10
- электрического поля 11

Оглавление

Предисловие	3
Введение	4
Глава 1. Электрическая цепь, ее элементы и параметры	5
1.1. Определение цепи	5
1.2. Графическое изображение электрической цепи и ее элементов	5
1.3. О направлениях действия ЭДС токов и напряжений	6
1.4. Законы электрических цепей	9
1.5. Параметры электрических цепей	10
1.6. Понятие о линейных и нелинейных электрических цепях	11
1.7. Идеальные элементы электрической цепи	12
1.8. Соотношение между током и напряжением в идеальных элементах цепи	15
1.9. Основная задача анализа электрической цепи	16
1.10. Дополнительные задания к главе 1. Вопросы и примеры для самотестирования	16
Глава 2. Цепи постоянного тока	18
2.1. Некоторые особенности цепей постоянного тока	18
2.2. Закон Ома и законы Кирхгофа для цепей постоянного тока	18
2.3. Мощность цепи постоянного тока	19
2.4. Расчет цепей постоянного тока с одним источником энергии	19
2.5. Примеры расчета цепей постоянного тока с одним источником энергии	21
2.6. Понятие об установившихся и переходных режимах работы электрических цепей	26
2.7. Расчет сложных цепей постоянного тока непосредственно по 1-му и 2-му законам Кирхгофа	26
2.8. О других методах расчета сложных цепей постоянного тока	29
2.9. Баланс мощностей цепи постоянного тока	29
2.10. Дополнительные задания к главе 2. Вопросы и примеры для самотестирования	30
Глава 3. Цепи синусоидального тока и их расчет с помощью векторных диаграмм	31
3.1. Осциллограмма синусоидального тока. Основные определения	31
3.2. Аналитическая запись синусоидальных токов и напряжений	32
3.3. Способы графического изображения синусоидальных токов и напряжений	33
3.4. Векторные диаграммы и их применение к расчету цепей синусоидального тока	34
3.5. Законы Кирхгофа в векторной форме записи	36
3.6. Фазовые соотношения между синусоидальными токами и напряжениями	37
3.7. Действующие значения синусоидальных токов и напряжений	38

3.8. Простейшие цепи синусоидального тока	38
3.9. Зависимость активного, индуктивного и емкостного сопротивлений от частоты	40
3.10. Цепь с последовательным соединением R, L, C	42
3.11. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением R, L, C . Резонанс напряжений	43
3.12. Цепь с параллельным соединением R, L и C	46
3.13. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением R, L, C . Резонанс токов	47
3.14. Мощность цепи синусоидального тока	50
3.15. Понятие о коэффициенте мощности и коэффициенте полезного действия	52
3.16. Примеры анализа и расчета цепей синусоидального тока с использованием векторных диаграмм	53
3.17. Понятие о двухполюсниках и об эквивалентных цепях	59
3.18. Дополнительные задания к главе 3. Вопросы и примеры для самотестирования	62
Глава 4. Символический метод. Расчет разветвленных цепей с одним источником. Эквивалентные преобразования	63
4.1. Введение. Основы метода	63
4.2. Комплексные токи и напряжения	64
4.3. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость	69
4.4. Комплексная мощность	72
4.5. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи	73
4.6. Аналогия с цепями постоянного тока	74
4.7. Решение простейших примеров и задач на применение символического метода	74
4.8. Расчет разветвленных цепей с одним источником энергии	80
4.9. Резонансные явления в разветвленных цепях	84
4.10. Эквивалентные преобразования цепей	89
4.11. Дополнительные задания к главе 4. Вопросы и примеры для самотестирования	96
Глава 5. Методы расчета сложных цепей синусоидального тока	98
5.1. Введение	98
5.2. Метод расчета, основанный на непосредственном применении 1-го и 2-го законов Кирхгофа	98
5.3. Метод контурных токов	102
5.4. Метод узловых напряжений (узловых потенциалов)	107
5.5. Метод эквивалентного источника	111
5.6. Метод наложения	113
5.7. Баланс мощностей цепи синусоидального тока	115
5.8. Дополнительные задания к главе 5. Вопросы и примеры для самотестирования	117

Глава 6. Особенности расчета цепей синусоидального тока при наличии взаимных индуктивностей	118
6.1. Общие положения	118
6.2. Цепь с последовательным соединением двух индуктивно связанных катушек	122
6.3. Цепь с параллельным соединением индуктивно связанных катушек	124
6.4. Цепь с трансформаторной связью между катушками	126
6.5. Разветвленная цепь при наличии взаимных индуктивностей между катушками	128
6.6. Эквивалентные преобразования цепей со взаимной индуктивностью	131
6.7. Дополнительные задания к главе 6. Вопросы и примеры для самотестирования	134
Глава 7. Трехфазные цепи	135
7.1. Введение	135
7.2. Связывание трехфазной цепи звездой	136
7.3. Связывание трехфазной цепи треугольником	140
7.4. Расчет трехфазных цепей	142
7.5. Мощность трехфазной цепи	160
7.6. Понятие о вращающемся магнитном поле и о трехфазных двигателях	163
7.7. Метод симметричных составляющих	166
7.8. Дополнительные задания к главе 7. Вопросы и примеры для самотестирования	180
Глава 8. Четырехполюсники	181
8.1. Определение, классификация	181
8.2. Системы уравнений. Различные формы записи	182
8.3. Входные сопротивления. Параметры холостого хода и короткого замыкания	186
8.4. Экспериментальное определение А-параметров	187
8.5. Схемы замещения. Соотношения между А-параметрами и параметрами схем замещения	189
8.6. Характеристические параметры. Их связь с А-параметрами	191
8.7. Уравнения в гиперболической форме записи	194
8.8. Экспериментальное определение собственного затухания и коэффициента фазы	195
8.9. Передаточные функции	198
8.10. Симметричные четырехполюсники	201
8.11. Способы соединения четырехполюсников	206
8.12. Понятие об активном четырехполюснике	210
8.13. Дополнительные задания к главе 8. Вопросы и примеры для самотестирования	210
Глава 9. Цепи с распределенными параметрами	212
9.1. Общие положения	212

9.2. Дифференциальные уравнения линии	212
9.3. Уравнения для установившегося синусоидального режима	214
9.4. Линия как симметричный четырехполюсник	217
9.5. Характеристические параметры линии	217
9.6. Бегущие волны. Длина волны. Коэффициенты затухания и фазы. Фазовая скорость	217
9.7. Коэффициенты отражения волн	220
9.8. Неискажающая линия	221
9.9. Линия без потерь	221
9.10. Входное сопротивление линии	223
9.11. Экспериментальное определение параметров линии	224
9.12. Примеры расчетов длинных линий	225
9.13. Дополнительные задания к главе 9. Вопросы и примеры для самотестирования	232
Заключение	233
Библиографический список	233
Предметный указатель	235

Михаил Евгеньевич Евсеев

**Теоретические основы электротехники.
Анализ линейных электрических цепей
при установившихся режимах работы**

РЕКОМЕНДОВАНО УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ
ПО УНИВЕРСИТЕТСКОМУ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Редактор И.Н. Садчикова
Компьютерная верстка И.А. Ходан

Сводный темплан 2005 г.

Лицензия ЛР № 020308 от 14.02.97

Подписано в печать	.	.	2005	Формат 60*84 1/16
--------------------	---	---	------	-------------------

Б.кн.-журн.	П.л. 15,25	Б.л. 7,625	РТП	РИО СЗТУ
-------------	------------	------------	-----	----------

Тираж 250	Заказ
-----------	-------

Северо - Западный государственный заочный технический университет

РИО СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации

вузов Санкт-Петербурга

191186, Санкт-Петербург, ул.Миллионная, 5