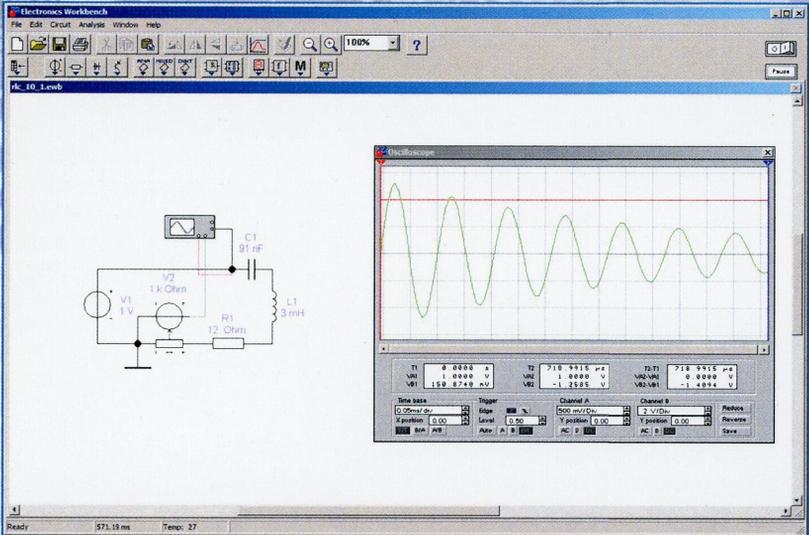


В.А. Матвиенко



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

В.А. Матвиенко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

Рекомендовано Региональным отделением УрФО учебно-методического объединения вузов Российской Федерации по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах в УрФО

Екатеринбург
2016

УДК 621.3.01(075.8)
ББК 31.27-01я73
М33

Рецензенты:

кафедра общепрофессиональных дисциплин Уральского технического института связи и информатики ФГБОУ ВО СибГУТИ (зам. зав. кафедрой доц., канд. техн. наук Н.В. Будылдина);

генеральный директор ФГУП «Уральский электромеханический завод» К.А. Ковязин

Матвиенко В.А.

М33 Основы теории цепей: учебное пособие для вузов / В.А. Матвиенко. – Екатеринбург : УМЦ УПИ, 2016. – 162 с.

ISBN 978-5-8295-0425-0

Рассмотрены вопросы теории линейных электрических цепей в установившемся и переходном режимах, а также основы анализа нелинейных резистивных цепей.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.03.04 – «Управление в технических системах» и может быть использовано студентами других направлений, изучающих теорию электрических цепей.

Библиогр.: 17 назв. Рис. 148.

ISBN 978-5-8295-0425-0

УДК 621.3.01(075.8)

ББК 31.27-01я73

© В.А. Матвиенко, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	СИГНАЛЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	
1.1.	Классификация сигналов	7
1.2.	Гармоническое колебание и его параметры	9
1.3.	Представление гармонических функций с помощью комплексных величин	10
1.4.	Импульсные сигналы и их параметры	12
1.5.	Среднее, средневыпрямленное и действующее значения периодического колебания	15
1.6.	Среднее, средневыпрямленное и действующее значения гармонического колебания	17
1.7.	Спектральное представление периодических сигналов	18
1.8.	Спектральное представление непериодических сигналов	21
1.9.	Единичные функции и их свойства	24
2.	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	
2.1.	Электрическая цепь	28
2.2.	Идеализированные пассивные элементы электрической цепи.....	29
2.3.	Идеализированные активные элементы электрической цепи	36
2.4.	Реальные элементы электрических цепей. Схемы замещения	38
2.5.	Соединения элементов. Топологические элементы электрической цепи	40
2.6.	Законы Кирхгофа. Система уравнений электрического равновесия цепи	42
2.7.	Классификация электрических цепей. Принцип наложения	43
3.	ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ	
3.1.	Сопrotивление, индуктивность и емкость при гармоническом воздействии	45
3.2.	Последовательная RLC -цепь. Классическое решение	48

3.3.	Последовательная <i>RLC</i> -цепь. Метод комплексных амплитуд	50
3.4.	Параллельная <i>RLC</i> -цепь	53
3.5.	Мощность в цепи гармонического тока	56
3.6.	Комплексные частотные характеристики цепи	58
3.7.	Трехфазные цепи	60
4.	МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ	
4.1.	Эквивалентное преобразование участка цепи с последовательным соединением элементов	67
4.2.	Эквивалентное преобразование участка цепи с параллельным соединением элементов	68
4.3.	Эквивалентные преобразования треугольника в звезду и звезды в треугольник	69
4.4.	Эквивалентные преобразования источников напряжения и тока	71
4.5.	Перенос источников	72
4.6.	Расчет цепей на основе непосредственного применения законов Кирхгофа	73
4.7.	Метод контурных токов	74
4.8.	Метод узловых напряжений	77
4.9.	Метод наложения	80
4.10.	Метод эквивалентного источника	81
5.	ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ	
5.1.	Цепи с взаимной индуктивностью при произвольном воздействии	85
5.2.	Цепи с взаимной индуктивностью при гармоническом воздействии	89
5.3.	Линейный трансформатор	90
6.	РЕЗОНАНСНЫЕ ЦЕПИ	
6.1.	Последовательный колебательный контур	96
6.2.	Параллельный колебательный контур	103

7.	ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ	
7.1.	Основные определения и классификация четырёхполюсников	107
7.2.	Основные уравнения четырёхполюсников	110
7.3.	Схемы замещения пассивного четырёхполюсника	115
7.4.	Параметры холостого хода и короткого замыкания	116
7.5.	Характеристические сопротивления пассивных четырёхполюсников	119
7.6.	Каскадное соединение четырёхполюсников	120
7.7.	Схемы замещения неавтономных проходных четырёхполюсников	121
8.	ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
8.1.	Определение отклика цепи по ее временным характеристикам	123
8.2.	Определение отклика цепи по ее частотным характеристикам	125
8.3.	Связь временных и частотных характеристик электрической цепи	127
8.4.	Условия неискаженной передачи сигнала через линейную электрическую цепь	128
8.5.	Согласование источника с нагрузкой	130
9.	ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
9.1.	Переходные процессы. Законы коммутации и начальные условия	134
9.2.	Классический метод анализа переходных процессов...	136
9.3.	Переходные процессы в цепях первого порядка. Общие положения	138
9.4.	Переходные процессы в RL -цепи	140
9.5.	Переходные процессы в RC -цепи	142
9.6.	Переходные процессы в последовательной RLC -цепи	144

10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	
10.1. Классификация нелинейных элементов и цепей	151
10.2. Эквивалентные преобразования цепей с нелинейными сопротивлениями	153
10.3. Расчет нелинейных цепей постоянного тока	155
10.4. Нелинейное сопротивление при произвольном воздействии	157
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	160

1. СИГНАЛЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Классификация сигналов

Информация – это совокупность сведений об объектах или процессах, происходящих в природе, обществе или технических системах. Для передачи и хранения информации используют различные знаки, позволяющие представить ее в некоторой форме (слова, жесты, рисунки, математические знаки, алгоритмические языки и т. п.). Совокупность знаков, содержащих ту или иную информацию, называют **сообщением**.

Передача сообщений на расстояние осуществляется с помощью какого-либо материального носителя (бумаги, магнитной ленты и т. п.) или физического процесса (звуковых или электромагнитных колебаний, электрического тока и т. п.). Физический процесс, несущий передаваемое сообщение, называют **сигналом**.

В качестве сигнала может быть использован любой физический процесс, изменяющийся в соответствии с передаваемым сообщением. Нас будут интересовать **электрические сигналы**. Сигнал называют электрическим, если его носителем является любая электрическая величина. Сообщения могут быть или не быть функциями времени. Сигнал всегда является функцией времени, даже если сообщение таковым не является. Чтобы сигналы могли быть объектами теоретического изучения и расчетов, их следует описать математически или, другими словами, следует создать **математическую модель** сигнала. Математическая модель позволяет абстрагироваться от физической природы носителя сигнала.

Сигналы, мгновенные значения которых можно точно предсказать в любой момент времени, называют **детерминированными**. Если мгновенные значения сигналов заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы, то такие сигналы называют **случайными**. Строго говоря, детерминированные сигналы сигналами не являются, поскольку не несут в себе никакой информации. Для таких сигналов лучше использовать термин **колебание**. Детерминированные сигналы используют при испытаниях различных устройств.

При передаче сигналов приходится иметь дело не только с полезными случайными колебаниями – сигналами, но и с мешающими случайными колебаниями, которые накладываются на полезные сигналы

и искажают их. Такие мешающие случайные колебания называют **помехами** или **шумами**.

Все сигналы можно поделить на четыре группы:

1) **аналоговые (непрерывные, континуальные) сигналы** (рис. 1.1, а), являющиеся непрерывной функцией времени, повторяющей закон изменения соответствующей физической величины;

2) **дискретные сигналы** (рис. 1.1, б) – сигналы непрерывные по уровню и дискретные по времени. Совокупность моментов времени t_1, t_2, t_3, \dots образует дискретное время. Интервал времени Δt между соседними моментами отсчета времени называют **шагом дискретизации**. Обычно $\Delta t = \text{const}$;

3) **квантованные сигналы** (рис. 1.1, в) – сигналы дискретные по уровню и непрерывные по времени. Уровни s_1, s_2, \dots – **уровни квантования**. Поскольку число состояний в этом случае счетно, то их можно пронумеровать и представить в виде чисел. Разность соседних уровней квантования Δs называют **шагом квантования**. Изменение уровня сигнала возможно в произвольный момент времени;

4) **цифровые сигналы** (рис. 1.1, г) – сигналы дискретные по времени и квантованные по уровню. Такие сигналы полностью описываются последовательностью чисел.

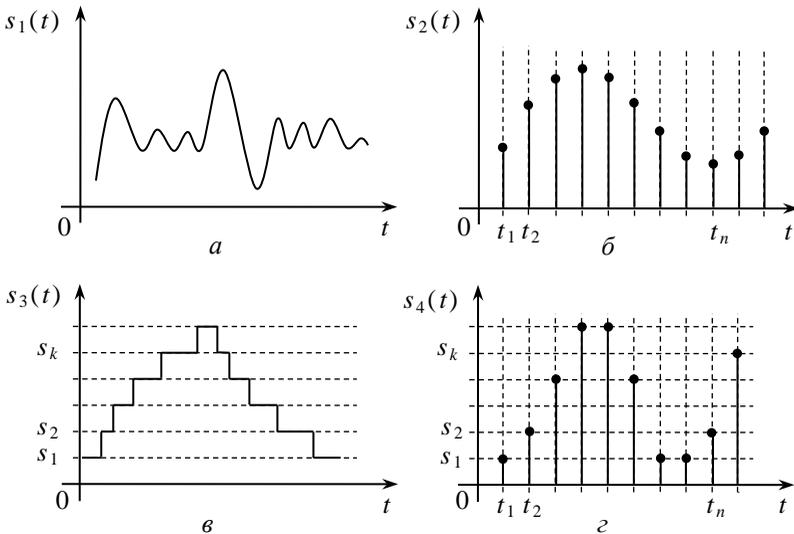


Рис. 1.1

1.2. Гармоническое колебание и его параметры

Функцию времени $F(t)$ называют **периодической**, если ее значения повторяются через равные промежутки времени на всей оси изменений t

$$F(t) = F(t \pm nT) \quad \forall t.$$

Наименьший промежуток времени $T \neq 0$, через который повторяются значения периодической функцией, называют **периодом**. Величину обратную периоду, т. е. число периодов в единицу времени, называют **частотой**

$$f = \frac{1}{T}.$$

Единицей измерения частоты служит **герц** (Гц). Частота равна 1 Гц, если период колебаний равен 1 с.

Простейшими периодическими функциями являются синусоидальная и косинусоидальная функции (рис. 1.2):

$$s_1(t) = S_m \cos(\omega t + \alpha); \quad s_2(t) = S_m \sin(\omega t + \alpha').$$

Синусоиду можно рассматривать как косинусоиду, отстающую на угол $\pi/2$. Поскольку синусоидальное и косинусоидальное колебания полностью совпадают по форме и отличаются лишь сдвигом по оси времени, то для них используют обобщающее понятие – **гармоническое колебание**.

Гармоническое колебание характеризуется тремя параметрами:

- амплитудой S_m ;
- угловой частотой ω ;
- начальной фазой α .

Амплитудой гармонической функции называют ее наибольшее значение S_m . Амплитуда всегда положительна.

Угловая частота ω характеризует скорость изменения аргумента (угла ωt) и связана с периодом T и частотой f соотношениями

$$\omega = 2\pi / T, \quad \omega = 2\pi f.$$

Угловая частота измеряется в радианах в секунду.

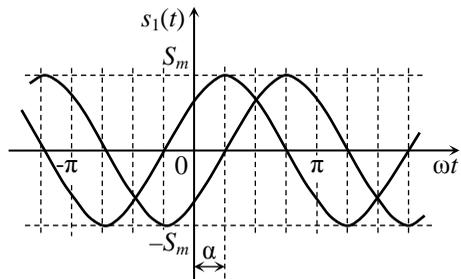


Рис. 1.2

Аргумент гармонической функции ($\omega t + \alpha$), записанной в косинусоидальной форме, называют **фазой колебания**. Значение фазы в нулевой момент времени называют **начальной фазой колебания**. Начальная фаза α может быть положительной и отрицательной.

Два гармонических колебания, частоты которых равны, называют **синхронными или когерентными колебаниями**. Если у синхронных колебаний совпадают начальные фазы, то такие колебания называют **синфазными**. Если начальные фазы двух синхронных колебаний сдвинуты на угол π , то такие колебания называют **противофазными**. Если начальные фазы двух синхронных колебаний сдвинуты на угол $\pi/2$, то такие колебания называют **квadrатурными** или говорят, что такие **колебания находятся в квадратуре**.

1.3. Представление гармонических функций с помощью комплексных величин

Рассмотрим комплексную функцию

$$\dot{A} = A_m e^{j(\omega t + \alpha)} = A_m \cos(\omega t + \alpha) + jA_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Геометрически эта функция может быть представлена на комплексной плоскости в виде вектора, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω , причем проекция этого вектора на действительную ось представляет собой гармоническую функцию $a_1(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$, а проекция этого вектора на мнимую ось – гармоническую функцию $a_2(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$.

Построим вектор \dot{A} в нулевой момент времени (рис. 1.3). При $t = 0$ вектор \dot{A} образует с действительной осью угол α , равный начальной фазе гармонического колебания. Значение вектора \dot{A} в момент времени $t = 0$ называют **комплексной амплитудой** гармонического колебания

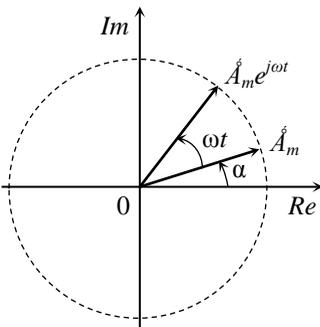


Рис. 1.3

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\alpha}.$$

Тогда

$$\dot{A} = \dot{A}_m e^{j\omega t}.$$

Вектор $e^{j\omega t}$, имеющий единичную длину и вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью ω , назы-

вают **оператором вращения**. Если неподвижный вектор умножить на $e^{j\omega t}$, то он становится вращающимся. Комплексную величину $\dot{A} = A_m e^{j(\omega t + \alpha)}$ называют **мгновенным** или **текущим комплексом гармонической функции**.

Другой способ представления гармонической функции с помощью комплексных величин основан на применении формул Эйлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

В соответствии с этими формулами

$$A_m \cos(\omega t + \alpha) = \frac{A_m}{2} [e^{j(\omega t + \alpha)} + e^{-j(\omega t + \alpha)}] = \frac{\dot{A}_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{A_m^*}{2} e^{-j\omega t},$$

$$A_m \sin(\omega t + \alpha) = \frac{A_m}{2j} [e^{j(\omega t + \alpha)} - e^{-j(\omega t + \alpha)}] = \frac{1}{j} \left(\frac{\dot{A}_m}{2} e^{j\omega t} - \frac{A_m^*}{2} e^{-j\omega t} \right).$$

Отсюда следует, что функция $A_m \cos(\omega t + \alpha)$ равна геометрической сумме двух комплексно-сопряженных векторов, имеющих модуль $\frac{A_m}{2}$ и вращающихся в противоположных направлениях с угловой скоростью ω (рис. 1.4).

Аналогично функция $A_m \sin(\omega t + \alpha)$ равна геометрической разности тех же двух вращающихся векторов, деленной на j (рис. 1.5).

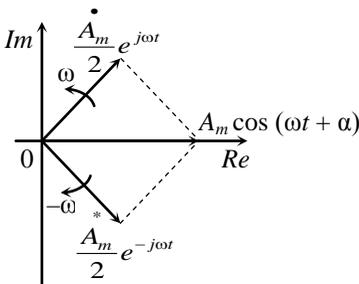


Рис. 1.4

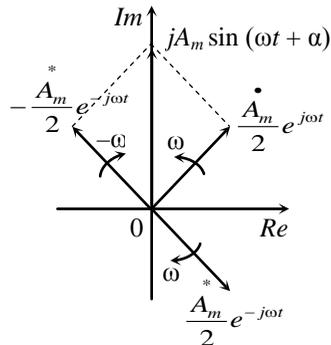


Рис. 1.5

Пусть даны два гармонических колебания

$$a_1 = A_{m1} \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$a_2 = A_{m2} \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Поскольку изображающие векторы вращаются с одинаковой скоростью ω , то угол α между ними остается неизменным (рис. 1.6). Говорят, что \dot{A}_{m1} опережает по фазе \dot{A}_{m2} или что \dot{A}_{m2} отстает по фазе

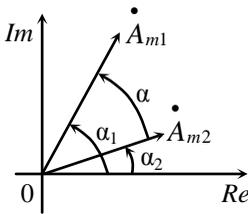


Рис. 1.6

от \dot{A}_{m1} . Разность начальных фаз $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ называют **сдвигом фаз** или **фазовым сдвигом** вектора \dot{A}_{m1} относительно вектора \dot{A}_{m2} .

Совокупность векторов, построенных с соблюдением масштаба и их взаимной ориентации по фазе, называют **векторной диаграммой**.

1.4. Импульсные сигналы и их параметры

Под **электрическим импульсом** будем понимать кратковременное отклонение напряжения или тока от некоторого начального уровня. Импульсы постоянного тока или напряжения называют **видеоимпульсами**, в отличие от **радиоимпульсов**, которые представляют собой отрезок гармонического колебания, амплитуда которого изменяется по некоторому закону. На практике используются прямоугольные,

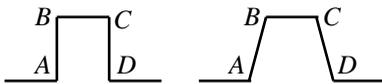


Рис. 1.7

трапецидальные, треугольные, экспоненциальные, колоколообразные импульсы, а также импульсы с экспоненциальным нарастанием и спадом.

У прямоугольных и трапецидальных импульсов различают следующие участки (рис. 1.7):

- **основание импульса (AD)**;
- **вершина импульса (BC)**;
- **фронт импульса (AB)** – участок быстрого отклонения напряжения или тока от исходного уровня;
- **срез импульса (CD)** – участок быстрого возврата напряжения или тока к исходному уровню.

Полярность импульса определяется знаком отклонения напряжения или тока от исходного уровня (рис. 1.8). Используются также понятия **положительный и отрицательный перепад (фронт) импульса**, под которым понимают фронт или срез соответствующей полярности (рис. 1.8).

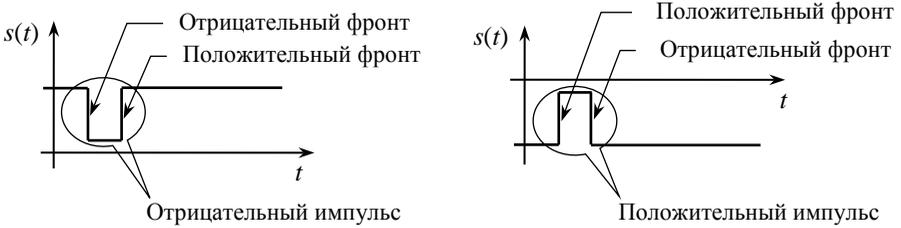


Рис. 1.8

Импульсы прямоугольной формы характеризуются **длительностью импульса $t_{и}$** , **начальным уровнем U_0** и **амплитудой U_m** (рис. 1.9).

Импульсы трапецеидальной формы характеризуются **длительностью фронта t_{ϕ}** , **длительностью среза t_c** , **длительностью импульса по основанию $t_{ио}$** , **длительностью импульса по вершине $t_{ив}$** , **длительностью импульса по некоторому заданному уровню $t_{и}$** , **начальным уровнем U_0** и **амплитудой U_m** , а также **крутизной фронта $v_{\phi} = U_m / t_{\phi}$** и **крутизой среза $v_c = U_m / t_c$** (рис. 1.10).

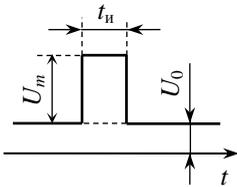


Рис. 1.9

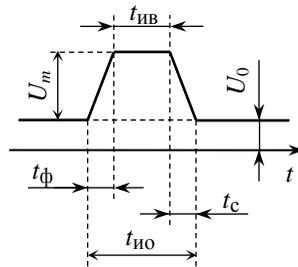


Рис. 1.10

Реальные импульсы имеют форму, отличающуюся от рассмотренных идеализированных импульсов, и характеризуются следующими параметрами (рис. 1.11):

U_0 – начальный уровень;

U_m – амплитуда импульса;

- t_{ϕ} – длительность фронта – время быстрого отклонения напряжения или тока от уровня $0,1U_m$ до уровня $0,9U_m$;
 t_c – длительность среза – время быстрого отклонения напряжения или тока от уровня $0,9U_m$ до уровня $0,1U_m$;
 ΔU – **скол вершины импульса**, оценивается или в вольтах, или в процентах от амплитуды импульса U_m ;
 $U_{об}$ – **амплитуда обратного выброса**;
 $t_{об}$ – **длительность обратного выброса**;
 U_B – **амплитуда выброса на вершине импульса**;
 t_B – **длительность выброса на вершине импульса**;
 t_H – длительность импульса по заданному уровню (обычно по уровню $0,5U_m$).
 Длительность импульса по уровню $0,5U_m$ называют **активной**.

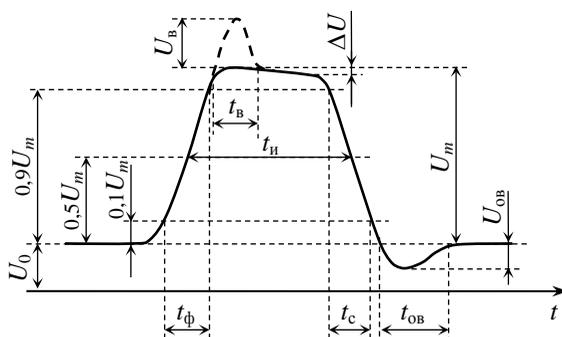


Рис. 1.11

Импульсы пилообразной (треугольной) формы (рис. 1.12) не имеют вершины и характеризуются начальным уровнем U_0 , амплитудой U_m , **временем нарастания** t_H , **временем спада** $t_{сп}$, а также **скоростью нарастания** $v_H = U_m / t_H$ и **скоростью спада** $v_{сп} = U_m / t_{сп}$. Важнейшим параметром таких импульсов является **коэффициент нелинейности пилообразного напряжения** K_H , который характеризует относительное изменение скорости нарастания или спада пилообразного напряжения в начале и конце соответствующего временного интервала:

$$K_H = \frac{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_H}}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}}.$$

Периодическая последовательность импульсов (рис. 1.13) характеризуется **длительностью импульса** t_n , **длительностью паузы** $t_{п}$, **периодом повторения** T , **частотой повторения** $F = 1/T$, **скважностью импульсов** $Q = T/t_n$, **коэффициентом заполнения** $K_3 = t_n/T = 1/Q$.

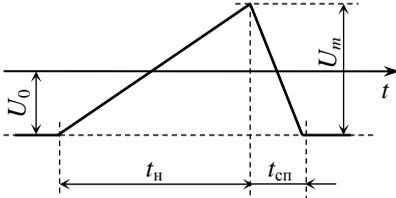


Рис. 1.12

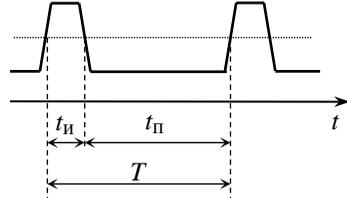


Рис. 1.13

Периодическую последовательность прямоугольных импульсов, у которой длительность импульсов t_n равна длительности паузы $t_{п}$ ($Q = 2$), называют **меандром**.

1.5. Среднее, средневыпрямленное и действующее значения периодического колебания

Рассмотрим два периодических тока (рис. 1.14) и попробуем ответить на вопрос: какой из этих токов больше. Очевидно, что для ответа на поставленный вопрос необходимо использовать параметры колебаний, средние в некотором смысле. Таковыми параметрами являются **среднее**, **средневыпрямленное** и **действующее значения** периодического колебания. Чтобы физический смысл указанных параметров был более понятен, дальнейшее изложение будем вести применительно к току.

Среднее значение периодического колебания равно среднеарифметическому значению за период колебания:

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt,$$

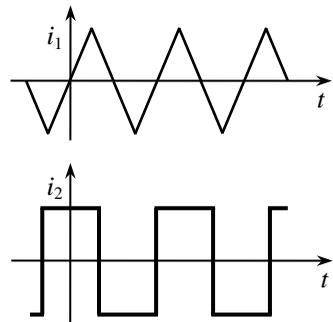


Рис. 1.14

где $\int_0^T i(t) dt$ – заряд, перенесенный током за период колебания.

Таким образом, среднее значение периодического тока $I_{\text{ср}}$ равно такому значению постоянного тока, который за время T переносит такой же заряд, что и заданное периодическое колебание. Если отрицательный полупериод повторяет по форме положительный полупериод, то $I_{\text{ср}} = 0$. Примером такого колебания является гармоническое колебание. Для характеристики таких колебаний используют средне-выпрямленное значение

$$I_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt ,$$

которое равно *среднему полупериодному значению*

$$I_{\text{ср.в}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt .$$

Действующее значение периодического колебания равно среднему квадратическому значению за период колебания

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} .$$

Поскольку мощность пропорциональна квадрату тока, то очевидно, что действующее значение периодического тока равно постоянно-му току, который эквивалентен по выделяемой мощности. Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими значениями.

Для характеристики формы периодических колебаний используют такие понятия, как *коэффициент формы*

$$k_{\text{ф}} = \frac{I}{I_{\text{ср.в}}} = \frac{U}{U_{\text{ср.в}}}$$

и *коэффициент амплитуды*

$$k_{\text{а}} = \frac{I_{\text{max}}}{I} = \frac{U_{\text{max}}}{U} .$$

Эти коэффициенты чаще всего используют в электроизмерительной технике для пересчета показаний приборов.

1.6. Среднее, средневывпрямленное и действующее значения гармонического колебания

Найдем среднее значение гармонического тока $i = I_m \sin \omega t$:

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\omega T} \int_0^T \sin \omega t d(\omega t).$$

Но $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Тогда

$$I_{\text{cp}} = -\frac{I_m}{\omega T} \Big|_0^T \cos \omega t = -\frac{I_m}{\omega T} (\cos \omega T - \cos 0).$$

Принимая во внимание, что $\omega T = 2\pi$, получим

$$I_{\text{cp}} = \frac{-I_m}{2\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Этот результат может быть получен сразу из геометрического смысла определённого интеграла.

Найдем средневывпрямленное значение гармонического тока, которое равно среднему полупериодному значению:

$$\begin{aligned} I_{\text{cp.в}} &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t d(\omega t) = -\frac{2I_m}{\omega T} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \cos \omega t = \\ &= -\frac{2I_m}{\omega T} (\cos \omega \frac{T}{2} - \cos 0) = \frac{2I_m}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \end{aligned}$$

Найдем действующее значение гармонического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt}.$$

Учитывая, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ или $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, получим

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{4\omega T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) d(2\omega t)}.$$

Но $\int \cos x dx = \sin x + C$. Тогда действующее значение гармонического тока

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{\frac{I_m^2}{4\omega T} \Big|_0^T (2\omega t - \sin 2\omega t)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{8\pi} (2\omega T - 0 - \sin 2\omega T + 0)} = \\
 &= \sqrt{\frac{I_m^2}{8\pi} [4\pi - \sin 4\pi]} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707I_m.
 \end{aligned}$$

Коэффициент амплитуды гармонического колебания

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Коэффициент формы гармонического колебания

$$k_\phi = \frac{I}{I_{\text{ср.в}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

Если действующее значение гармонического напряжения $U = 220$ В, то амплитуда гармонического напряжения $U_m = 1,41 U = 311$ В, а среднев्यпрямленное значение $U_{\text{ср.в}} = \frac{2}{\pi} U_m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U = 0,900 U = 198$ В.

1.7. Спектральное представление периодических сигналов

Как известно из курса математики, любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле (т. е. кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-\pi, \pi]$), может быть представлена рядом Фурье.

Пусть периодический сигнал $s(t)$ с периодом T отвечает условиям Дирихле. Тогда он может быть представлен рядом Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t),$$

коэффициенты которого a_0 , a_n и b_n определяются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \cos n\omega_1 t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \sin n \omega_1 t dt .$$

Частоту $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ называют *основной частотой*.

Итак, в общем случае периодический сигнал содержит постоянную составляющую и бесконечный ряд гармонических колебаний (*гармоник*), частота которых кратна основной частоте.

Каждую гармонику можно описать ее амплитудой A_n и начальной фазой ψ_n :

$$a_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t = A_n \cos(n \omega_1 t - \psi_n) ,$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} , \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} .$$

С учетом этих соотношений ряд Фурье можно представить в следующем виде:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_1 t - \psi_n) . \quad (1.1)$$

Совокупность амплитуд A_n , отложенных в функции частоты, образует *амплитудную спектральную диаграмму* сигнала $s(t)$ (рис. 1.15). Совокупность начальных фаз ψ_n , отложенных в функции частоты, образует *фазовую спектральную диаграмму* сигнала $s(t)$ (рис. 1.16). Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала являются *линейчатыми* или *дискретными*. В зависимости от формы сигнала $s(t)$ амплитуды некоторых гармоник могут быть равны нулю.

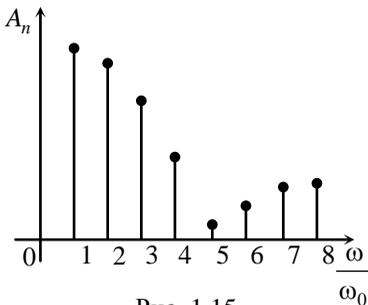


Рис. 1.15

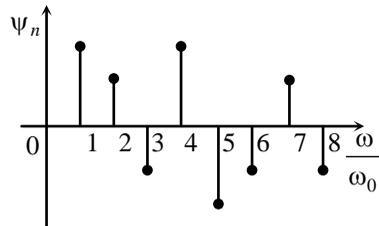


Рис. 1.16

Представим ряд Фурье в комплексной форме записи, для чего распишем косинус в выражении (1.1) по формуле Эйлера. Получим

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{j(n\omega_1 t - \psi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t - \psi_n)}}{2}.$$

В последнем выражении каждую из экспонент запишем в виде произведения двух экспонент. Тогда

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-j\psi_n} \cdot e^{jn\omega_1 t} + A_n e^{j\psi_n} \cdot e^{-jn\omega_1 t}).$$

Но $A_n e^{-j\psi_n}$ есть не что иное, как комплексная амплитуда \dot{A}_n , а $A_n e^{j\psi_n} = \dot{A}_n^*$ – величина ей комплексно сопряженная:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} + \dot{A}_n^* e^{-jn\omega_1 t}).$$

Знак минус в показателе экспоненты можно отнести к номеру гармоники n . Полагая, что постоянная составляющая сигнала $s(t)$ представляет собой нулевую гармонику ($n = 0$), окончательно находим

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Получим формулу для вычисления коэффициентов комплексного ряда Фурье

$$\dot{A}_n = A_n e^{-j\psi_n} = A_n \cos \psi_n - j A_n \sin \psi_n = a_n - j b_n.$$

Подставим выражения для коэффициентов ряда Фурье

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \cos n\omega_1 t dt - j \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \sin n\omega_1 t dt.$$

Распишем косинус и синус по формулам Эйлера:

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} dt - j \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j} dt.$$

Каждый из интегралов представим в виде алгебраической суммы двух интегралов:

$$\dot{A}_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) e^{jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt - \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) e^{jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

После приведения подобных членов окончательно получим

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Амплитудный спектр, соответствующий комплексному ряду Фурье, симметричен относительно нулевой частоты (рис. 1.17), а фазовый спектр симметричен относительно начала координат (рис. 1.18).

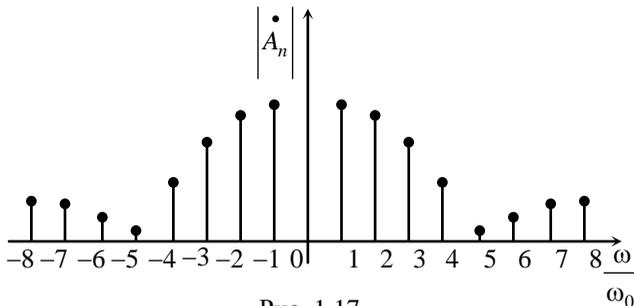


Рис. 1.17

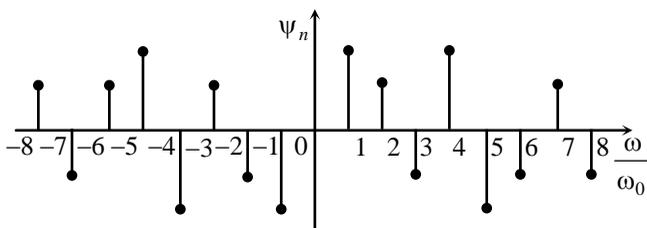


Рис. 1.18

1.8. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть непериодический сигнал $s(t)$ представляет собой одиночный импульс произвольной формы, заданный на отрезке $[t_1, t_2]$, за пределами которого $s(t) = 0$ (рис. 1.19). Чтобы непериодическую функцию $s(t)$ можно было представить рядом Фурье, доопределим ее так, чтобы она стала периодической. Полученную периодическую функцию $s_{\text{пер}}(t)$ можно представить рядом Фурье

$$s_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t},$$

коэффициенты которого

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_{\text{пер}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Умножим и разделим каждый член ряда Фурье на $\pi\omega_1$.

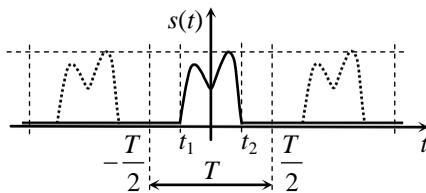


Рис. 1.19

Тогда ряд Фурье можно записать в виде

$$s_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_1} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

По определению основная частота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Тогда $\frac{\pi}{\omega_1} = \frac{T}{2}$.

Выражение в квадратных скобках представляет собой частотный интервал между составляющими ряда Фурье, равный частоте повторения ω_1 :

$$n\omega_1 - (n-1)\omega_1 = \Delta(n\omega_1) = \omega_1.$$

С учетом сказанного ряд Фурье можно переписать в следующем виде:

$$s_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} \Delta(n\omega_1).$$

Подставим выражение для \dot{A}_n :

$$s_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t} \Delta(n\omega_1) \int_{(T)} s_{\text{пер}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.2)$$

Но исходная функция $s(t)$ равнялась нулю всюду, за исключением отрезка времени $[t_1, t_2]$, а функция $s_{\text{пер}}(t)$ отлична от нуля не только на отрезке $[t_1, t_2]$. Чтобы вернуться к исходной непериодической функции $s(t)$, устремим период T функции $s_{\text{пер}}(t)$ к бесконечности.

При $T \rightarrow \infty$:

- периодическая функция $s_{\text{пер}}(t)$ стремится к исходной непериодической функции $s(t)$;
- модули комплексных амплитуд гармоник \dot{A}_n уменьшаются, стремясь к нулю: $|\dot{A}_n| \rightarrow 0$;
- частотный интервал между линиями спектра уменьшается, стремясь к нулю, $\Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$, т. е. дискретный спектр превращается в сплошной;
- $\int_{(T)} s_{\text{пер}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$.

Функцию

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.3)$$

называют **спектральной плотностью, спектральной характеристикой** или просто **спектром** непериодической функции $s(t)$;

- операция суммирования в выражении (1.2) превращается в операцию интегрирования.

Итак, при $T \rightarrow \infty$ получим

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.4)$$

Преобразование, определяемое формулой (1.3), называют **прямым двухсторонним преобразованием Фурье**. Прямое преобразование позволяет перейти от представления сигнала во временной области $s(t)$ к его представлению в частотной области $S(j\omega)$.

Преобразование, определяемое формулой (1.4), называют **обратным преобразованием Фурье**. Оно позволяет перейти от представления сигнала в частотной области $S(j\omega)$ к его представлению во временной области $s(t)$. Оба представления сигнала (временное и спектральное) несут полную информацию о сигнале и в этом смысле являются эквивалентными.

Согласно обратному преобразованию Фурье непериодический сигнал $s(t)$ представляет собой совокупность бесконечной суммы гармоник с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{2\pi}S(j\omega)d\omega$ во всем диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим соотношение между спектрами одиночного импульса и периодической последовательности импульсов такой же формы, для чего сравним выражение для спектральной плотности одиночного импульса с выражением для комплексной амплитуды n -й гармоники соответствующего периодического колебания:

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= \frac{2}{T} \int_{(T)} s_{\text{пер}}(t)e^{-jn\omega_1 t} dt, \\ S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

В точках $\omega = n\omega_1$

$$S(jn\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-jn\omega_1 t} dt .$$

Из сопоставления $S(j\omega)$ и \dot{A}_n следует, что

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} S(j\omega = jn\omega_1) ,$$

т. е. модуль спектральной плоскости одиночного импульса (рис. 1.20, а) и огибающая линейчатого спектра периодической последовательности импульсов той же формы (рис. 1.20, б), совпадают по форме и отличаются только масштабом (множитель $2/T$).

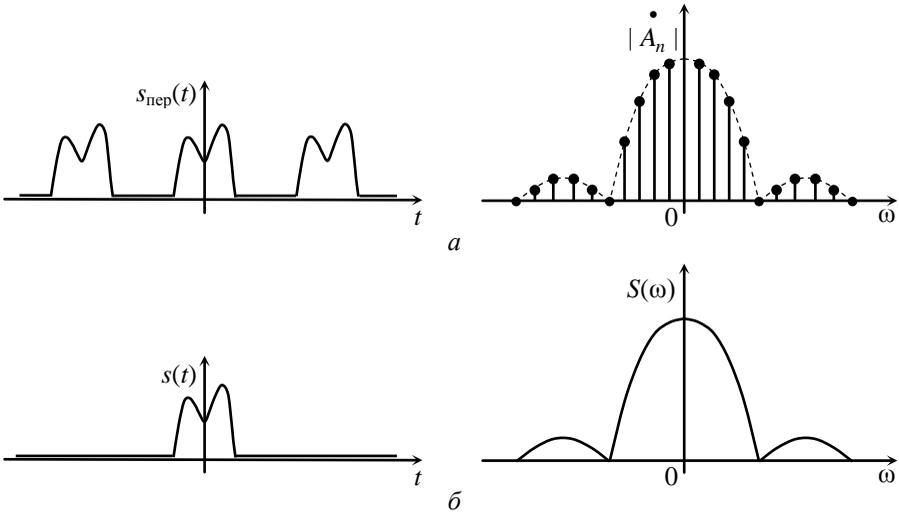


Рис. 1.20

1.9. Единичные функции и их свойства

Рассмотрим сигнал, описывающий линейный переход из нулевого состояния в единичное за время Δt (рис. 1.21) Если параметр Δt устремить к нулю, то в пределе переход от нулевого состояния в единичное будет происходить мгновенно (рис. 1.22). Такой предельный сигнал называют **единичным скачком**, **функцией включения** или **функцией Хевисайда** (Оливер Хевисайд, английский физик, 1850 – 1925).

Математическая модель функции включения имеет вид

$$1(t) = 0, \quad t < 0;$$

$$1(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета времени на величину t_0 (рис. 1.23). В аналитическом виде смещенную функцию включения можно записать следующим образом:

$$1(t - t_0) = 0, \quad t < t_0;$$

$$1(t - t_0) = 1, \quad t \geq t_0.$$

Функцию включения удобно использовать для аналитического представления различных воздействий, значение которых изменяется скачком в момент коммутации:

$$s(t) \cdot 1(t - t_0) = 0, \quad t < t_0;$$

$$s(t) \cdot 1(t - t_0) = s(t), \quad t \geq t_0.$$

Например, включение источника постоянного напряжения с ЭДС E можно описать следующим образом:

$$e(t) = E \cdot 1(t - t_0).$$

Другой пример – включение источника гармонического напряжения

$$e(t) = 1(t - t_0) E \cos(\omega t + \psi).$$

Воздействие в виде прямоугольного импульса может быть представлено как разность двух одинаковых скачков, сдвинутых во времени на длительность импульса Δt (рис. 1.24):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) - s_2(t) = \\ &= S_m 1(t - t_0) - S_m 1(t - t_0 - \Delta t) = \\ &= S_m [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \Delta t)]. \end{aligned}$$

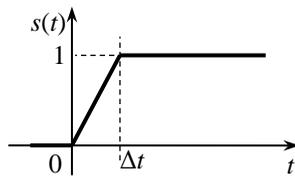


Рис. 1.21

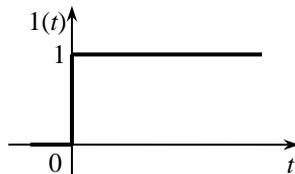


Рис. 1.22

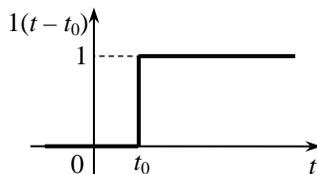


Рис. 1.23

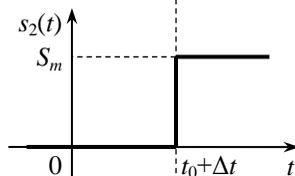
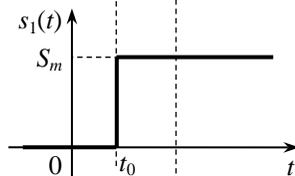
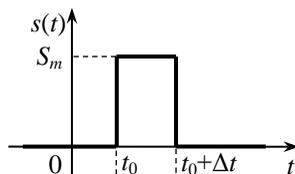


Рис. 1.24

Рассмотрим прямоугольный импульс с единичной площадью (рис. 1.25). Устремим длительность импульса к нулю, при этом амплитуда импульса будет стремиться к бесконечности. Предельную функцию, имеющую бесконечно малую длительность, бесконечно большую амплитуду и единичную площадь, называют **единичным импульсом**, **δ -функцией** или **функцией Дирака**.

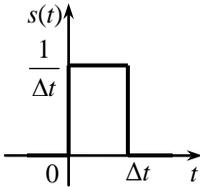


Рис. 1.25

Итак,

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0;$$

$$\delta(t) = \infty, \quad t = 0,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

В общем случае δ -функция может быть смещена относительно начала отсчета времени. Тогда

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0;$$

$$\delta(t - t_0) = \infty, \quad t = t_0.$$

Временную диаграмму δ -функции условно принято изображать, как показано на рис. 1.26.

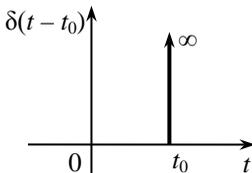


Рис. 1.26

Установим связь между δ -функцией и функцией включения

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} 1(t - t_0) - \frac{1}{\Delta t} 1(t - t_0 - \Delta t) \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} 1(t - t_0).$$

Если проинтегрируем обе части равенства, то получим

$$1(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt,$$

т. е. δ -функция представляет собой производную функции включения, а функция включения – интеграл от δ -функции.

Найдем спектр δ -функции

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1,$$

т. е. спектр δ -функции равномерен во всей полосе частот (рис. 1.27).

Найдем спектр функции включения. Поскольку функция $1(t)$ не абсолютно интегрируема, то к ней не может быть применено преобразование Фурье. Применим преобразование Фурье к произведению $1(t) e^{-\alpha t}$, которое абсолютно интегрируемо. Тогда

$$\begin{aligned} 1(j\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t) e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{0 - 1}{-j\omega} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

График зависимости спектральной плотности функции включения $|1(j\omega)|$ от частоты ω , соответствующий полученному выражению, приведен на рис. 1.28.

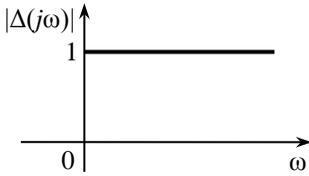


Рис. 1.27

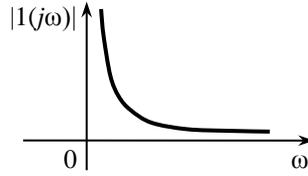


Рис. 1.28

Как видно из рис. 1.28, энергия функции включения сосредоточена в основном вблизи нулевой частоты.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1. Электрическая цепь

Электрическая цепь – это совокупность различных устройств и соединяющих их проводников, образующих путь для электрического тока, в которой электромагнитные процессы могут быть описаны с помощью понятий ЭДС, напряжения и тока.

При изучении электрических цепей возможно два подхода – *энергетический* и *информационный*. Энергетический подход предполагает изучение процессов получения, преобразования, передачи и использования электромагнитной энергии и связан с определением токов и напряжений на участках цепи. Информационный подход предполагает изучение процессов формирования, преобразования, передачи и приема сигналов и связан с установлением реакции (отклика) цепи на некоторое воздействие.

В составе электрической цепи можно выделить *источники электрической энергии* и *приемники электрической энергии*. К *первичным источникам* электрической энергии относят различные устройства, в которых происходит преобразование неэлектрической энергии в электрическую (генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, солнечные батареи, микрофоны и т. п.). *Приемники* электрической энергии – это устройства, в которых электрическая энергия преобразуется в другие виды энергии или накапливается (двигатели, резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, громкоговорители и т. д.).

Особый класс электрических устройств образуют *вторичные источники энергии*, в которых осуществляются различные преобразования электрической энергии (преобразование переменного тока в постоянный и обратное преобразование, понижение или повышение напряжения и др.). К вторичным источникам энергии относят трансформаторы, выпрямители, стабилизаторы, инверторы и т. п.). По отношению к первичным источникам энергии вторичные источники являются приемниками энергии, но по отношению к остальной части цепи их можно рассматривать как источники энергии.

При расчетах реальные объекты электрических цепей заменяют их идеализированными моделями или *элементами электрической цепи*. Под элементом электрической цепи будем понимать идеализи-

рованную модель физически существующей части устройства, которой приписаны определенные электрические и магнитные свойства.

По энергетическому признаку все элементы электрических цепей делят на **активные** и **пассивные**. К активным относят элементы, которые отдают электрическую энергию в цепь (**источники напряжения** и **источники тока**). К пассивным относят элементы, которые преобразуют электрическую энергию в другие виды энергии или накапливают. Таковыми являются **сопротивление**, **индуктивность** и **емкость**.

Если электрическая цепь содержит хотя бы один активный элемент, то такую цепь называют **активной**. Если цепь состоит только из пассивных элементов, то такую цепь называют **пассивной**.

Каждый элемент электрической цепи может быть охарактеризован с качественной и с количественной стороны. С качественной стороны элемент характеризуется его физическими свойствами, которые определяют назначение и функцию элемента. С количественной стороны элемент цепи характеризуется своим **параметром**. Под параметром будем понимать количественную характеристику какого-либо свойства.

Кроме рассмотренных нами основных элементов, электрическая цепь содержит также **вспомогательные элементы**: соединительные проводники, разъемы, переключатели, зажимы, которые называют **элементами соединений и коммутации**.

Информацию о составе электрической цепи и связях между ее элементами отображают графически в виде **электрической схемы**, на которой основные и вспомогательные элементы цепи изображают в виде **условных графических обозначений**.

2.2. Идеализированные пассивные элементы электрической цепи

Сопротивление с качественной стороны может быть определено как идеализированный элемент цепи, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другие виды энергии (тепловую, механическую, световую и т. д.). Количественно сопротивление определяется как отношение мгновенных значений напряжения и тока:

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}. \quad (2.1)$$

Единица измерения сопротивления – ом (Ом). Размерность ома – [В/А].

Величину, обратную сопротивлению, называют *проводимостью*

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{u}.$$

В системе СИ проводимость измеряется в *сименсах*. Размерность сименса – [А/В].

Сопротивление как идеализированный элемент электрической цепи характеризуется также зависимостью тока от приложенного к нему напряжения, которую называют *вольт-амперной характеристикой*. Если вольт-амперная характеристика сопротивления получена при медленных изменениях напряжения и тока, то ее называют *статической*.

Если вольт-амперная характеристика сопротивления линейна, то его называют *линейным*. В противном случае сопротивление называют *нелинейным*. Вольт-амперная характеристика линейного сопротивления имеет вид прямой линии с углом наклона $\alpha = \arctg \frac{1}{R}$ (рис. 2.1). В любой точке вольт-амперной характеристики линейного сопротивления

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{u_2}{i_2} = \frac{u_3}{i_3} = R = \text{const},$$

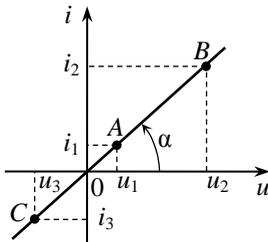


Рис. 2.1

т. е. сопротивление R не зависит от знака и значения приложенного напряжения. Точку вольт-амперной характеристики, в которой мы определяем значение параметра, называют *рабочей точкой*.

В общем случае статическая вольт-амперная характеристика сопротивления может быть нелинейна (рис. 2.2). Как видно из рис. 2.2,

$$\frac{u_1}{i_1} \neq \frac{u_2}{i_2},$$

т. е. в этом случае сопротивление зависит от выбора рабочей точки.

Отметим еще одну особенность нелинейного сопротивления. Пусть кроме постоянного напряжения U_2 к сопротивлению приложено гармоническое напряжение $u_~$, амплитуда которого значительно меньше U_2 . Как видно из рис. 2.2,

$$\frac{u_1}{i_1} \neq \frac{u_2}{i_2},$$

т. е. сопротивление переменному току не равно сопротивлению постоянному току.

Сопротивление постоянному току, определяемое соотношением (2.1), называют **статическим сопротивлением**, а сопротивление переменному току, определяемое соотношением

$$r = \frac{du}{di},$$

называют **дифференциальным сопротивлением**. Статическое сопротивление всегда положительно, в то время как дифференциальное сопротивление может быть положительно, отрицательно или равно нулю (рис. 2.3).

Мгновенная мощность, преобразуемая сопротивлением в другие формы энергии,

$$p_R = ui = Ri^2 = Gu^2.$$

Электрическая энергия, преобразуемая сопротивлением за время $\Delta t = t - t_1$,

$$w_R = \int_{t_1}^t p_R dt = \int_{t_1}^t Ri^2 dt = \int_{t_1}^t Gu^2 dt.$$

Если $i(t) = I = \text{const}$, то $w_R = RI^2(t - t_1)$. Это выражение является математической записью **закона Джоуля-Ленца** в интегральной форме.

Условное графическое обозначение линейного сопротивления показано на рис. 2.4, а, а нелинейного сопротивления – на рис. 2.4, б. Допускается поворот условного графического изображения на угол, равный 90° .

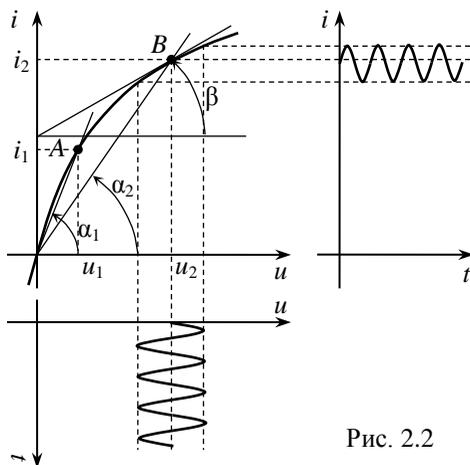


Рис. 2.2

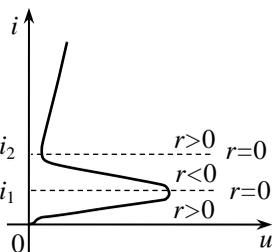


Рис. 2.3

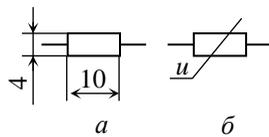


Рис. 2.4

Емкость с качественной стороны определяют как идеализированный элемент электрической цепи, обладающий свойством накапливать энергию электрического поля. Емкость как параметр определяется выражением

$$C = \frac{q}{u_c}, \quad (2.2)$$

где q – заряд, накопленный в емкости;

u_c – напряжение на зажимах емкости.

В международной системе Си емкость измеряется в фарадах. Размерность фарада – [Кл / В]. Зависимость заряда q , накопленного емкостью, от напряжения u_c , называют **вольт-кулонной характеристикой**. Если вольт-кулонная характеристика емкости линейна, то емкость называют **линейной**. В противном случае емкость называют **нелинейной**. Нелинейная емкость характеризуется как **статической емкостью**, определяемой соотношением (2.2), так и **дифференциальной емкостью**

$$C_d = \frac{dq}{du_c}.$$

Найдем зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах емкости:

$$i_c = \frac{dq}{dt}.$$

Но $dq = d(Cu_c)$. Тогда

$$i_c = \frac{d(Cu_c)}{dt}.$$

Если емкость линейна, т. е. $C \neq f(u_c)$, то

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) называют **законом Максвелла**. Из закона Максвелла следует, что сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико.

Найдем зависимость напряжения на емкости от тока. Из (2.3) следует, что напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c dt,$$

при этом будем полагать, что при $t = -\infty$ напряжение на емкости $u_c(-\infty) = 0$.

Если наблюдение процессов в емкости началось в момент времени t_0 , то разбивая последний интеграл на два, получим

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt .$$

Но первый интеграл представляет собой напряжение на емкости в момент времени t_0 . Тогда

$$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt .$$

Мгновенная мощность в емкости

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt} .$$

Если знаки напряжения на емкости u_C и производной напряжения на емкости du_C/dt совпадают, то мгновенная мощность p_C положительна. В этом случае энергия поступает в емкость, т. е. она заряжается. Если знаки напряжения на емкости u_C и производной напряжения на емкости du_C/dt не совпадают, то мгновенная мощность p_C отрицательна. Это означает, что емкость отдает энергию в цепь или разряжается.

Найдем энергию, запасенную в емкости в произвольный момент времени t :

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_{-\infty}^t u_C \frac{du_C}{dt} dt = C \int_0^{u_C} u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C} .$$

Энергия, запасенная емкостью, является неотрицательной величиной в любой момент времени t и определяется напряжением на емкости u_C или ее зарядом q .

Условное графическое обозначение линейной емкости показано на рис. 2.5, а, а нелинейной емкости – на рис. 2.5, б. Допускается поворот условного графического изображения на угол, равный 90° .

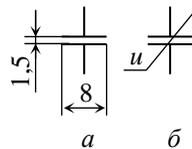


Рис. 2.5

Индуктивность как идеализированный элемент электрической цепи с качественной стороны характеризуется способностью запасать энергию магнитного поля. Индуктивность как параметр определяется соотношением

$$L = \frac{\Psi}{i_L} , \quad (2.4)$$

где i_L – ток через индуктивность;

Ψ – **потокосцепление самоиндукции**, равное алгебраической сумме магнитных потоков Φ_i , пронизывающих ее отдельные витки:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i,$$

где N – число витков.

Если магнитный поток, пронизывающий витки катушки, одинаков, то

$$\Psi = N\Phi.$$

В системе СИ магнитный поток Φ и потокосцепление самоиндукции Ψ измеряют в **веберах** (Вб), а индуктивность – в **генри** (Гн). Размерность вебера – [Тл·м²]. Размерность генри – $\left[\frac{\text{Вб}}{\text{А}} \right]$.

Зависимость потокосцепления самоиндукции Ψ от тока i_L называют **ампер-веберной характеристикой**. Если ампер-веберная характеристика линейна (индуктивность L не зависит от тока i_L), то такую индуктивность называют **линейной**. В противном случае индуктивность называют **нелинейной**.

Нелинейная индуктивность характеризуется **статической индуктивностью**, определяемой соотношением (2.4), и **дифференциальной индуктивностью**

$$L_d = \frac{d\Psi}{di_L}.$$

Условное графическое обозначение индуктивности показано на рис. 2.6. Допускается поворот условного графического изображения на угол, кратный 90°.

В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея ЭДС самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li_L).$$

Если индуктивность линейна, то ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di_L}{dt}.$$

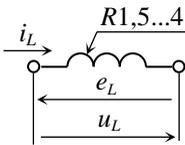


Рис. 2.6

Положительное направление напряжения на индуктивности u_L совпадает с положительным направлением тока i_L и противоположно ЭДС e_L , т. е. $u_L = -e_L$. Тогда

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Отсюда следует, что сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю.

Найдем зависимость тока i_L от напряжения u_L , для чего проинтегрируем последнее выражение

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

В момент времени $t = t_0$

$$i_L(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt.$$

Если ток $i_L(t_0)$ известен, то при $t > t_0$

$$i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt.$$

Мгновенная мощность в индуктивности

$$p_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt}.$$

Если знаки тока через индуктивность i_L и производной тока через индуктивность $\frac{di_L}{dt}$ совпадают, то мгновенная мощность p_L положительна. Это означает, что индуктивность потребляет энергию от цепи. Если знаки тока через индуктивность i_L и производной тока через индуктивность $\frac{di_L}{dt}$ не совпадают, то мгновенная мощность p_L отрицательна и индуктивность отдает ранее накопленную энергию в цепь.

Энергия, запасенная в индуктивности в произвольный момент времени t ,

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p_L dt = L \int_0^{i_L} i_L di_L = \frac{L i_L^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Энергия, запасенная индуктивностью, является неотрицательной величиной в любой момент времени t и определяется током через индуктивность i_L или потокосцеплением Ψ .

Индуктивность и емкость, способные накапливать энергию, называют *энергоемкими* или *реактивными* элементами электрической цепи.

2.3. Идеализированные активные элементы электрической цепи

К идеализированным активным элементам электрической цепи относят источник напряжения (ЭДС) и источник тока.

Источником напряжения (ЭДС) называют такой идеализированный элемент электрической цепи, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока (рис. 2.7).

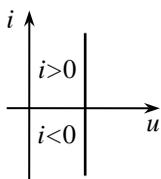


Рис. 2.7

Напряжение на зажимах источника равно ЭДС и может быть произвольной функцией времени. В частном случае напряжение может не зависеть от времени $u(t) = U = \text{const}$. Такие источники называют **источниками постоянного напряжения**.

Условные графические обозначения идеально-го источника напряжения показаны на рис. 2.8. Допускается поворот условных графических изображений на угол, кратный 90° . Крайнее левое изображение соответствует ГОСТ 2.721-74, остальные не соответствуют стандарту, но часто используются в учебной литературе.

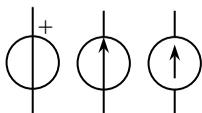


Рис. 2.8

Если к зажимам источника напряжения подключить сопротивление нагрузки R_n , то выделяемая в нагрузке мощность

$$p = \frac{u^2}{R_n}$$

Отсюда видно, что при $R_n \rightarrow 0$, мощность p стремится к бесконечности, т. е. источник напряжения имеет бесконечно большую мощность.

В режиме короткого замыкания ($R_n = 0$) понятие «источник напряжения» теряет смысл. Режим короткого замыкания для источников напряжения недопустим. Схема включения источника напряжения в цепь показана на рис. 2.9.

Источником тока называют такой идеализированный элемент электрической цепи, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах (рис. 2.10). Ток источника может быть произвольной функцией времени. Если $i(t) = I = \text{const}$, то такой источник называют **источником постоянного тока**.

Условные графические обозначения идеального источника тока показаны на рис. 2.11. Допускается поворот условных графических изображений на угол, кратный 90° . Крайнее левое изображение соответствует ГОСТ 2.721-74, остальные не соответствуют стандарту, но часто используются в учебной литературе. Крайнее правое изображение самое неудачное, так как используется не только для обозначения источника тока, но и для обозначения трансформатора.

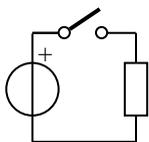


Рис. 2.9

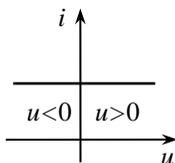


Рис. 2.10

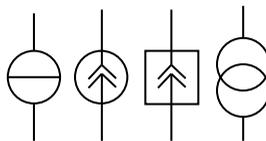


Рис. 2.11

Если к зажимам источника тока подключить сопротивление нагрузки R_n , то выделяемая в нагрузке мощность

$$p = i^2 R_n.$$

Отсюда следует, что при $R_n \rightarrow \infty$ мощность p стремится к бесконечности, т. е. источник тока имеет бесконечно большую мощность. В режиме холостого хода ($R_n = \infty$), т. е. при разомкнутых зажимах источника, понятие «источник тока» теряет смысл. Для источников тока режим холостого хода является недопустимым. Схема включения источника тока в цепь показана на рис. 2.12.

Рассмотренные источники тока и напряжения называют **неуправляемыми**, или **независимыми**, поскольку их параметры определяются только внутренними свойствами. Наряду с независимыми в теории электрических цепей рассматриваются также **зависимые**, или **управляемые источники**, под которыми понимают идеализированные активные элементы, параметры которых являются функцией некоторого тока или напряжения в цепи.

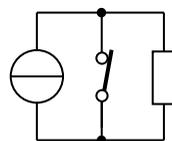


Рис. 2.12

Если неуправляемые источники имеют одну пару выводов, то управляемые источники имеют две пары выводов. К одной паре выводов подключен идеализированный источник, параметр которого является заданной функцией напряжения или тока другой пары выводов, называемых **управляющими выводами**.

Различают четыре типа управляемых источников:

- **источник напряжения, управляемый напряжением** (ИНУН), рис. 2.13, а;
- **источник напряжения, управляемый током** (ИНУТ), рис. 2.13, б;
- **источник тока, управляемый напряжением** (ИТУН), рис. 2.13, в;
- **источник тока, управляемый током** (ИТУТ), рис. 2.13, г.

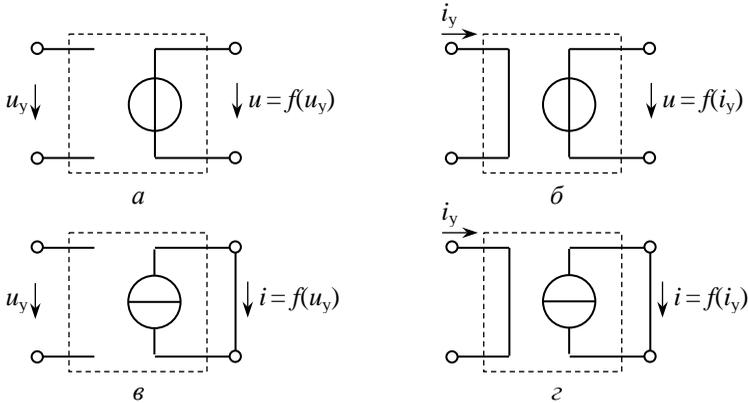


Рис. 2.13

Вид зависимости выходного параметра управляемого источника от управляющего параметра в принципе может быть любым, однако чаще используются **линейно управляемые источники**, выходной параметр которых y прямо пропорционален управляющему параметру x :

$$y = K_y x.$$

Коэффициент управления K_y в зависимости от типа управляемого источника может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной величиной. Из последнего соотношения следует, что управляемые источники не могут отдавать энергию в цепь при отсутствии управляющего воздействия ($x = 0$).

2.4. Реальные элементы электрических цепей. Схемы замещения

К реальным элементам электрических цепей относят **резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, источники питания** (батареи, аккумуляторы, генераторы и др.). Резистор по своим свойствам приближается к сопротивлению, катушка индуктивности – к индуктивности, конденсаторы – к емкости. Однако, например, резистор, кроме основного параметра – сопротивления, имеет также некоторую

индуктивность и емкость, катушка индуктивности имеет активное сопротивление и емкость, конденсатор – сопротивление и индуктивность. В связи с этим реальные элементы при расчетах заменяют их эквивалентом – *схемой замещения*.

Схемой замещения называют такую схему, которая по своим свойствам способна заменить реальное устройство. От схемы замещения надо отличать *эквивалентную схему*. Две разные схемы называют эквивалентными, если при замене одной из них на другую токи и напряжения в остальной части цепи не изменятся.

Схема замещения должна удовлетворять по крайней мере двум требованиям:

- максимально отображать наиболее важные при данных условиях свойства реального элемента или цепи (например, схемы замещения усилителя для низких, средних и высоких частот);
- быть достаточно простой, допускающей доведение математических расчетов до конца.

Схемы замещения резистора, катушки индуктивности и конденсатора приведены соответственно на рис. 2.14, а, 2.14, б и 2.14, в,

где L_R – индуктивность резистора;

C_R – емкость резистора;

$u_{ш}$ – шумовое напряжение резистора;

R_L – активное сопротивление провода катушки индуктивности;

R_d – сопротивление потерь в диэлектрике;

C_L – емкость катушки индуктивности;

L_C – индуктивность конденсатора;

R_C – сопротивление потерь в конденсаторе.

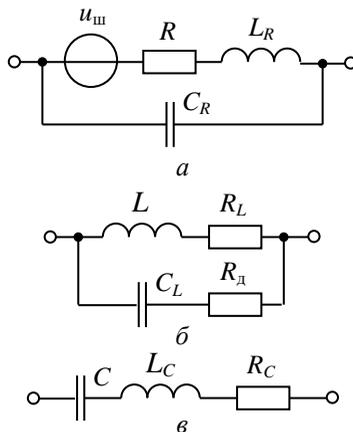


Рис. 2.14

Если катушка с сердечником, то необходимо учитывать потери в сердечнике. Если катушка закрыта экраном, то добавятся потери в экране. В зависимости от задач и целей расчета схемы замещения реальных элементов могут быть упрощены. Например, часто можно пренебречь шумами резистора.

Параметры, характеризующие неосновные физические свойства реального элемента электрической цепи, называют *паразитными*.

Рассмотрим реальные источники электрической энергии. Прежде всего, реальные источники имеют конечную мощность, что на схемах замещения учитывается с помощью внутреннего сопротивления R_i (рис. 2.15). Если внутреннее сопротивление источника не зависит от тока нагрузки, т. е. $R_i = \text{const}$, то такой источник называют *линейным*. Если внутреннее сопротивление источника зависит от тока нагрузки, т. е. $R_i = f(i_n)$, то такой источник называют *нелинейным*.

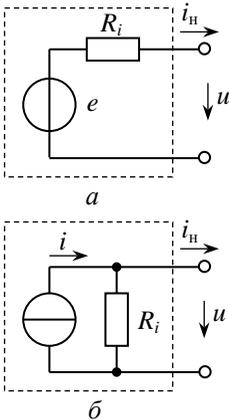


Рис. 2.15

Идеальный источник напряжения можно рассматривать как источник с нулевым внутренним сопротивлением. Идеальный источник тока можно рассматривать как источник, имеющий бесконечно большое напряжение и бесконечно большое внутреннее сопротивление R_i . Ток в нагрузке (рис. 2.15, а)

$$i_n = \frac{e}{R_i + R_n}.$$

Отсюда следует, что i_n не будет зависеть от сопротивления нагрузки R_n только при условии, что $e = \infty$ и $R_i = \infty$.

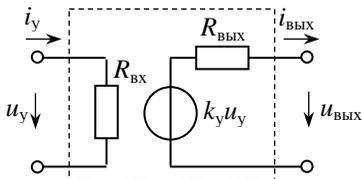


Рис. 2.16

Реальные управляемые источники имеют конечное входное сопротивление $R_{вх}$ и конечное выходное сопротивление $R_{вых}$ (рис. 2.16).

2.5. Соединения элементов. Топологические элементы электрической цепи

В зависимости от характера соединения элементов различают *неразветвленные* и *разветвленные* цепи. В неразветвленной цепи через все элементы протекает один и тот же ток. В разветвленных цепях соотношение токов в элементах может быть произвольным.

Соединение элементов, при котором через них протекает один и тот же ток, называют *последовательным*. Соединение элементов,

при котором все элементы находятся под одним и тем же напряжением, называют **параллельным**. Комбинацию последовательного и параллельного соединения называют **смешанным соединением**.

Внешние выводы отдельных участков электрической цепи, так же как и внешние выводы элементов, называют **полюсами**. В зависимости от числа полюсов участки цепи делят на **двухполюсники**, **трехполюсники**, **четырёхполюсники** и **N-полюсники (многополюсники)**.

Трехполюсник, содержащий три элемента, которые подключены между внешними выводами, называют **треугольником** (рис. 2.17).

Трехполюсник, содержащий три элемента, один из выводов которых подключен к внешним выводам, а оставшиеся выводы соединены вместе, называют **звездой** (рис. 2.18).

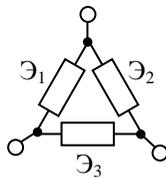


Рис. 2.17

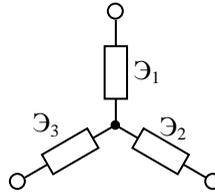


Рис. 2.18

Четырёхполюсник, имеющий два входных и два выходных вывода, содержащий четыре элемента, включенные так, что каждый входной вывод соединен с каждым выходным выводом, называют **мостом** (рис. 2.19). Схемы, изображенные на рис. 2.19, совершенно одинаковы, хотя непохожи по начертанию.

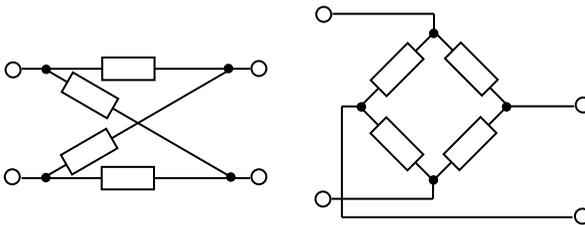


Рис. 2.19

Для описания характера соединения элементов цепи используют понятие **ветвь**, **узел** и **контур**.

Ветвь представляет собой один или несколько последовательно включенных двухполюсных элементов. Место соединения ветвей

называют **узлом**. Соединение двух ветвей в общей точке образуют **устранимый узел**. Соединение в общей точке трех и более ветвей образует **неустранимый узел**. **Контуром** называют любую замкнутую цепь из ветвей.

Ветвь, узел и контур называют **топологическими элементами электрической цепи**.

2.6. Законы Кирхгофа. Система уравнений электрического равновесия цепи

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю, при этом токи, втекающие в узел, считают положительными, а вытекающие – отрицательными:

$$\sum_k i_k = 0,$$

где k – номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Это уравнение называют **уравнением баланса токов в узле**. Первый закон Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда, согласно которому в любой точке электрической цепи заряды не накапливаются и не расходуются.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных напряжений в контуре равна нулю, при этом напряжение ветви считается положительным, если его положительное направление совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным в противном случае:

$$\sum_k U_k = 0,$$

где k – номера ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Это уравнение называют **уравнением баланса напряжений в контуре**. Второй закон Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии.

Уравнения, составленные на основании первого и второго законов Кирхгофа, называют **топологическими**, так как они отражают свойства цепи, которые определяются только ее топологией и не зависят от того, какие элементы входят в состав ветвей. Уравнения, устанавливающие связь между током и напряжением каждой ветви, называют **компонентными (уравнениями ветвей)**.

На основании топологических и компонентных уравнений цепи можно составить систему уравнений, позволяющую определить токи

и напряжения в цепи. Такую систему называют *системой уравнений электрического равновесия цепи*.

Рассмотрим последовательную RLC -цепь, изображенную на рис 2.20. Согласно второму закону Кирхгофа

$$u_L + u_C + u_R = e.$$

С учетом компонентных уравнений получим

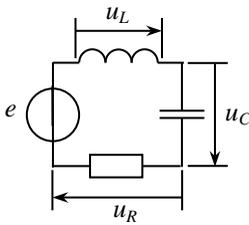


Рис. 2.20

$$L \frac{di}{dt} + U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt + iR = e,$$

т. е. уравнение электрического равновесия цепи является интегродифференциальным уравнением. Продифференцировав последнее соотношение по времени, получим

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt};$$

т. е. уравнение электрического равновесия цепи может быть сведено к дифференциальному уравнению цепи, порядок которого равен числу независимых реактивных элементов цепи.

2.7. Классификация электрических цепей. Принцип наложения

Все электрические цепи можно разделить на *цепи с сосредоточенными* и *цепи с распределенными параметрами*.

К цепям с сосредоточенными параметрами относят цепи, геометрическими размерами которых можно пренебречь по сравнению с минимальной длиной волны протекающих в них процессов. Такие цепи как бы не имеют размеров и их элементы сосредоточены в точке пространства. Процессы в цепях с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Токи и напряжения в таких цепях являются функциями только времени.

К цепям с распределенными параметрами относят цепи, размер которых вдоль одной оси соизмерим с минимальной длиной волны λ_{\min} , протекающих в них процессов. Токи и напряжения в таких цепях являются функциями не только времени t , но и координаты x . Примером цепи с распределенными параметрами является двухпроводная линия передачи. Поперечные размеры такой линии $a \ll \lambda_{\min}$, и ими можно пренебречь. Однако длина линии $l > \lambda_{\min}$, и этими размерами

цепи пренебречь нельзя, поскольку мгновенные значения напряжения и тока в различных точках линии будут различны. Свойства такой цепи не могут быть описаны с помощью сосредоточенных сопротивлений, индуктивности и емкости, поскольку каждый элементарный участок такой цепи обладает свойствами сопротивления, индуктивности и емкости, т. е. эти параметры распределены вдоль всей линии. Процессы в цепях с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Электрические цепи, содержащие только линейные элементы, называют *линейными*. Электрические цепи, содержащие хотя бы один нелинейный элемент, называют *нелинейными*. Линейные цепи описываются линейными дифференциальными уравнениями, а нелинейные цепи описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Если параметры всех элементов, образующих цепь, не изменяются во времени, то такую цепь называют *стационарной* или *инвариантной во времени*. Если параметр хотя бы одного элемента электрической цепи изменяется во времени, то такую цепь называют *нестационарной* или *параметрической*. Процессы в стационарных электрических цепях описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а в нестационарных цепях – дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Основным свойством линейной цепи является независимость действия возмущений. Это свойство называют *принципом наложения* или *принципом суперпозиции*, согласно которому отклик линейной электрической цепи на совокупность воздействий равен сумме откликов на каждое из воздействий в отдельности. Использование принципа наложения позволяет существенно упростить расчеты в линейных цепях.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

3.1. Сопротивление, индуктивность и емкость при гармоническом воздействии

Пусть к сопротивлению R (рис. 3.1) подведено гармоническое напряжение $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$. Найдем ток в сопротивлении R .

Согласно закону Ома

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \psi).$$

Но U_m/R – это амплитуда тока I_m . Тогда

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi).$$

Из сопоставления выражения для мгновенных значений тока и напряжения следует:

- ток через сопротивление совпадает по фазе с напряжением, приложенным к сопротивлению;
- законом Ома связаны не только мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока в нем, но и амплитуды и действующие значения напряжения и тока:

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \quad I = \frac{U}{R}.$$

Мгновенная мощность p_R , выделяемая в сопротивлении R , равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned} p_R &= ui = U_m I_m \cos^2(\omega t + \psi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] = \\ &= UI [1 + \cos 2(\omega t + \psi)]. \end{aligned}$$

Из полученного выражения для мгновенной мощности p_R следует:

- мгновенная мощность всегда положительна, т. е. в любой момент времени сопротивление потребляет энергию от цепи;
- мгновенная мощность состоит из постоянной составляющей $P = U_m I_m / 2 = UI$ и переменной составляющей, изменяющейся с удвоенной частотой,

$$p_{\sim} = \frac{U_m I_m}{2} \cos 2(\omega t + \psi) = UI \cos 2(\omega t + \psi).$$

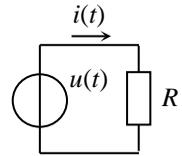


Рис. 3.1

Можно показать, что постоянная составляющая равна среднему значению мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] dt = \frac{U_m I_m}{2} = UI.$$

Среднее значение мгновенной мощности за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt$$

называют *средней* или *активной мощностью*.

Рассмотрим индуктивность при гармоническом воздействии (рис. 3.2). Пусть через индуктивность L протекает гармонический ток

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Поскольку $\omega L I_m$ – это амплитуда напряжения на индуктивности U_m , то, переходя от синусоидального представления гармонического колебания к косинусоидальному, получим

$$u_L = U_m \cos(\omega t + \alpha + \pi/2).$$

Сопоставляя выражения для мгновенных значений напряжения u_L и тока в индуктивности, можно сделать следующие выводы:

- напряжение на индуктивности опережает по фазе ток в индуктивности на угол $\pi/2$;
- амплитуды и действующие значения напряжения и тока в индуктивности связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \omega L I_m = x_L I_m; \quad U = x_L I,$$

хотя закон Ома не применим для мгновенных значений напряжения и тока в индуктивности.

Величину $x_L = \omega L$, имеющую размерность сопротивления, называют *индуктивным сопротивлением*. Величину, обратную индуктивному сопротивлению, называют *индуктивной проводимостью*

$$b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2\pi f L}.$$

Мгновенная мощность в индуктивности p_L равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p_L = u_L i = -U_m \sin(\omega t + \alpha) I_m \cos(\omega t + \alpha) =$$

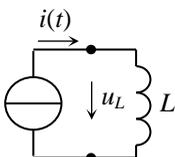


Рис. 3.2

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2(\omega t + \alpha) = \\
 &= -UI \sin 2(\omega t + \alpha).
 \end{aligned}$$

Из полученного соотношения следует, что мощность в индуктивности p_L изменяется по гармоническому закону, но с удвоенной частотой. В индуктивности происходит обмен энергией между источником и индуктивностью, причем средняя мощность за период равна нулю.

Рассмотрим емкость при гармоническом воздействии (рис. 3.3). Пусть к емкости приложено гармоническое напряжение

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi).$$

Найдем ток в емкости

$$i_C = C \frac{du}{dt} = -\omega C U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Поскольку $\omega C U_m$ — это амплитуда тока через емкость I_m , то, переходя от синусоидального представления гармонического колебания к косинусоидальному, получим

$$i_C = I_m \cos(\omega t + \psi + \pi/2).$$

Из сравнения выражений для мгновенных значений напряжения и тока через емкость следует:

- ток в емкости изменяется также по гармоническому закону, но опережает напряжение на емкости на угол $\pi/2$;
- амплитуды и действующие значения напряжения и тока в емкости связаны соотношением, подобным закону Ома,

$$U_m = I_m / \omega C = x_C I_m; \quad U = x_C I,$$

хотя закон Ома не применим для мгновенных значений напряжения и тока в емкости.

Величину $x_C = 1/\omega C = 1/2\pi fC$, имеющую размерность сопротивления, называют **емкостным сопротивлением**, а обратную ей величину $b_C = \omega C$ называют **емкостной проводимостью**.

Найдем мгновенную мощность в емкости p_C , равную произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned}
 p_C = u i_C &= -U_m \cos(\omega t + \psi) I_m \sin(\omega t + \psi) = \\
 &= -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2(\omega t + \psi) = \\
 &= -UI \sin 2(\omega t + \psi).
 \end{aligned}$$

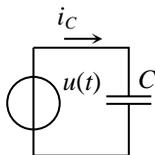


Рис. 3.3

Видно, что мгновенная мощность в емкости изменяется также по гармоническому закону, но с удвоенной частотой. Емкость обменивается энергией с источником питания, причем средняя мощность за период равна нулю.

3.2. Последовательная RLC -цепь. Классическое решение

Пусть через последовательную RLC -цепь (рис. 3.4) протекает гармонический ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем напряжение на зажимах цепи

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Воспользуемся соотношениями, связывающими напряжения u_R, u_L, u_C с токами через них:

$$u = RI_m \cos(\omega t + \alpha) + \omega LI_m \cos(\omega t + \alpha + \pi/2) + \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \alpha - \pi/2).$$

Принимая во внимание, что $\cos(\omega t + \alpha - \pi/2) = -\cos(\omega t + \alpha + \pi/2)$, получим

$$u = RI_m \cos(\omega t + \alpha) + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_m \cos(\omega t + \alpha + \pi/2).$$

Величину $(\omega L - 1/\omega C) = x_L - x_C = x$ называют **реактивным сопротивлением**. Реактивное сопротивление x может быть больше и меньше нуля. Если $\omega L > 1/\omega C$, то $x > 0$. Если $\omega L < 1/\omega C$, то $x < 0$.

Напряжение на активном сопротивлении называют **активной составляющей напряжения**, а напряжение на реактивном сопротивлении – **реактивной составляющей напряжения**.

На рис. 3.5 приведена векторная диаграмма последовательной RLC -цепи. Из диаграммы видно, что

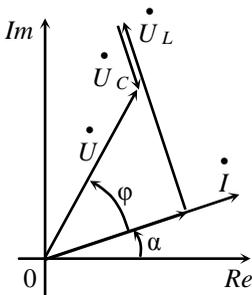


Рис. 3.5

$$U_m = \sqrt{(RI_m)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I_m^2}.$$

Выведем I_m за знак корня. Тогда

$$U_m = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m.$$

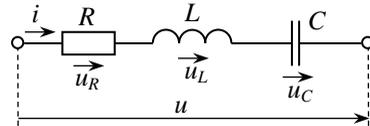


Рис. 3.4

Величину

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + x^2}$$

называют **полным сопротивлением** рассматриваемой цепи.

Из последнего соотношения следует, что амплитуды и действующие значения напряжения и тока в последовательной RLC -цепи связаны соотношением, аналогичным закону Ома:

$$U_m = zI_m; \quad U = zI.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током

$$\varphi = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Итак,

$$u = U_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi),$$

т. е. напряжение на последовательной RLC -цепи изменяется также по гармоническому закону, но сдвинуто по фазе относительно тока на угол φ , причем $|\varphi| \leq \pi/2$.

Если $x = x_L - x_C = 0$, то такой режим работы электрической цепи называют **резонансом напряжений**. В этом режиме ток и напряжение в последовательной RLC -цепи совпадают по фазе.

На основании векторной диаграммы можно построить **треугольники напряжений** (рис. 3.6). Из этих треугольников следует

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2};$$

$$U_a = U \cos \varphi;$$

$$U_p = U \sin \varphi.$$

Если все стороны треугольника напряжений разделить на ток I , то получим **прямоугольный треугольник сопротивлений** (рис. 3.7), из которого следует

$$z = \sqrt{R^2 + x^2};$$

$$R = z \cos \varphi;$$

$$x = z \sin \varphi.$$

Рассмотрим два частных случая. В последовательной RL -цепи

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2};$$

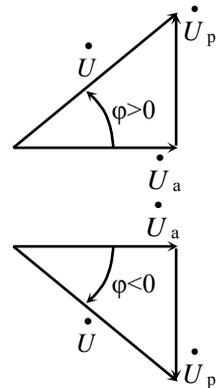


Рис. 3.6

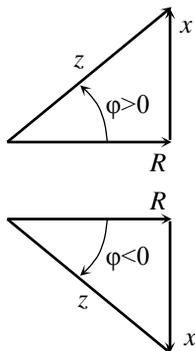


Рис. 3.7

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R};$$

$$0 < \varphi < \pi/2.$$

В последовательной RC -цепи

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega CR};$$

$$-\pi/2 < \varphi < 0.$$

3.3. Последовательная RLC -цепь. Метод комплексных амплитуд

До сих пор установившиеся значения напряжений и токов мы находили путем решения интегродифференциальных уравнений. Однако мы рассматривали простейшие цепи. По мере усложнения цепей, решение интегродифференциальных уравнений становится крайне затруднительным.

В 1883 – 1884 гг. американские инженеры Штейнметц и Кеннели предложили для расчета установившихся режимов линейных электрических цепей при гармоническом воздействии **метод комплексных амплитуд (комплексный метод, символический метод)**. Этот метод основан на символическом изображении гармонических функций времени комплексными числами и позволяет перейти от решения интегродифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений.

Решение задачи методом комплексных амплитуд включает следующие этапы:

- после составления интегродифференциального уравнения равновесия цепи все гармонические функции времени заменяют их мгновенными комплексами. В результате такой замены интегродифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические;
- решают полученные алгебраические уравнения и находят комплексные амплитуды искомых функций;
- переходят от комплексных амплитуд к гармоническим функциям времени.

Применим метод комплексных амплитуд к нахождению напряжения на зажимах последовательной RLC -цепи, по которой протекает гармонический ток

$$i = I_m \cos(\omega t + \alpha).$$

На основании второго закона Кирхгофа для последовательной RLC -цепи нами было получено следующее уравнение:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt.$$

Заменим гармонические функции времени соответствующими мгновенными комплексами:

$$I_m \cos(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \dot{I}_m e^{j\omega t};$$

$$U_m \cos(\omega t + \psi) \leftrightarrow \dot{U}_m e^{j\omega t};$$

$$\frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t + \alpha)] \leftrightarrow \frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t};$$

$$\int_{-\infty}^t [I_m \cos(\omega t + \alpha)] dt \leftrightarrow \int_{-\infty}^t \dot{I}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega}.$$

В этих выражениях знак « \leftrightarrow » означает соответствие. Из последних двух соотношений следует, что

- операции дифференцирования во временной области соответствует операция умножения комплекса на $j\omega$;
- операции интегрирования во временной области соответствует операция деления комплекса на $j\omega$.

Подставим найденные величины в исходное уравнение баланса напряжений:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = R \dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Сократив уравнение на $e^{j\omega t}$, получим алгебраическое комплексное уравнение

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m. \quad (3.1)$$

Вынесем ток \dot{I}_m за скобки:

$$\dot{U}_m = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m.$$

Величину

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jx$$

называют **комплексным сопротивлением** или **импедансом** цепи.

Комплексное сопротивление Z может быть выражено в тригонометрической и показательной формах:

$$Z = z \cos \varphi + jz \sin \varphi ;$$

$$Z = ze^{j\varphi} ,$$

где $z = \text{mod } Z = \sqrt{R^2 + x^2}$ – полное сопротивление цепи;

$\varphi = \arctg \frac{x}{R}$ – аргумент комплексного сопротивления Z .

Из выражения (3.1) следует, что комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи записываются следующим образом:

- на сопротивлении $\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m$;
- на индуктивности $\dot{U}_{mL} = j\omega L\dot{I}_m$;
- на емкости $\dot{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m$.

Величину $Z_L = j\omega L$ называют **комплексным индуктивным сопротивлением**, а величину $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ – **комплексным емкостным сопротивлением**.

С учетом введенных обозначений,

$$Z = R + Z_L + Z_C .$$

Итак, **закон Ома для комплексных амплитуд** имеет вид

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m .$$

Разделив обе части этого равенства на $\sqrt{2}$, получим **закон Ома для комплексных действующих значений**:

$$\dot{U} = Z\dot{I} .$$

Комплексная амплитуда искомого напряжения

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m = ze^{j\varphi} \cdot I_m e^{j\alpha} = zI_m e^{j(\alpha+\varphi)} .$$

Перейдем от комплексной амплитуды искомого напряжения к функции времени:

$$u = zI_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi) = U_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi) .$$

Это соотношение полностью совпадает с полученным ранее путем решения интегродифференциального уравнения.

Находя напряжение на последовательной RLC -цепи, мы получили (3.1), что комплексная амплитуда напряжения на ее зажимах равна сумме комплексных амплитуд напряжений на элементах цепи.

Обобщая полученный результат на произвольное количество ветвей, можно сформулировать **второй закон Кирхгофа для комплексных амплитуд напряжений в контуре**: алгебраическая сумма комплексных амплитуд напряжений в контуре равна нулю

$$\sum_l \dot{U}_{ml} = 0,$$

где l – номера ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Поделив левую и правую часть последнего соотношения на $\sqrt{2}$, получим **второй закон Кирхгофа для комплексных действующих напряжений в контуре**:

$$\sum_l \dot{U}_l = 0,$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных действующих напряжений в контуре равна нулю.

3.4. Параллельная RLC -цепь

Пусть к параллельной RLC -цепи (рис. 3.8) приложено гармоническое напряжение

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi).$$

Найдем ток i , протекающий через эту цепь, для чего воспользуемся методом комплексных амплитуд. Согласно первому закону Кирхгофа

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Выразив токи ветвей через приложенное к ним напряжение, получим следующее уравнение электрического равновесия цепи:

$$i = Gu + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt + C \frac{du}{dt}.$$

Перейдем от гармонических функций времени к соответствующим мгновенным комплексам:

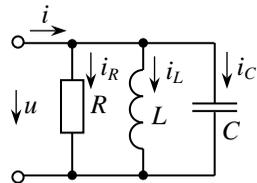


Рис. 3.8

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = G\dot{U}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U}_m e^{j\omega t} + j\omega C\dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Сократив уравнение на $e^{j\omega t}$, получим

$$\dot{I}_m = G\dot{U}_m + \frac{1}{j\omega L}\dot{U}_m + j\omega C\dot{U}_m. \quad (3.2)$$

Слагаемые в правой части этого уравнения представляют собой комплексные амплитуды токов в сопротивлении R , индуктивности L и емкости C :

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mR} &= G\dot{U}_m; \\ \dot{I}_{mL} &= \frac{1}{j\omega L}\dot{U}_m = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_m; \\ \dot{I}_{mC} &= j\omega C\dot{U}_m. \end{aligned}$$

Обобщая полученный результат на произвольное количество ветвей, сформулируем **первый закон Кирхгофа для комплексных амплитуд токов в узле**: алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов в узле равна нулю

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0,$$

где k – номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Поделив левую и правую часть последнего соотношения на $\sqrt{2}$, получим **первый закон Кирхгофа для комплексных действующих токов в узле**:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Рассмотрим величины, входящие в выражения для комплексных амплитуд токов в элементах. Величину $Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$ называют **комплексной индуктивной проводимостью**, а величину $Y_C = j\omega C$ – **комплексной емкостной проводимостью**.

С учетом введенных обозначений уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$\dot{I}_m = (G + Y_L + Y_C)\dot{U}_m.$$

Величину $Y = (G + Y_L + Y_C)$ называют **комплексной проводимостью** или **адмитансом** цепи. Итак, комплексная проводимость параллельной RLC -цепи

$$Y = (G + Y_L + Y_C) = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

Величину $b = \frac{1}{\omega L} - \omega C = b_L - b_C$ называют **реактивной проводимостью цепи**. Тогда

$$Y = G - jb = y e^{-j\varphi} = y \cos \varphi - j y \sin \varphi.$$

Величину $y = \text{mod} Y = \sqrt{G^2 + b^2}$ называют **полной проводимостью** параллельной RLC -цепи.

Используя понятие комплексной проводимости, можно записать:

$$\dot{I}_m = Y \dot{U}_m \quad \text{или} \quad \dot{I} = Y \dot{U}.$$

Эти соотношения выражают **закон Ома для комплексных амплитуд** и **комплексных действующих значений**.

Переходя в последних выражениях к модулям, получим

$$I_m = y U_m, \quad I = y U,$$

т. е. амплитуды и действующие значения тока и напряжения в параллельной RLC -цепи связаны **законом Ома**.

Найдем комплексную амплитуду тока, протекающего через параллельную RLC -цепь

$$\dot{I}_m = Y \dot{U}_m = y e^{-j\varphi} U_m e^{j\psi} = y U_m e^{j(\psi - \varphi)} = I_m e^{j(\psi - \varphi)}.$$

Перейдем от комплексной амплитуды тока \dot{I}_m к функции времени:

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi).$$

Сдвиг фаз между напряжением и током

$$\varphi = \arg Y = \arctg \frac{b}{G} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}},$$

причем $|\varphi| \leq \pi/2$.

Построим векторную диаграмму параллельной RLC -цепи (рис. 3.9). Угол φ , отсчитываемый на векторной диаграмме от тока к напряжению, положителен при индуктивном характере цепи (т. е. при $b > 0$) и отрицателен при емкостном характере цепи (т. е. при $b < 0$).

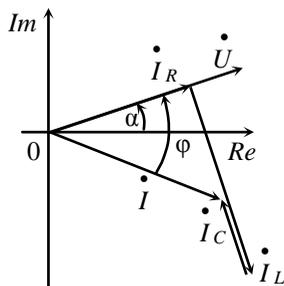


Рис. 3.9

Если $b_L = b_C$, то угол сдвига фаз между напряжением и током $\varphi = 0$. Такой режим работы электрической цепи называют **резонансом токов**.

Прямоугольный треугольник с катетами \dot{I}_R и $\dot{I}_L + \dot{I}_C$ и гипотенузой \dot{I} называют **треугольником токов**. Ток $I_a = GU$ называют **активной составляющей тока**. Ток $I_p = bU$ называют **реактивной составляющей тока**.

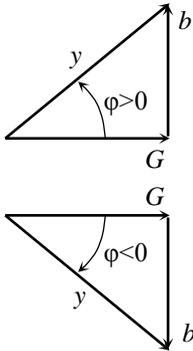


Рис. 3.10

Из треугольника токов следует

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2};$$

$$I_a = I \cos \varphi;$$

$$I_p = I \sin \varphi.$$

Разделив стороны треугольника токов на напряжение U , получим прямоугольный **треугольник проводимостей** (рис. 3.10), из которого следует

$$y = \sqrt{G^2 + b^2};$$

$$G = y \cos \varphi;$$

$$b = y \sin \varphi.$$

3.5. Мощность в цепи гармонического тока

Рассмотрим участок электрической цепи, напряжение на котором

$$u = U_m \cos \omega t,$$

а ток

$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где φ – угол сдвига фаз между напряжением и током.

Поскольку разность фаз отсчитывается по отношению к току, то $\varphi = \psi - \alpha$. Отсюда $\alpha = \psi - \varphi$.

Найдем мгновенную мощность на этом участке цепи

$$p = ui = U_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

получим

$$p = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$$

или

$$p = UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)].$$

Как видно из этих выражений, мгновенная мощность в цепи имеет постоянную составляющую $UI \cos \varphi$ и переменную составляющую $UI \cos(2\omega t - \varphi)$, изменяющуюся с удвоенной частотой.

Активная мощность (средняя мощность за период) численно равна постоянной составляющей мгновенной мощности

$$P = UI \cos \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ называют **коэффициентом мощности**. Активную мощность измеряют в ваттах (Вт).

Величину, равную произведению действующих значений напряжения и тока $S = UI$, называют **полной мощностью** и измеряют в вольт-амперах (В·А).

Комплексное число \underline{S} , модуль которого равен полной мощности S , а аргумент – углу сдвига фаз φ между напряжением и током, называют **комплексной мощностью**:

$$\underline{S} = S e^{j\varphi}.$$

В тригонометрической форме

$$\underline{S} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi.$$

Отсюда следует, что действительная часть комплексной мощности равна активной мощности цепи:

$$\operatorname{Re}[\underline{S}] = S \cos \varphi = P.$$

Мнимую часть комплексной мощности

$$\operatorname{Im}[\underline{S}] = S \sin \varphi = Q$$

называют **реактивной мощностью** и измеряют в вольт-амперах реактивных (вар).

Если активная мощность характеризует скорость преобразования электрической энергии в другие виды энергии, то реактивная мощность характеризует скорость обмена энергией между источником и приемником. Реактивная мощность положительна при индуктивной нагрузке ($\sin \varphi > 0$) и отрицательна при емкостной нагрузке ($\sin \varphi < 0$).

Комплексную мощность можно представить в алгебраической форме:

$$\underline{S} = P + jQ.$$

Комплексному числу \underline{S} можно поставить в соответствие вектор, проекции которого на действительную и мнимую оси равны соответственно P и Q .

Прямоугольный треугольник, образованный гипотенузой S и катетами P и Q , называют *треугольником мощностей* (рис. 3.11). Очевидно,

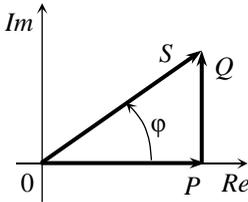


Рис. 3.11

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}; \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}.$$

Комплексная, полная, активная и реактивная мощности могут быть выражены через комплексное сопротивление Z и его компоненты z, R, x :

$$S = UI = I^2 z = U^2 y;$$

$$\underline{S} = Se^{j\varphi} = I^2 z e^{j\varphi} = I^2 Z;$$

$$P = UI \cos \varphi = I^2 z \cos \varphi = I^2 R = U^2 y \cos \varphi = U^2 G = U_a I = UI_a;$$

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 z \sin \varphi = I^2 x = U^2 y \sin \varphi = U^2 b = U_p I = UI_p.$$

Выразим комплексную мощность \underline{S} через действующие значения напряжения и тока

$$\underline{S} = Se^{j\varphi} = UI e^{j(\psi - \alpha)} = U e^{j\psi} \cdot I e^{-j\alpha} = \dot{U} I^*,$$

т. е. комплексная мощность \underline{S} равна произведению комплексного действующего напряжения на комплексно сопряженный действующий ток.

3.6. Комплексные частотные характеристики цепи

Комплексной частотной характеристикой (КЧХ) цепи называют отношение комплексных изображений отклика к воздействию

$$H(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}},$$

где \dot{X}_m – комплексная амплитуда воздействия;

\dot{X} – комплексное действующее значение воздействия;

\dot{Y}_m – комплексная амплитуда отклика;

\dot{Y} – комплексное действующее значение отклика.

КЧХ цепи может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной величиной. КЧХ $H(j\omega)$, как и любая комплексная величина, может быть записана в показательной форме

$$H(j\omega) = H(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}.$$

Модуль КЧХ $H(\omega)$ равен отношению амплитуд или действующих значений отклика и воздействия

$$H(\omega) = \frac{Y_m}{X_m} = \frac{Y}{X}.$$

Аргумент КЧХ $\varphi(\omega)$ равен разности начальных фаз отклика и воздействия

$$\varphi(\omega) = \varphi_y - \varphi_x.$$

Пусть $\dot{X}_m = 1$. Это означает, что воздействие представляет собой гармоническое колебание с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой. Тогда $H(j\omega)|_{\dot{X}_m=1} = \dot{Y}_m$, т. е. КЧХ цепи численно равна комплексной амплитуде отклика цепи на гармоническое воздействие с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой.

Зависимость модуля КЧХ цепи $H(\omega)$ от частоты ω называют **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) цепи. Зависимость аргумента КЧХ цепи $\varphi(\omega)$ от частоты ω называют **фазочастотной характеристикой** (ФЧХ) цепи.

Графически КЧХ цепи представляют либо в виде совокупности АЧХ и ФЧХ, либо в виде одной **амплитудно-фазовой характеристики**, которую называют **годографом**. Годограф представляет собой линию, описываемую на комплексной плоскости концом вектора $H(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

КЧХ цепи делят на входные и передаточные. КЧХ называют **входной**, если воздействие и отклик определяются на одной паре зажимов цепи.

Выделим i -ю пару зажимов цепи (рис. 3.12). Если воздействием является ток \dot{I}_i , а откликом – напряжение \dot{U}_i , то

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_i}{\dot{I}_i} = Z_{ii}(j\omega),$$

т. е. КЧХ представляет собой **комплексное входное сопротивление** цепи относительно i -й пары зажимов.

Если воздействием является напряжение \dot{U}_i , а откликом ток \dot{I}_i , то

$$H(j\omega) = \frac{\dot{I}_i}{\dot{U}_i} = Y_{ii}(j\omega);$$

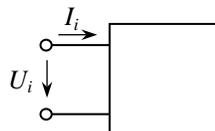


Рис. 3.12

т. е. КЧХ представляет собой **комплексную входную проводимость** цепи относительно i -й пары зажимов. Таким образом, возможны две разновидности входных КЧХ.

КЧХ называют **передаточной**, если воздействие и отклик определяются на разных парах зажимов цепи. Выделим i -ю и k -ю пару зажимов цепи (рис. 3.13). Различают четыре вида передаточных характеристик:

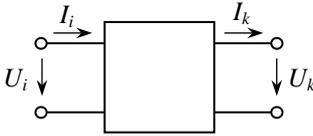


Рис. 3.13

- комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_k}{\dot{U}_i};$$

- комплексный коэффициент передачи по току

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_k}{\dot{I}_i};$$

- комплексное передаточное сопротивление

$$Z_{ki}(j\omega) = \frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_i};$$

- комплексная передаточная проводимость

$$Y_{ki}(j\omega) = \frac{\dot{I}_k}{\dot{U}_i}.$$

3.7. Трехфазные цепи

Трехфазной системой ЭДС (напряжений) называется совокупность трех источников гармонического напряжения одной частоты, начальные фазы которых сдвинуты на угол 120° (рис. 3.14). Источники электрической энергии, формирующие трехфазную систему ЭДС, называют **трехфазными источниками**, а электрические цепи с трехфазными источниками – **трехфазными электрическими цепями**.

Часть трехфазной электрической цепи совместно с одним из трех источников, к которому она подключена, называют **фазой**. Фазы обозначают буквами A , B и C . Таким образом, термин «фаза» в электротехнике используется в двух смыслах:

- как аргумент электрического колебания;
- как часть трехфазной электрической цепи, связанной с одним из источников.

Источником трехфазного напряжения может быть электромеханический генератор, на статоре которого размещены три обмотки, оси которых развернуты на угол 120° (рис. 3.15), где A, B, C – начала обмоток; X, Y, Z – концы обмоток.

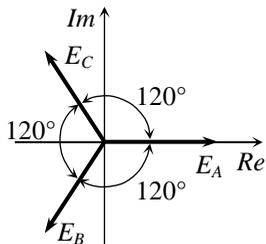


Рис. 3.14

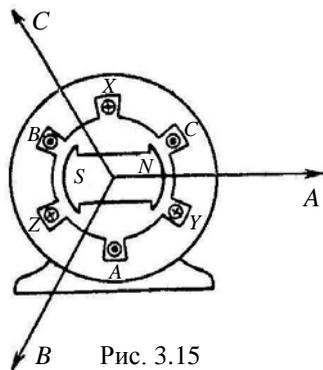


Рис. 3.15

В простейшем случае к каждой из фаз генератора может быть подключена своя нагрузка (рис. 3.16). В такой трехфазной цепи фазы не связаны друг с другом, поэтому ее называют **несвязанной**.

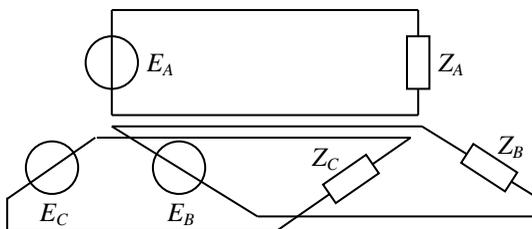


Рис. 3.16

Если источник трехфазного напряжения $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ и сопротивления нагрузки Z_A, Z_B, Z_C соединить звездой, то получим одну из разновидностей **связанных** трехфазных цепей (рис. 3.17). Общую точку соединения источников, а также общую точку соединения нагрузки называют **нейтральной** или **нулевой точкой**. Провод, соединяющий нейтральные точки источников и нагрузки, также называют **нейтральным**.

Если $|\dot{E}_A| = |\dot{E}_B| = |\dot{E}_C|$ и $Z_A = Z_B = Z_C$ (случай равномерной нагрузки фаз), то сумма токов фаз будет равна нулю и по нейтральному проводу ток протекать не будет. Поэтому при равномерной нагрузке фаз

нейтральный провод не нужен. В зависимости от того, используется или не используется нейтральный провод, в трехфазных цепях возможны *четырёхпроводные* или *трехпроводные линии передачи*.

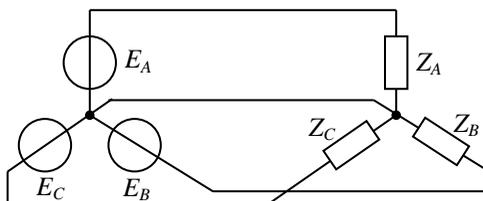


Рис. 3.17

ЭДС источников и напряжения на их зажимах, напряжения на фазах нагрузки и токи в них называют соответственно *фазными* ЭДС, напряжениями и токами и обозначают E_{ϕ} , U_{ϕ} , I_{ϕ} .

Напряжения между линейными проводниками и токи в них называют *линейными* напряжениями и токами и обозначают $U_{л}$, $I_{л}$. При соединении источников звездой линейные токи равны фазным токам $I_{л} = I_{\phi}$.

Обмотки генератора могут быть соединены не только звездой, но и треугольником. В этом случае начало одной из фазных обмоток соединяется с концом следующей (рис. 3.18). При соединении фаз источника треугольником линейные напряжения будут равны фазным напряжениям $U_{л} = U_{\phi}$.

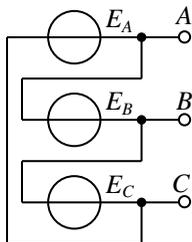


Рис. 3.18

Независимо от того, как соединены фазы источника, фазы нагрузки могут быть соединены или звездой или треугольником. Таким образом, возможны четыре комбинации соединений:

- звезда – звезда;
- звезда – треугольник;
- треугольник – треугольник;
- треугольник – звезда.

Различают *симметричный* и *несимметричный режим работы* трехфазной цепи. При симметричном режиме $|\dot{E}_A| = |\dot{E}_B| = |\dot{E}_C|$ и $Z_A = Z_B = Z_C$. В противном случае имеет место несимметричный режим.

Трехфазные цепи в силу ряда причин получили очень широкое распространение в электроэнергетике. Во-первых, трехфазные асин-

хронные двигатели являются самыми простыми, а потому и самыми дешевыми и надежными. Во-вторых, при передаче электрической энергии трехфазные линии имеют высокие технико-экономические характеристики. В-третьих, при выпрямлении трехфазного напряжения гораздо легче обеспечить малое напряжение пульсации.

Основные изобретения в области трехфазных цепей сделаны русским инженером и ученым Михаилом Осиповичем Доливо-Добровольским (1862-1919). Он предложил трехфазные генератор, трансформатор и двигатель. Впервые трехфазная система была продемонстрирована на электротехнической выставке во Франкфурте-на-Майне в 1891 году.

Рассмотрим расчет трехфазной цепи при соединении звездой (рис. 3.19).

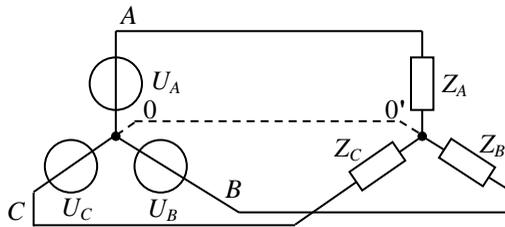


Рис. 3.19

При симметричном режиме работы цепи потенциалы узлов 0 и 0' одинаковы и их можно объединить нулевым проводом. При этом

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Если заданы фазные напряжения \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C , то расчет токов в отдельных фазах можно вести независимо:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z}.$$

Линейные напряжения определяют по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Построим векторную диаграмму фазных и линейных напряжений (рис. 3.20). Отсюда следует, что

$$\dot{U}_л = \sqrt{3} \dot{U}_ф.$$

При несимметричной нагрузке потенциалы узлов 0 и 0' не будут равны. Найдем напряжение между узлами 0 и 0' при условии, что они соединены нейтральным проводом с сопротивлением Z_N (рис. 3.21).

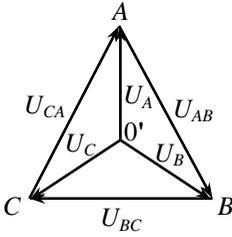


Рис. 3.20

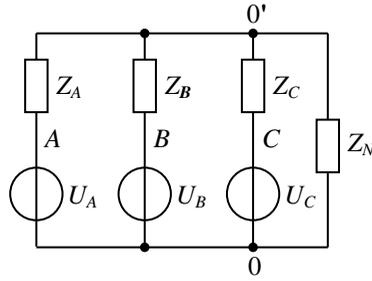


Рис. 3.21

Перейдем от источников напряжений к эквивалентным источникам тока (рис. 3.22).

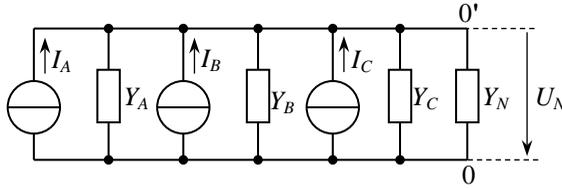


Рис. 3.22

Тогда

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A}; \quad \dot{i}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B}; \quad \dot{i}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C}$$

или

$$\dot{i}_A = \dot{U}_A Y_A; \quad \dot{i}_B = \dot{U}_B Y_B; \quad \dot{i}_C = \dot{U}_C Y_C.$$

Три источника можно заменить одним эквивалентным источником

$$\dot{i}_{\text{эКВ}} = \dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C = \dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C.$$

Все проводимости можно заменить одной эквивалентной проводимостью

$$Y_{\text{эКВ}} = Y_A + Y_B + Y_C + Y_N.$$

Тогда согласно закону Ома

$$U_N = \dot{U}_{0'0} = \dot{i}_{\text{эКВ}} Y_{\text{эКВ}} = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}.$$

Теперь можно найти токи

$$\dot{i}_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_N) Y_A; \quad \dot{i}_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_N) Y_B; \quad \dot{i}_C = (\dot{U}_C - \dot{U}_N) Y_C.$$

Рассмотрим случай несимметричный трехфазной цепи, соединенной звездой без нейтрального провода. В этом случае заданными будут линейные напряжения.

Пусть фазные напряжения на зажимах нагрузки равны \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C (пока они нам неизвестны). Тогда токи фаз

$$\dot{i}_A = \dot{U}_A Y_A; \quad \dot{i}_B = \dot{U}_B Y_B; \quad \dot{i}_C = \dot{U}_C Y_C.$$

Сумма этих токов в узле O' должна равняться нулю согласно первому закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C = 0. \quad (3.3)$$

Выразим фазные напряжения \dot{U}_B и \dot{U}_C через \dot{U}_A и заданные линейные напряжения:

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A - \dot{U}_{AB}, \quad \dot{U}_C = \dot{U}_A + \dot{U}_{CA}.$$

Подставим найденные значения \dot{U}_B и \dot{U}_C в (3.3). Получим

$$\dot{U}_A Y_A + (\dot{U}_A - \dot{U}_{AB}) Y_B + (\dot{U}_A + \dot{U}_{CA}) Y_C = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно \dot{U}_A , получим

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB} Y_B - \dot{U}_{CA} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Аналогичным образом можно найти

$$\dot{U}_B = \frac{\dot{U}_{BC} Y_C - \dot{U}_{AB} Y_A}{Y_A + Y_B + Y_C}; \quad \dot{U}_C = \frac{\dot{U}_{CA} Y_A - \dot{U}_{BC} Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Зная фазные напряжения, по закону Ома можно рассчитать фазные токи.

Рассмотрим расчет трехфазной цепи при соединении треугольником (рис. 3.23). В случае несимметричного режима работы при заданных линейных (фазных) напряжениях фазные токи определяются по закону Ома:

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}}; \quad \dot{i}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}}; \quad \dot{i}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}.$$

Линейные токи можно найти на основании первого закона Кирхгофа для узлов A , B и C :

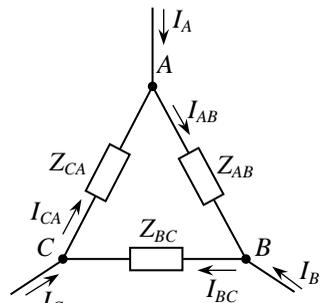


Рис. 3.23

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Аналогичным образом рассчитывают трехфазную цепь в симметричном режиме при $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z$.

4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ

4.1. Эквивалентное преобразование участка цепи с последовательным соединением элементов

Два участка электрической цепи называют *эквивалентными*, если при замене одного из них другим токи и напряжения в остальной части цепи не изменятся. Рассмотрим неразветвленную электрическую цепь, содержащую k сопротивлений, l индуктивностей, m емкостей и n источников напряжения (рис. 4.1).

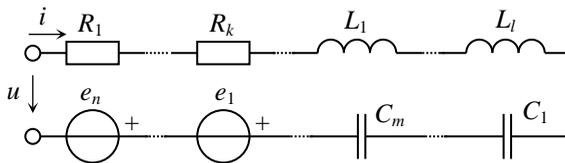


Рис. 4.1

В соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$R_1 i + \dots + R_k i + L_1 \frac{di}{dt} + \dots + L_l \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt + \dots + \frac{1}{C_m} \int_{-\infty}^t i dt = u - (e_1 + \dots + e_n).$$

Приведем подобные члены:

$$R_{\text{ЭК}} i + L_{\text{ЭК}} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_{\text{ЭК}}} \int_{-\infty}^t i dt = u - e_{\text{ЭК}},$$

где $R_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^k R_i$, $L_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^l L_i$, $\frac{1}{C_{\text{ЭК}}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_i}$, $e_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^n e_i$.

Полученное уравнение соответствует цепи, изображенной на рис. 4.2. Таким образом, ток и напряжение на зажимах последовательной цепи не изменятся, если заменить ее эквивалентной схемой, параметры которой определены в соответствии с приведенными формулами.

Если рассматриваемая цепь находится под гармоническим воздействием, то последовательно соединенные $R_{\text{ЭК}}$, $L_{\text{ЭК}}$, и $C_{\text{ЭК}}$ можно заменить одним комплексным сопротивлением

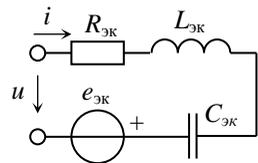


Рис. 4.2

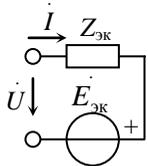


Рис. 4.3

$$Z_{\text{эк}} = R_{\text{эк}} + j\omega L_{\text{эк}} + \frac{1}{j\omega C_{\text{эк}}}.$$

Согласно закону Ома и второму закону Кирхгофа

$$Z_{\text{эк}} \dot{I} = \dot{U} - \dot{E}_{\text{эк}}.$$

Полученному уравнению соответствует схема рис. 4.3, содержащая одно комплексное сопротивление $Z_{\text{эк}}$.

4.2. Эквивалентное преобразование участка цепи с параллельным соединением элементов

Рассмотрим параллельную электрическую цепь, содержащую k сопротивлений, l индуктивностей, m емкостей и n источников тока (рис. 4.4).

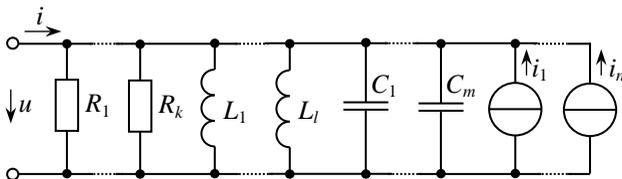


Рис. 4.4

Согласно первому закону Кирхгофа

$$i = \frac{1}{R_1} u + \dots + \frac{1}{R_k} u + \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u dt + \dots + \frac{1}{L_l} \int_{-\infty}^t u dt + \\ + C_1 \frac{du}{dt} + \dots + C_m \frac{du}{dt} - (i_1 + \dots + i_n).$$

Приведем подобные члены. Тогда

$$i = \frac{1}{R_{\text{эк}}} u + \frac{1}{L_{\text{эк}}} \int_{-\infty}^t u dt + C_{\text{эк}} \frac{du}{dt} - i_{\text{эк}},$$

где $\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{R_i}$; $\frac{1}{L_{\text{эк}}} = \sum_{i=1}^l \frac{1}{L_i}$; $C_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^m C_i$; $i_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^n i_i$.

Полученному уравнению соответствует цепь, изображенная на рис. 4.5. Эта цепь эквивалентна исходной.

Если рассматриваемая цепь находится под гармоническим воздействием, то параллельно соединенные $R_{\text{эк}}$, $L_{\text{эк}}$, $C_{\text{эк}}$ можно заменить одной комплексной проводимостью

$$Y_{\text{эк}} = \frac{1}{R_{\text{эк}}} + \frac{1}{j\omega L_{\text{эк}}} + j\omega C_{\text{эк}}.$$

Тогда уравнение электрического равновесия цепи можно записать в виде

$$\dot{i} = Y_{\text{эк}} \dot{U} - \dot{i}_{\text{эк}}.$$

Этому уравнению соответствует схема рис. 4.6, содержащая одну комплексную проводимость.

Электрические цепи со смешанным соединением пассивных элементов могут быть преобразованы путем последовательного преобразования участков цепи с параллельным и последовательным соединением и в конечном итоге заменены одним комплексным сопротивлением (проводимостью).

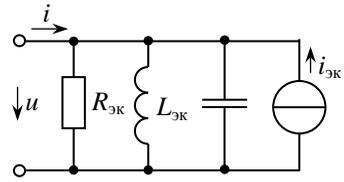


Рис. 4.5

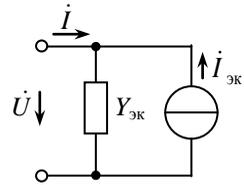


Рис. 4.6

4.3. Эквивалентные преобразования треугольника в звезду и звезды в треугольник

Пусть задан участок цепи, содержащий три двухполюсника, соединенные треугольником (рис. 4.7). Покажем, что треугольник может быть преобразован в эквивалентную звезду, и определим ее параметры.

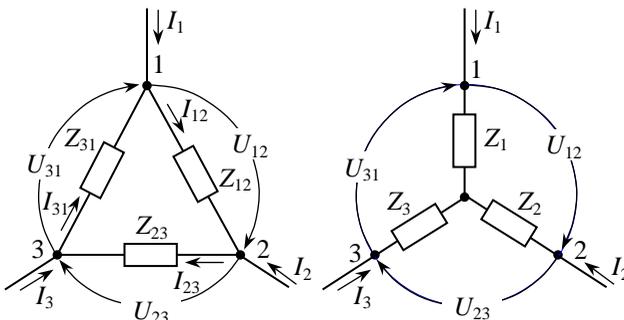


Рис. 4.7

Итак, даны Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} . Требуется найти такие Z_1, Z_2, Z_3 , чтобы при замене треугольника звездой токи и напряжение в остальной части цепи не изменились.

Составим систему уравнений электрического равновесия для исходной цепи (треугольника). Поскольку схема содержит три узла, то по первому закону Кирхгофа можно составить два независимых уравнения. Для узлов 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_{31} - \dot{I}_{12} &= 0; \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_{12} - \dot{I}_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Дополним эти соотношения уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа для контура треугольника:

$$Z_{12}\dot{I}_{12} + Z_{23}\dot{I}_{23} + Z_{31}\dot{I}_{31} = 0.$$

Выразим из 1-го и 2-го уравнения токи \dot{I}_{31} и \dot{I}_{23} , подставим их в 3-е уравнение, разрешив которое относительно тока \dot{I}_{12} , получим

$$\dot{I}_{12} = \frac{Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_1 - \frac{Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_2.$$

Напряжение между узлами 1 и 2 в треугольнике

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}_{12}Z_{12} = \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_1 - \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_2.$$

То же напряжение для соединения звездой

$$\dot{U}_{12} = Z_1\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2.$$

Но согласно условию эквивалентности напряжения между узлами 1 и 2 в обеих схемах должны быть одинаковы. Тогда

$$\frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_1 - \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \dot{I}_2 = Z_1\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , что возможно, если

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_2 &= \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_3 &= \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Первые два соотношения следуют непосредственно из уравнения, а третье может быть получено аналогично первым двум, если рассмотреть другую пару узлов.

Итак, комплексное сопротивление луча звезды равно произведению комплексных сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму комплексных сопротивлений трех сторон треугольника.

При эквивалентном преобразовании звезды в треугольник известными являются комплексные сопротивления лучей звезды Z_1, Z_2, Z_3 , а требуется найти комплексное сопротивление сторон треугольника Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} . Это можно сделать, разрешив систему уравнений (4.1) относительно Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} . В результате получим

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3};$$

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1};$$

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2}.$$

Преобразование треугольника в звезду и звезды в треугольник позволяет в ряде случаев существенно упростить расчеты.

4.4. Эквивалентные преобразования источников напряжения и тока

Линейные источники напряжения и тока будем считать эквивалентными, если при замене одного источника другим токи и напряжения во внешней цепи не изменяются.

Напряжение на зажимах источника напряжения (рис. 4.8)

$$\dot{U} = \dot{E} - \dot{I}_1 Z.$$

Напряжение на зажимах источника тока (рис. 4.8)

$$\dot{U} = (\dot{I} - \dot{I}_1)Z = \dot{I}Z - \dot{I}_1 Z.$$

Приравняв напряжения на зажимах источников, получим условие их эквивалентности:

$$\dot{E} = \dot{I}Z.$$

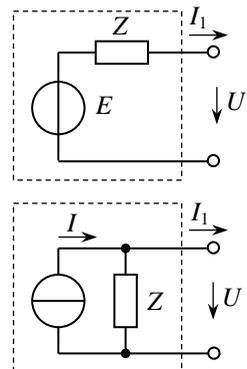


Рис. 4.8

Следует заметить, что источники напряжения и тока будут эквивалентными только в смысле равенства напряжения и тока во внешней цепи, при этом мощности на внутренних сопротивлениях будут неодинаковы. Например, в режиме холостого хода полная мощность на внутреннем сопротивлении источника напряжения равна нулю, а на внутреннем сопротивлении источника тока – максимальна и равна $I^2 z$.

Отметим также, что идеальные источники напряжения и тока не могут быть непосредственно преобразованы один в другой. Однако если в схеме имеется произвольный пассивный двухполюсник, включенный последовательно с идеальным источником напряжения, то его сопротивление можно рассматривать как внутреннее сопротивление источника напряжения, что позволит перейти к эквивалентному источнику тока.

Аналогично, если в схеме имеется произвольный пассивный двухполюсник, включенный параллельно идеальному источнику тока, то его можно рассматривать, как внутреннее сопротивление источника тока, что позволит перейти к эквивалентному источнику напряжения.

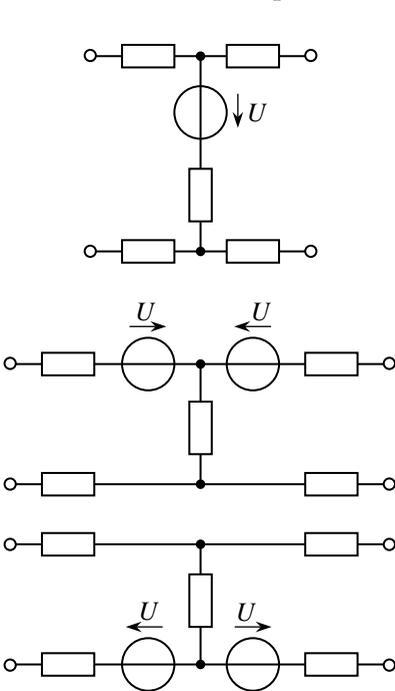


Рис. 4.9

Если в схеме нет пассивных цепей, подключенных последовательно с идеальным источником напряжения или параллельно с идеальным источником тока, то такие источники могут быть устранены из рассматриваемой цепи с помощью преобразований, называемых *переносом источников*.

4.5. Перенос источников

В ряде случаев расчет электрической цепи упрощается при переносе в схеме источников напряжения или тока.

Правило переноса источников напряжения (рис. 4.9): источник напряжения может быть перенесен из какой-либо ветви схемы во все другие ветви, подключенные к одному из рассматриваемых

узлов, при этом ориентация источников напряжения относительно направления обхода контуров сохраняется.

Преобразованная и исходная схемы будут эквивалентны, так как результирующие ЭДС, действующие в контурах обеих схем, будут одинаковы, т. е. обе схемы описываются одной и той же системой уравнений баланса напряжений в контурах.

Правило переноса источников тока: источник тока может быть заменен источниками тока, подключенными параллельно всем ветвям, входящим в контур с заменяемым источником (рис. 4.10).

При таком преобразовании суммы токов в узлах исходной и преобразованной схем будут одинаковы, т. е. обе схемы описываются одной и той же системой уравнений баланса токов в узлах.

Все рассмотренные выше методы имеют обобщающее название – **методы преобразования электрических цепей.**

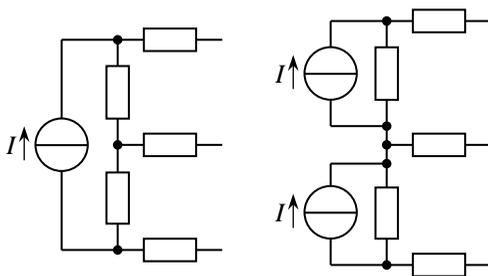


Рис. 4.10

4.6. Расчет цепей на основе непосредственного применения законов Кирхгофа

Рассмотрим применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей на примере цепи рис. 4.11. Чтобы найти все напряжения и токи в схеме достаточно найти токи в ветвях. После этого неизвестные напряжения могут быть найдены по закону Ома.

Число ветвей в схеме $p = 6$, следовательно, число неизвестных токов также равно шести. В схеме четыре узла. По первому закону Кирхгофа можно составить три независимых уравнения (т. е. число независимых уравнений баланса токов на единицу меньше числа узлов в схеме q). Недостающие уравнения составляют по второму закону Кирхгофа. Число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров в схеме.

Независимыми называют контуры, для которых уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа, будут независимыми. Достаточным условием независимости контуров является наличие в каждом

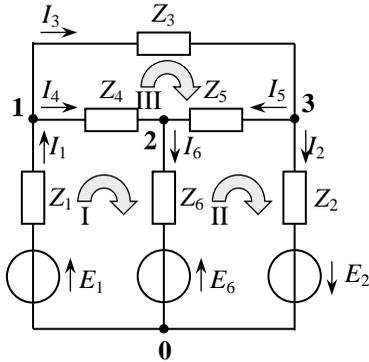


Рис. 4.11

последующем контуре хотя бы одной новой ветви. Число независимых контуров в схеме $n = p - q + 1$. При выборе независимых контуров необходимо стремиться к тому, чтобы каждый из них включал минимум элементов.

Согласно первому закону Кирхгофа имеем

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = 0,$$

$$\dot{I}_4 + \dot{I}_5 - \dot{I}_6 = 0,$$

$$\dot{I}_3 - \dot{I}_2 - \dot{I}_5 = 0.$$

Выберем независимые контуры (рис. 4.11) и положительные направления их обхода (направления обхода выбираем произвольно, например, по часовой стрелке).

Согласно второму закону Кирхгофа для выбранных контуров имеем

$$\begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_6 \dot{I}_6 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_6, \\ -Z_6 \dot{I}_6 - Z_5 \dot{I}_5 + Z_2 \dot{I}_2 &= \dot{E}_2 + \dot{E}_6, \\ Z_3 \dot{I}_3 + Z_5 \dot{I}_5 - Z_4 \dot{I}_4 &= 0. \end{aligned}$$

В итоге мы получили систему из шести линейных уравнений, решив которую, найдем искомые токи в ветвях $\dot{I}_1, \dots, \dot{I}_6$.

Отметим следующие особенности метода, основанного на непосредственном применении законов Кирхгофа:

- число уравнений электрического равновесия равно числу ветвей в схеме p ;
- система уравнений электрического равновесия имеет нерегулярную структуру, так как включает $q - 1$ уравнений баланса токов и $p - q + 1$ уравнений баланса напряжений, каждое из которых также имеет нерегулярную структуру.

4.7. Метод контурных токов

Метод контурных токов основан на топологической особенности электрических цепей, заключающийся в том, что токи всех ветвей могут быть выражены через токи **главных ветвей**, под которыми будем понимать ветви, входящие только в один независимый контур.

Для схемы, рассмотренной в предыдущем параграфе (рис. 4.11), главными являются ветви 1, 2 и 3. Выразим токи $\dot{I}_4, \dot{I}_5, \dot{I}_6$ через токи главных ветвей $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$:

$$\begin{aligned}\dot{I}_4 &= \dot{I}_1 - \dot{I}_3, \\ \dot{I}_5 &= \dot{I}_3 - \dot{I}_2, \\ \dot{I}_6 &= \dot{I}_1 - \dot{I}_2.\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнение баланса напряжений в контурах:

$$\begin{aligned}Z_1\dot{I}_1 + Z_4(\dot{I}_1 - \dot{I}_3) + Z_6(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) &= \dot{E}_1 - \dot{E}_6, \\ -Z_6(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - Z_5(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) + Z_2\dot{I}_2 &= \dot{E}_2 + \dot{E}_6, \\ Z_3\dot{I}_3 + Z_5(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) - Z_4(\dot{I}_1 - \dot{I}_3) &= 0.\end{aligned}$$

Приведем подобные члены:

$$\begin{aligned}(Z_1 + Z_4 + Z_6)\dot{I}_1 - Z_6\dot{I}_2 - Z_4\dot{I}_3 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_6, \\ -Z_6\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_5 + Z_6)\dot{I}_2 - Z_5\dot{I}_3 &= \dot{E}_2 + \dot{E}_6, \\ -Z_4\dot{I}_1 - Z_5\dot{I}_2 + (Z_3 + Z_5 + Z_4)\dot{I}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим величины, входящие в эти уравнения. Члены $(Z_1 + Z_4 + Z_6)\dot{I}_1$, $(Z_2 + Z_5 + Z_6)\dot{I}_2$ и $(Z_3 + Z_5 + Z_4)\dot{I}_3$ представляют собой суммарное напряжение на элементах контуров, вызванное током главной ветви, если бы он замыкался в главном контуре. Такой ток будем называть **контурным током** и обозначать $\dot{I}_{ик}$, а сумму сопротивлений контура будем называть **собственным сопротивлением контура** и обозначать Z_{ij} . Тогда

$$\begin{aligned}Z_{11} &= Z_1 + Z_4 + Z_6, \\ Z_{22} &= Z_2 + Z_5 + Z_6, \\ Z_{33} &= Z_3 + Z_5 + Z_4.\end{aligned}$$

Взаимным или **общим сопротивлением** двух контуров будем называть сопротивление Z_{ij} , равное сумме сопротивлений ветвей, входящих в оба контура. Очевидно, что $Z_{ij} = Z_{ji}$. Если i -й и j -й контуры не имеют общих ветвей, то $Z_{ij} = 0$. В схеме рис. 4.11

$$\begin{aligned}Z_{12} &= Z_{21} = -Z_6, \\ Z_{13} &= Z_{31} = -Z_4, \\ Z_{23} &= Z_{32} = -Z_5.\end{aligned}$$

Взаимные сопротивления входят в уравнение со знаком минус, если контурные токи протекают в них во встречных направлениях.

На практике расчет цепи методом контурных токов сводится к следующей последовательности действий:

- выбираем независимые контуры, число которых $n = p - q + 1$;
- вводим контурные токи и выбираем их условно положительные направления;
- составляем контурные уравнения. Направления обхода контуров выбираем совпадающими с контурным током. Если контурные токи в общем сопротивлении протекают в одном направлении, то общее сопротивление входит в уравнение со знаком плюс, если встречно – то со знаком минус;
- решаем полученную систему уравнений относительно контурных токов;
- определяем токи в ветвях;
- определяем напряжения на элементах цепи.

4.8. Метод узловых напряжений

Методом узловых напряжений называют метод расчета электрических цепей, в котором в качестве независимых переменных используются независимые напряжения узлов, определяемые относительно некоторого узла, называемого **базисным**. Искомые напряжения называют **узловыми напряжениями** и отсчитывают их от искомого узла к базисному. В качестве базисного узла целесообразно выбирать узел, в котором сходится наибольшее количество ветвей.

Рассмотрим метод узловых напряжений на примере схемы рис. 4.12. Эту схему можно рассматривать как предыдущую (рис. 4.11), в которой источники напряжения заменены эквивалентными источниками тока, а комплексные сопротивления – комплексными проводимостями.

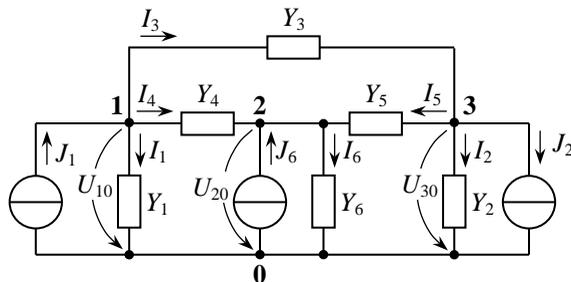


Рис. 4.12

Очевидно, что напряжения всех ветвей могут быть выражены через узловые напряжения. Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то узловые напряжения будут равны потенциалам узлов. Поэтому метод узловых напряжений называют также *методом узловых потенциалов*.

Согласно первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3 имеем

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 - \dot{I}_1 - \dot{I}_3 - \dot{I}_4 &= 0; \\ \dot{J}_6 + \dot{I}_4 + \dot{I}_5 - \dot{I}_6 &= 0; \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_2 - \dot{I}_5 - \dot{J}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Выразим токи ветвей через узловые напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_1 \dot{U}_{10}; \\ \dot{I}_2 &= Y_2 \dot{U}_{30}; \\ \dot{I}_3 &= Y_3 \dot{U}_{13} = Y_3 (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}); \\ \dot{I}_4 &= Y_4 \dot{U}_{12} = Y_4 (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}); \\ \dot{I}_5 &= Y_5 \dot{U}_{32} = Y_5 (\dot{U}_{30} - \dot{U}_{20}); \\ \dot{I}_6 &= Y_6 \dot{U}_{20}. \end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в уравнения баланса токов. После приведение подобных членов получим

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_3 + Y_4) \dot{U}_{10} - Y_4 \dot{U}_{20} - Y_3 \dot{U}_{30} &= \dot{J}_1; \\ -Y_4 \dot{U}_{10} + (Y_4 + Y_5 + Y_6) \dot{U}_{20} - Y_5 \dot{U}_{30} &= \dot{J}_6; \\ -Y_3 \dot{U}_{10} - Y_5 \dot{U}_{20} + (Y_2 + Y_3 + Y_5) \dot{U}_{30} &= -\dot{J}_2. \end{aligned}$$

Мы получили уравнения баланса токов, выраженные через узловые напряжения. Такие уравнения называют *узловыми уравнениями*.

Введем ряд новых понятий. *Собственной проводимостью* i -го узла Y_{ii} будем называть сумму комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле. Для нашей цепи

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_3 + Y_4; \\ Y_{22} &= Y_4 + Y_5 + Y_6; \\ Y_{33} &= Y_2 + Y_3 + Y_5. \end{aligned}$$

Взаимной или *общей проводимостью* двух узлов Y_{ij} будем называть взятую со знаком минус сумму проводимостей всех ветвей, подключенных непосредственно между этими узлами. Для нашей цепи

$$\begin{aligned} Y_{12} &= Y_{21} = -Y_4; \\ Y_{13} &= Y_{31} = -Y_3; \end{aligned}$$

- выбираем базисный узел и вводим узловые напряжения, отсчитываемые по отношению к базисному узлу;
- составляем узловые уравнения цепи;
- решаем полученную систему уравнений относительно узловых напряжений;
- определяем напряжение на ветвях.

Общие замечания к методам контурных токов и узловых напряжений:

1. Оба метода имеют строгие алгоритмы, приводят к уравнениям с регулярной структурой, что создает благоприятные предпосылки для автоматизации расчета этими методами.
2. При выборе метода предпочтение следует отдать тому, который приводит к меньшему числу уравнений. При выборе метода следует также учитывать, что узлы определяются просто и однозначно, в то время как независимые контуры однозначно определить нельзя (узлы задаются схемой, а независимые контуры выбираем мы сами). В этом смысле метод узловых напряжений имеет преимущество, что обуславливает его более широкое применение.
3. При решении задачи методом контурных токов все независимые источники тока целесообразно преобразовать в эквивалентные источники напряжения, а при решении задачи методом узловых напряжений все независимые источники напряжения целесообразно преобразовать в эквивалентные источники тока.
4. Если в цепи имеются зависимые источники, то при использовании метода контурных токов их следует преобразовать в источники напряжения, управляемые током, а при использовании метода узловых напряжений – в источники тока, управляемые напряжением.
5. Контурные токи и узловые напряжения каждые в отдельности несут полную информацию о цепи. Это означает, что если известны контурные токи или узловые напряжения, то можно определить напряжения и токи любой ветви. Контурные токи и узловые напряжения называют *определяющими координатами*, а методы их определения – *методами определяющих координат*.

4.9. Метод наложения

Метод наложения основан на принципе наложения, согласно которому отклик линейной электрической цепи на совокупность воздействий равен сумме откликов на каждое из воздействий порознь.

Контурный ток m -го контура линейной электрической цепи, содержащей источника напряжения, выражается формулой (4.2):

$$i_{mk} = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{im}}{\Delta} \dot{E}_{ik} = \frac{\Delta_{1m}}{\Delta} \dot{E}_{1k} + \frac{\Delta_{2m}}{\Delta} \dot{E}_{2k} + \dots + \frac{\Delta_{mm}}{\Delta} \dot{E}_{mk}. \quad (4.4)$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что контурный ток в любом контуре линейной электрической цепи равен алгебраической сумме токов, вызываемых в этом контуре каждым из источников в отдельности. Соотношение (4.4) доказывает справедливость принципа наложения применительно к контурным токам. Но так как ток любой ветви равен сумме или разности контурных токов, то этот принцип можно распространить и на токи ветвей.

Путем аналогичных рассуждений на основе формулы для узлового напряжения k -го узла (4.3)

$$\dot{U}_{k0} = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} j_{iy}$$

можно показать, что напряжение на зажимах какой-либо ветви от действия в цепи нескольких источников тока равно алгебраической сумме напряжений, полученных от действия каждого источника в отдельности.

Замечания к методу наложения:

1. При нахождении отклика от какого-либо независимого источника тока или напряжения остальные независимые источники выключаются, для чего источники напряжения закорачиваются, а источники тока разрываются.
2. Зависимые источники при нахождении частичных откликов не выключаются.

4.10. Метод эквивалентного источника

Метод эквивалентного источника основан на двух теоремах: теореме об эквивалентном источнике напряжения (теореме Тевенина, теореме Тевенина-Гельмгольца) и теореме об эквивалентном источнике тока (теореме Нортона). Рассмотрим эти теоремы.

Теорема об эквивалентном источнике напряжения. Ток в произвольной ветви линейной электрической цепи не изменится, если всю внешнюю по отношению к рассматриваемой ветви цепь заменить эквивалентным источником напряжения, ЭДС которого равна напряжению на разомкнутых зажимах внешней цепи, а внутреннее сопро-

тивление – входному сопротивлению внешней цепи, в которой источники напряжения закорочены, а источники тока разомкнуты.

Рассмотрим произвольную активную линейную цепь, в которой выделим интересующую нас k -ю ветвь (рис. 4.13). В соответствии с теоремой об эквивалентном источнике напряжения эту цепь можно представить в виде рис. 4.14. ЭДС $\dot{E}_{\text{ЭК}}$ равна напряжению на зажимах цепи при отключенной k -й ветви (рис. 4.15). Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора $Z_{\text{ЭК}}$ равно входному сопротивлению пассивной цепи, полученной из рассматриваемой активной цепи путем закорачивания источников напряжения и размыкания источников тока (рис. 4.16).

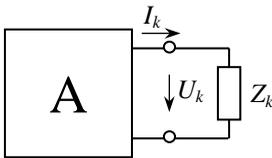


Рис. 4.13

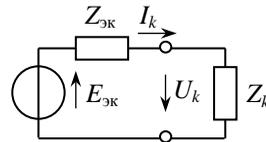


Рис. 4.14

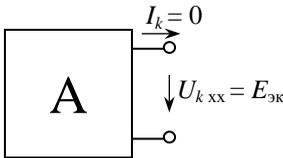


Рис. 4.15

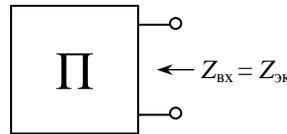


Рис. 4.16

Докажем теорему. Введем в k -ю ветвь два встречно включенных идеальных источника напряжения \dot{E}' и \dot{E}'' (рис. 4.17), причем $\dot{E}' = \dot{E}''$. Очевидно, что схема эквивалентна исходной. Применим к ней принцип наложения. Представим ток \dot{I}_k как результат наложения тока \dot{I}'_k , вызванного ЭДС \dot{E}' и всеми внутренними источниками

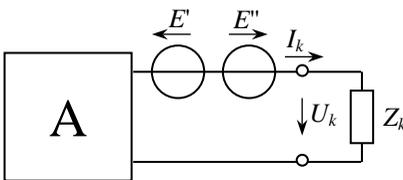


Рис. 4.17

цепи \mathbf{A} , и тока \dot{I}''_k , вызванного единственным источником \dot{E}'' (рис. 4.18):

$$\dot{I}_k = \dot{I}'_k + \dot{I}''_k.$$

Выберем $\dot{E}' = \dot{E}''$ так, чтобы $\dot{I}'_k = 0$. Очевидно, что в этом

случае напряжение на зажимах двухполюсника А (рис. 4.18) равно напряжению холостого хода \dot{U}_{kxx} . Тогда

$$\dot{E}' = \dot{E}'' = \dot{U}_{kxx}.$$

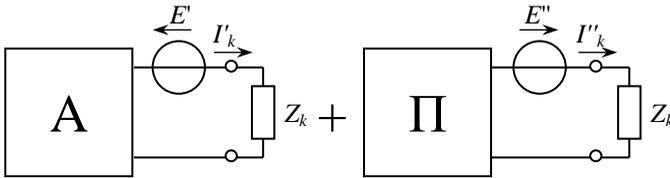


Рис. 4.18

Найдем ток \dot{I}''_k :

$$\dot{i}''_k = \frac{\dot{E}''}{Z_{\text{ЭК}} + Z_k}.$$

Поскольку $\dot{I}'_k = 0$, то

$$\dot{i}_k = \dot{i}'_k + \dot{i}''_k = \frac{\dot{E}''}{Z_{\text{ЭК}} + Z_k} = \frac{\dot{E}_{\text{ЭК}}}{Z_{\text{ЭК}} + Z_k}.$$

Полученному соотношению соответствует схема рис. 4.14, т. е. теорема доказана. Теорема об эквивалентном источнике напряжения позволяет перейти от сложной цепи со многими источниками к простой цепи с одним источником напряжения.

Теорема об эквивалентном источнике тока. Ток в произвольной ветви линейной электрической цепи не изменится (рис. 4.19), если всю внешнюю по отношению к рассматриваемой ветви цепь заменить эквивалентным источником тока (рис. 4.20), ток которого равен току короткого замыкания внешней цепи (рис. 4.21), а внутренняя проводимость – входной проводимости внешней цепи, в которой источники напряжения закорочены, а источники тока разомкнуты (рис. 4.22).

Рассмотрим произвольную активную линейную цепь, в которой выделим интересующую нас k -ю ветвь (рис. 4.19). В соответствии с теоремой Нортона эту цепь можно представить в виде рис. 4.20, где

$$\dot{i}_{\text{ЭК}} = \dot{i}_{k\text{КЗ}},$$

$$Y_{\text{ЭК}} = Y_{\text{ВХ}} = \frac{1}{Z_{\text{ВХ}}}.$$

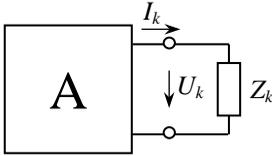


Рис. 4.19

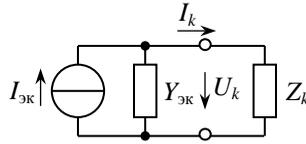


Рис. 4.20

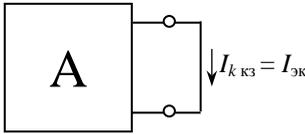


Рис. 4.21

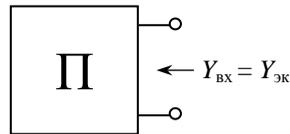


Рис. 4.22

Поскольку мы уже доказали, что любую активную линейную цепь можно заменить эквивалентным источником напряжения, то для доказательства данной теоремы достаточно от источника напряжения перейти к эквивалентному источнику тока:

$$\dot{I}_{\text{эк}} = \dot{I}_{\text{кз}} = \frac{\dot{U}_{\text{кхх}}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{\dot{E}_{\text{эк}}}{Z_{\text{эк}}}.$$

Теорема об эквивалентном источнике тока позволяет перейти от сложной схемы со многими источниками к простой схеме с одним источником тока.

Метод эквивалентного источника особенно эффективен, когда требуется найти отклик только в одной из ветвей сложной цепи.

5. ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

5.1. Цепи с взаимной индуктивностью при произвольном воздействии

До сих пор при изучении электрических цепей мы учитывали только явление самоиндукции, т.е. наведение ЭДС в цепи при изменении потокосцепления самоиндукции, вызываемого током в этой же цепи. Связь потокосцепления самоиндукции с током в этой же цепи характеризовалась индуктивностью

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Очевидно, что если переменное магнитное поле одной цепи пронизывает другую электрическую цепь, то в ней также будет наводиться ЭДС. Явление наведения ЭДС в какой-либо цепи при изменении тока в другой цепи называют *взаимоиндукцией*, а наведенную ЭДС – *ЭДС взаимоиндукции*.

Две электрические цепи называют *индуктивно связанными*, если изменение тока в одной из них, вызывает появление ЭДС в другой. Связь потокосцепления взаимной индукции одной электрической цепи с током в другой цепи характеризуется *взаимной индуктивностью* M . Если потокосцепление Ψ_{12} первой цепи обусловлено током i_2 второй цепи, то взаимная индуктивность цепей

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}.$$

Если потокосцепление второй цепи Ψ_{21} обусловлено током i_1 первой цепи, то взаимная индуктивность цепей

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}.$$

Для линейных электрических цепей $M_{12} = M_{21} = M$. Взаимную индуктивность M измеряют в генри.

Индуктивно связанные катушки изображают на схемах, как показано на рис. 5.1. Два зажима индуктивно связанных катушек называют *одноименными* или *однополярными*, если при одинаково направленных относительно этих зажимов токах магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции суммируются. В противном случае два зажима индуктивно связанных катушек называют *разноименными* или *разнополярными*. На схемах одноименные зажимы помечают точками.

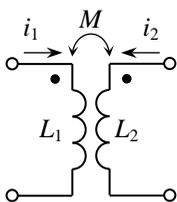


Рис. 5.1

Говорят, что две индуктивно связанные катушки включены *согласно*, если условно положительные направления токов относительно одноименных зажимов ориентированы одинаково. Если условно положительные направления токов относительно одноименных зажимов имеют противоположную ориентацию, то говорят, что индуктивно связанные катушки включены *встречно*.

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки (рис. 5.2). Ток i_1 , протекая по катушке L_1 , создает некоторый магнитный поток Φ_{11} . Часть этого потока замыкается вблизи катушки L_1 , не достигая витков катушки L_2 . Эту часть потока называют *поток* *рассеяния первой катушки* Φ_{S1} . Другая часть потока, созданного током i_1 , замыкается, пронизывая витки второй катушки. Эту часть потока обозначают Φ_{21} и называют *поток* *взаимной индукции первой катушки*. Весь поток, созданный током i_1 ,

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{S1}.$$

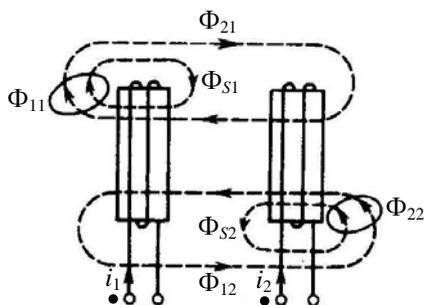


Рис. 5.2

Аналогично, ток i_2 , протекая по катушке L_2 , создает некоторый магнитный поток Φ_{22} . Часть этого потока замыкается вблизи катушки L_2 , не достигая витков катушки L_1 . Эту часть потока называют *поток* *рассеяния второй катушки* Φ_{S2} . Другая часть потока, созданного током i_2 , замыкается, пронизывая витки первой катушки. Эту часть потока обозначают Φ_{12} и называют *поток* *взаимной индукции второй катушки*. Весь поток, созданный током i_2 ,

$$\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{S2}.$$

Потоки Φ_{11} и Φ_{22} , пронизывающие каждую из катушек и вызываемые протекающим по ним током, называют *магнитными потоками самоиндукции*.

Полный магнитный поток, пронизывающий каждую из катушек, складывается из магнитных потоков самоиндукции и взаимоиндукции:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12};$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}.$$

Знак «+» берется при согласном включении катушек, а знак «-» – при встречном включении катушек.

Если все витки каждой из катушек пронизываются одинаковыми потоками, то

$$\Psi_1 = N_1 \Phi_1 = N_1 \Phi_{11} \pm N_1 \Phi_{12};$$

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = N_2 \Phi_{22} \pm N_2 \Phi_{21}.$$

Найдем ЭДС, наводимые в каждой из катушек. Согласно закону электромагнитной индукции

$$e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\left(\frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{dt}\right);$$

$$e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\left(\frac{d\Psi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt}\right).$$

Первое слагаемое в каждом из этих выражений представляет собой ЭДС самоиндукции, а второе – ЭДС взаимной индукции. Преобразуем выражения для ЭДС e_1 и e_2 следующим образом:

$$e_1 = -\left(\frac{d\Psi_{11}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{di_2} \cdot \frac{di_2}{dt}\right);$$

$$e_2 = -\left(\frac{d\Psi_{22}}{di_2} \cdot \frac{di_2}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt}\right).$$

Рассмотрим величины, входящие в эти формулы:

$$\frac{d\Psi_{11}}{di_1} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = L_1;$$

$$\frac{d\Psi_{22}}{di_2} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = L_2;$$

$$\frac{d\Psi_{12}}{di_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = M_{12};$$

$$\frac{d\Psi_{21}}{di_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = M_{21}.$$

Но в линейных цепях $M_{12} = M_{21} = M$. Тогда

$$e_1 = -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right);$$

$$e_2 = -\left(L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \right).$$

Перейдем к напряжению на зажимах связанных катушек:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Из рассмотрения процессов в связанных катушках индуктивности ясно, что чем большая часть потока каждой из катушек пронизывает другую катушку, тем больше взаимная индуктивность. Однако взаимная индуктивность не характеризует степень связи между катушками, так как зависит не только от степени связи, но и от индуктивностей катушек.

Степень индуктивной связи двух катушек принято характеризовать коэффициентом связи k_m , определяемым как среднее геометрическое из отношений потока взаимоиндукции к потоку самоиндукции каждой из катушек,

$$k_m = \sqrt{\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} \cdot \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}}.$$

Поскольку $\Phi_{21} \leq \Phi_{11}$, а $\Phi_{12} \leq \Phi_{22}$, то $0 \leq k_m \leq 1$. Коэффициент связи $k_m = 1$ при условии, что потоки рассеяния в катушках отсутствуют. На практике k_m всегда меньше единицы.

Выразим коэффициент связи через индуктивности связанных катушек и их взаимную индуктивность:

$$\Phi_{11} = \frac{\Psi_{11}}{N_1} = \frac{L_1 i_1}{N_1};$$

$$\Phi_{22} = \frac{\Psi_{22}}{N_2} = \frac{L_2 i_2}{N_2};$$

$$\Phi_{21} = \frac{\Psi_{21}}{N_2} = \frac{M i_1}{N_2};$$

$$\Phi_{12} = \frac{\Psi_{12}}{N_1} = \frac{M i_2}{N_1}.$$

Подставив эти выражения в формулу для коэффициента связи, получим

$$k_M = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Это выражение позволяет оценить максимальное значение взаимной индуктивности $M = k_M \sqrt{L_1 L_2}$. Отсюда $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$, т. е. максимальное значение взаимной индуктивности двух катушек не может превышать среднего геометрического их индуктивностей.

5.2. Цепи с взаимной индуктивностью при гармоническом воздействии

В предыдущем параграфе нами были получены следующие соотношения для напряжений на зажимах связанных индуктивностей:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Для анализа цепей с взаимной индуктивностью воспользуемся методом комплексных амплитуд. Перейдем от мгновенных значений токов и напряжений к их комплексным изображениям:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1;$$

Первое слагаемое в обоих выражениях представляет собой падение напряжения на комплексном сопротивлении $Z_L = j\omega L$ соответствующей индуктивности от тока, протекающего по этой же индуктивности.

Второе слагаемое можно рассматривать как падение напряжения на некотором комплексном сопротивлении $Z_M = j\omega M$, называемом **сопротивлением связи**, вызванное протекающим по нему током другой индуктивности. Тогда

$$\dot{U}_1 = Z_{L_1} \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = Z_{L_2} \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_1.$$

Составим уравнения баланса напряжений для первичной и вторичной обмоток трансформатора:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1.\end{aligned}$$

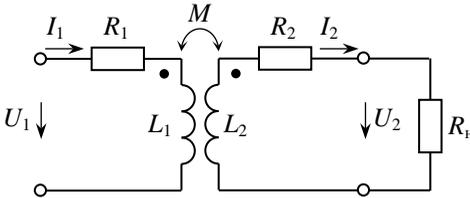


Рис. 5.3

В режиме холостого хода (т. е. при $\dot{I}_2 = 0$) первичная обмотка трансформатора потребляет ток

$$\dot{I}_1|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1} = \dot{I}_{10},$$

который называют **током намагничивания**.

Установим связь между токами в обмотках трансформатора \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , для чего положим в уравнении баланса напряжений для вторичной обмотки трансформатора $\dot{U}_2 = Z_n \dot{I}_2$ и разрешим его относительно тока \dot{I}_1 . Получим

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_n + (R_2 + j\omega L_2)}{j\omega M} \dot{I}_2$$

Установим связь между напряжениями на обмотках трансформатора \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , для этого подставим последнее соотношение в уравнение баланса напряжений для первичной обмотки трансформатора и вынесем $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_n$ за скобки. Тогда

$$\dot{U}_1 = \left\{ \frac{(R_1 + j\omega L_1)[Z_n + (R_2 + j\omega L_2)]}{j\omega M} - j\omega M \right\} \frac{\dot{U}_2}{Z_n}.$$

Из полученных выражений следует:

- $|\dot{U}_1| \sim |\dot{U}_2|$ и $|\dot{I}_1| \sim |\dot{I}_2|$, причем оба коэффициента пропорциональности зависят от параметров трансформатора и сопротивления нагрузки Z_n ;
- напряжения на обмотках \dot{U}_1 и \dot{U}_2 сдвинуты по фазе. Токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 также сдвинуты по фазе, причем фазовые сдвиги между \dot{U}_1 и \dot{U}_2 и между \dot{I}_1 и \dot{I}_2 зависят от параметров трансформатора и сопротивления нагрузки Z_n .

Найдем входное сопротивление трансформатора, нагруженного на сопротивление $Z_{\text{н}}$:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2}.$$

В этом выражении $R_1 + j\omega L_1$ – сопротивление первичной обмотки трансформатора, а последнее слагаемое – сопротивление, вносимое из вторичной обмотки в первичную.

Итак, **вносимое сопротивление**

$$Z_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{\text{н}} + R_2 + j\omega L_2}$$

включено последовательно с первичной обмоткой и зависит от параметров трансформатора и сопротивления нагрузки.

Рассмотрим идеализированные модели трансформатора, называемые **совершенным трансформатором** и **идеальным трансформатором**.

Под **совершенным** будем понимать трансформатор, у которого потери в обмотках отсутствуют, а коэффициент связи обмоток равен единице. Как следует из определения, в совершенном трансформаторе

$$R_1 = R_2 = 0, \quad M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Установим связь между напряжениями на обмотках совершенного трансформатора:

$$\dot{U}_1 = \left[\frac{j\omega L_1 (Z_{\text{н}} + j\omega L_2)}{j\omega M} - j\omega M \right] \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{н}}} = \left(\frac{L_1}{M} - \frac{\omega^2 L_1 L_2}{j\omega M Z_{\text{н}}} + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega M Z_{\text{н}}} \right) \dot{U}_2.$$

Поскольку последние два слагаемых в скобках сокращаются, то

$$\dot{U}_1 = \frac{L_1}{M} \dot{U}_2.$$

Введем обозначение: $n = \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$. Тогда

$$\dot{U}_2 = n \dot{U}_1.$$

Величину n , входящую в полученное соотношение, называют **коэффициентом трансформации**. Коэффициент трансформации n представляет собой комплексный коэффициент передачи совершенного трансформатора по напряжению.

Установим связь между токами в обмотках совершенного трансформатора

$$\dot{i}_1 = \frac{Z_n + j\omega L_2}{j\omega M} \dot{i}_2 = \frac{Z_n \dot{i}_2}{j\omega M} + \frac{L_2}{M} \dot{i}_2.$$

Но $Z_n I_2 = U_2$, а $L_2 / M = n$. Тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{j\omega M} + n\dot{i}_2.$$

Умножим и разделим первое слагаемое на L_1 :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{j\omega M} \frac{L_1}{L_1} + n\dot{i}_2.$$

Принимая во внимание, что $M / L_1 = n$, а $\dot{U}_2 / n = \dot{U}_1$, получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} + n\dot{i}_2.$$

Но $\dot{U}_1 / j\omega L_1$ представляет собой ток намагничивания совершенного трансформатора \dot{I}_{10} . Окончательно получим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + n\dot{i}_2.$$

Итак, отношение напряжения на вторичной обмотке совершенного трансформатора к напряжению на первичной обмотке равно коэффициенту трансформации и не зависит от сопротивления нагрузки. Поскольку n – действительное число, то напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 синфазны. Однако токи \dot{I}_1 и \dot{i}_2 сдвинуты по фазе, что обусловлено током намагничивания \dot{I}_{10} .

Выразим коэффициент трансформации через потокосцепление обмоток

$$n = \frac{M}{L_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \frac{i_1}{\Psi_{11}} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{N_1 \Phi_{11}}.$$

Поскольку у совершенного трансформатора потоки рассеяния отсутствуют и $\Phi_{21} = \Phi_{11}$, то

$$n = \frac{N_2}{N_1}.$$

Трансформатор, у которого $U_2 > U_1$ или $n > 1$, называют **повышающим**, а у которого $U_2 < U_1$ или $n < 1$ – **понижающим**.

Под *идеальным* будем понимать такой совершенный трансформатор, у которого ток намагничивания равен нулю. Полагая $\dot{I}_{10} = 0$, получим, что в идеальном трансформаторе

$$\dot{U}_2 = n\dot{U}_1 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = n\dot{I}_2$$

при любом значении сопротивления нагрузки $Z_{\text{н}}$.

Из уравнений идеального трансформатора следует:

- напряжения на обмотках идеального трансформатора синфазны и отличаются только амплитудами;
- токи в обмотках идеального трансформатора также синфазны. Оба следствия основаны на том, что коэффициент трансформации n – действительное число;
- коэффициент полезного действия идеального трансформатора равен единице. Это следует из равенства мощностей, потребляемой первичной обмоткой от источника и отдаваемой вторичной обмоткой в нагрузку:

$$u_1 i_1 = \frac{u_2}{n} n i_2 = u_2 i_2.$$

- входное сопротивление идеального трансформатора, нагруженного на сопротивление $Z_{\text{н}}$, определяется соотношением

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{н}}}{n^2},$$

т. е. $Z_{\text{вх}}$ и $Z_{\text{н}}$ отличаются только по модулю. Действительно,

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{n n \dot{I}_2} = \frac{Z_{\text{н}}}{n^2}.$$

Способность трансформаторов преобразовывать модуль сопротивления нагрузки широко используется для согласования источника энергии с нагрузкой. Трансформатор является одним из наиболее широко применяемых в радиоэлектронике элементов. Трансформатор используют в источниках питания для получения нужных напряжений, для гальванической развязки цепей, для согласования источника с нагрузкой, в измерительной технике (трансформаторы тока, фазометры), в частотных и фазовых детекторах и т. д.

Разновидностью трансформатора является *автотрансформатор*, который отличается от трансформатора тем, что его обмотка низшего напряжения является частью обмотки высшего напряжения (рис. 5.4).

Автотрансформатор может быть как понижающим, так и повышающим. В автотрансформаторах передача энергии в нагрузку

происходит как за счет взаимоиндукции, так и непосредственно через кондуктивную связь.

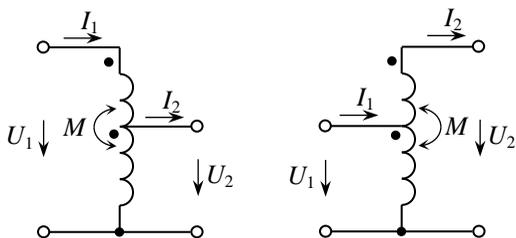


Рис. 5.4

Коэффициент трансформации автотрансформатора

$$n = \frac{N_2}{N_1},$$

где N_2 – общее число витков обмотки, к которой подключена нагрузка;
 N_1 – общее число витков обмотки, подключенной к источнику.

Применение автотрансформатора вместо трансформатора такой же мощности позволяет уменьшить расход меди на обмотки. Экономия достигается за счет сокращения общего числа витков, а также за счет уменьшения сечения провода общей части обмотки, так как по ней токи первичной и вторичной цепей протекают встречно.

6. РЕЗОНАНСНЫЕ ЦЕПИ

6.1. Последовательный колебательный контур

Под **резонансом** понимают такой режим работы цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором реактивное сопротивление или реактивная проводимость цепи равны нулю. Цепи, в которых могут возникать явления резонанса, называют **резонансными** или **колебательными**. Частоты, на которых в цепи наблюдается резонанс, называют **резонансными частотами**.

Простейшей резонансной цепью является последовательный колебательный контур, представляющий собой замкнутую последовательную цепь из конденсатора, катушки индуктивности и источника напряжения.

Рассмотрим последовательный колебательный контур при гармоническом воздействии в установившемся режиме. Схема замещения последовательного колебательного контура приведена на рис. 6.1. Сопротивление R учитывает потери в катушке индуктивности и конденсаторе.

Комплексное входное сопротивление контура зависит от частоты:

$$Z(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Резонанс наступает на частоте $\omega = \omega_0$, когда

$$x = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0.$$

Отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

На резонансной частоте

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho.$$

Величина ρ , равная реактивному сопротивлению индуктивности или емкости на резонансной частоте, получила название **характеристическое сопротивление контура**. С учетом выражения для резонансной частоты контура получим

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

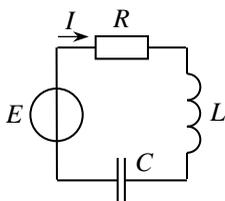


Рис. 6.1

т. е. характеристическое сопротивление контура ρ не зависит от частоты и определяется только параметрами реактивных элементов контура.

Отношение характеристического сопротивления контура ρ к активному сопротивлению R называют **добротностью** контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На резонансной частоте

$$U_L = U_C = \rho I = \rho \frac{E}{R} = EQ,$$

т. е. напряжение на реактивном элементе контура при резонансе в Q раз превышает напряжение, приложенное к контуру.

Добротность характеризует качество контура. На практике добротность контуров Q может достигать до нескольких сотен. Таким образом, напряжение на реактивном элементе контура может в десятки и сотни раз превышать напряжение источника.

Величину, обратную добротности, называют **затуханием контура** и обозначают

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}.$$

Термин «затухание» связан с тем, что при отключении источника от контура колебания в контуре будут затухать быстрее при большем значении d .

Рассмотрим входные частотные характеристики последовательного колебательного контура: входное сопротивление $Z(j\omega)$ и входную проводимость $Y(j\omega)$.

АЧХ входного сопротивления

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

ФЧХ входного сопротивления

$$\varphi_Z(\omega) = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Построим графики АЧХ и ФЧХ входного сопротивления последовательного колебательного контура (рис. 6.2). Графики АЧХ колебательных цепей называют **резонансными характеристиками** или **резонансными кривыми**.

Как видно из графиков, АЧХ и ФЧХ наиболее резко изменяются вблизи резонансной частоты. Степень отклонения частоты ω от резонансной частоты ω_0 принято характеризовать абсолютной, относительной и обобщенной расстройками, которые определяются следующим образом:

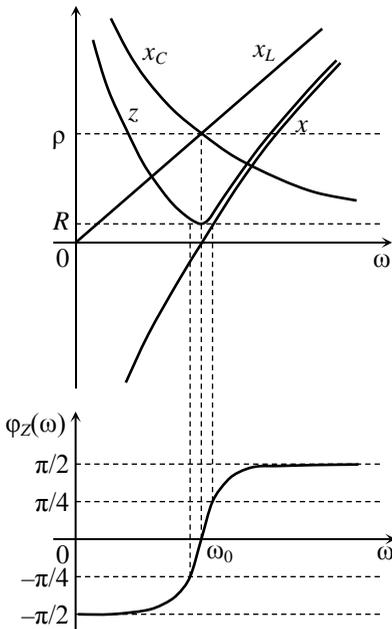


Рис. 6.2

- **абсолютная расстройка**

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad \text{или} \quad \Delta f = f - f_0;$$

- **относительная расстройка**

$$\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0};$$

- **обобщенная расстройка**

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \\ &= \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \\ &= Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Относительная расстройка учитывает резонансную частоту контура, а обобщенная расстройка, кроме резонансной частоты, учитывает еще и добротность контура.

Выразим АЧХ и ФЧХ входного сопротивления последовательно-колебательного контура через обобщенную расстройку

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = R \sqrt{1 + \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}{R^2}} = R \sqrt{1 + \xi^2};$$

$$\varphi_Z(\omega) = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \xi.$$

Рассмотрим комплексную входную проводимость последовательного контура

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{1}{R(1 + j\xi)}.$$

АЧХ входной проводимости

$$Y(\omega) = \frac{1}{R\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

ФЧХ входной проводимости

$$\varphi_Y(\omega) = -\arctg \xi = -\arctg \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right].$$

Построим АЧХ и ФЧХ входной проводимости последовательного колебательного контура (рис. 6.3). Поскольку ток в контуре $\dot{I} = \dot{E} Y(j\omega)$, то зависимость тока от частоты будет в некотором масштабе повторять зависимость $Y(\omega)$.

Рассмотрим передаточные характеристики последовательного колебательного контура. Всего возможно три таких характеристики:

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{E}},$$

$$K_{UC}(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{E}},$$

$$K_{UR}(j\omega) = \frac{\dot{U}_R}{\dot{E}}.$$

Очевидно, что передаточная характеристика $K_{UR}(j\omega)$ будет в некотором масштабе повторять характеристику $Y(j\omega)$.

$$K_{UR}(j\omega) = \frac{\dot{U}_R}{\dot{E}} = \frac{\dot{I}R}{\dot{E}} = RY(j\omega).$$

Найдем аналитическое выражение для комплексного коэффициента передачи по напряжению $K_{UL}(j\omega)$:

$$\begin{aligned} K_{UL}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_L}{\dot{E}} = j\omega L \frac{\dot{I}}{\dot{E}} = j\omega LY(j\omega) = j\omega L \frac{1}{R(1+j\xi)} \frac{\omega_0}{\omega} = \\ &= jQ \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}. \end{aligned}$$

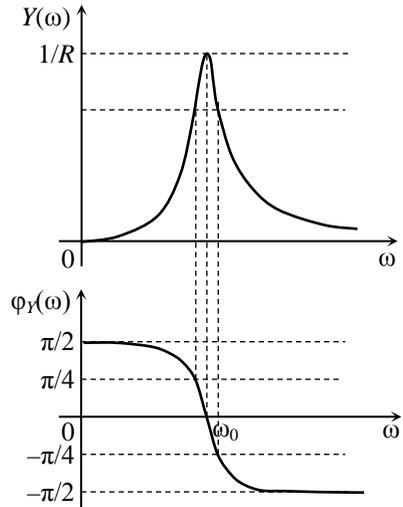


Рис. 6.3

АЧХ коэффициента передачи по напряжению $K_{UL}(j\omega)$:

$$K_{UL}(\omega) = Q \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

ФЧХ коэффициента передачи по напряжению $K_{UL}(j\omega)$:

$$\varphi_{UL}(\omega) = -\arctg \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] + \frac{\pi}{2}.$$

Получим аналитическое выражение для коэффициента передачи контура по напряжению, когда выходное напряжение снимается с емкости:

$$\begin{aligned} K_{UC}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_C}{\dot{E}} = \frac{1}{j\omega C} \frac{\dot{I}}{\dot{E}} = \frac{1}{j\omega C} Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R(1 + j\xi)} \frac{\omega_0}{\omega} = \\ &= \frac{1}{j} Q \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}. \end{aligned}$$

Соответствующие АЧХ и ФЧХ:

$$\begin{aligned} K_{UC}(\omega) &= Q \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \\ \varphi_{UC}(\omega) &= -\arctg \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Исследовав зависимости $K_{UL}(\omega)$ и $K_{UC}(\omega)$ на экстремум, получим, что максимум зависимости $K_{UL}(\omega)$ достигается на частоте

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}},$$

которая несколько выше резонансной, а максимум зависимости $K_{UC}(\omega)$ достигается на частоте

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}},$$

которая несколько ниже резонансной.

Если частоту ω_L подставить в выражение для $K_{UL}(\omega)$, а ω_C – в выражение для $K_{UC}(\omega)$, то получим

$$K_{UL}(\omega_L) = K_{UC}(\omega_C) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = K_{U \max}.$$

Построим передаточные характеристики последовательного колебательного контура (рис. 6.4). Изображая АЧХ коэффициентов передачи по напряжению, мы несколько преувеличили отличия ω_L и ω_C от ω_0 и $K_{U \max}$ от Q . На практике этими отклонениями чаще всего можно пренебречь и считать, что напряжения на реактивных элементах контура достигают максимума на резонансной частоте.

Как видно из АЧХ, амплитуда отклика последовательного колебательного контура существенно зависит от частоты воздействия. Вблизи резонансной частоты амплитуда отклика значительно больше, чем на частотах, удаленных от резонансной частоты. Контур как бы пропускает колебания одних частот и задерживает колебания других частот. Это свойство контура называют *избирательностью* или *селективностью*.

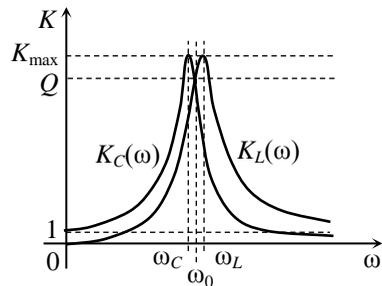


Рис. 6.4

Поскольку АЧХ реальных избирательных цепей имеют вид плавных кривых и невозможно указать четкую границу между пропускаемыми и задерживаемыми частотами, то за *полосу пропускания* условно принимают диапазон частот, в пределах которого амплитуда отклика цепи уменьшается относительно максимального значения не более чем в $\sqrt{2}$ раз. На границах полосы пропускания амплитуда отклика составляет $1/\sqrt{2} = 0,707$ от максимального значения. Нетрудно заметить, что на границах полосы пропускания активная мощность, потребляемая цепью, будет в два раза меньше максимальной.

Исследуем зависимость полосы пропускания последовательного колебательного контура от его параметров. Согласно определению полосы пропускания

$$\frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя выражения для $Y(\omega)$ и $Y(\omega_0)$, получим

$$\sqrt{1 + \xi^2} = \sqrt{2}.$$

Откуда $\xi = \pm 1$, т. е. на границах полосы пропускания обобщенная расстройка $|\xi| = 1$, а это означает, что $\varphi_Y(\omega) = -\arctg \xi = \pi/4$.

Найдем граничные частоты полосы пропускания. На границах полосы пропускания

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1.$$

Разрешив это уравнение относительно частоты ω , получим

$$\omega_{\text{н}} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{4Q^2 + 1} - 1 \right),$$

$$\omega_{\text{в}} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{4Q^2 + 1} + 1 \right).$$

Ширина полосы пропускания

$$\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Отсюда следует, что узкую полосу пропускания проще реализовать на более низких частотах. Относительная ширина полосы пропускания

$$\frac{\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d.$$

До сих пор мы полагали, что контур питается от идеального источника напряжения. Рассмотрим теперь влияние внутреннего сопротивления источника на свойства контура.

Пусть источник имеет внутреннее сопротивление R_i . Найдем эквивалентную добротность контура

$$Q_{\text{эк}} = \frac{\rho}{R_i + R} = \frac{\rho}{R \left(1 + \frac{R_i}{R} \right)} = \frac{Q}{1 + \frac{R_i}{R}},$$

т. е. $Q_{\text{эк}} < Q$. Полоса пропускания контура с учетом внутреннего сопротивления источника R_i

$$\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}} = \frac{\omega_0}{Q_{\text{эк}}} = \frac{\omega_0}{Q} \left(1 + \frac{R_i}{R} \right),$$

т. е. чем больше внутреннее сопротивление источника, тем шире полоса пропускания.

Таким образом, чтобы избирательность контура не ухудшилась, внутреннее сопротивление источника должно быть как можно меньше, т. е. источник по своим свойствам должен приближаться к идеальному источнику напряжения.

6.2. Параллельный колебательный контур

Параллельный колебательный контур представляет собой параллельное соединение катушки индуктивности, конденсатора и источника тока. В параллельном колебательном контуре возможен резонанс токов.

Рассмотрим параллельный колебательный контур при гармоническом воздействии в установившемся режиме. Схема замещения параллельного колебательного контура представлена на рис. 6.5. Сопротивления R_1 и R_2 учитывают потери соответственно в катушке индуктивности и в конденсаторе.

Найдем резонансную частоту параллельного колебательного контура из условия равенства нулю реактивной составляющей проводимости контура. Проводимость параллельного колебательного контура

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}}.$$

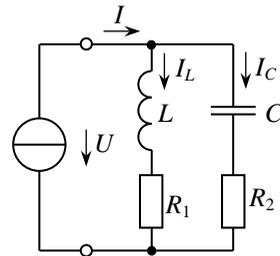


Рис. 6.5

Для того чтобы избавиться от комплексных чисел в знаменателях, умножим числитель и знаменатель каждой из дробей на число, комплексно сопряженное знаменателю соответствующей дроби

$$Y(j\omega) = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Выделим мнимую часть проводимости и приравняем ее к нулю

$$\text{Im} [Y(j\omega)] = - \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = 0.$$

Обозначим ω_p частоту, на которой $\text{Im} [Y(j\omega)] = 0$ (частота резонанса токов). После приведения к общему знаменателю получим

$$\omega_p L \left(R_2^2 + \frac{1}{\omega_p^2 C^2} \right) - \frac{1}{\omega_p C} (R_1^2 + \omega_p^2 L^2) = 0.$$

Раскроем скобки и умножим все члены уравнения на $\omega_p C^2$:

$$\omega_p^2 LC^2 R_2^2 + L - R_1^2 C - \omega_p^2 L^2 C = 0.$$

Сгруппируем члены уравнения с ω_p в левой части уравнения, а все остальные члены перенесем в правую часть. Тогда

$$\omega_p^2 LC(-L + R_2^2 C) = -L + R_1^2 C.$$

Отсюда находим частоту резонанса токов

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - R_1^2 C}{L - R_2^2 C}}.$$

Разделив на C числитель и знаменатель подкоренной дроби, получим

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

Но $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ – резонансная частота последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов. Тогда

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

В общем случае $\omega_p \neq \omega_0$, но если $R_1 = R_2$ или $R_1 \ll \rho$ и $R_2 \ll \rho$, то $\omega_p = \omega_0$.

Рассмотрим входную комплексную частотную характеристику параллельного колебательного контура, когда воздействием является ток источника, а откликом – напряжение на контуре:

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{(R_1 + j\omega L) \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Если контур имеет высокую добротность, т. е. $R_1 \ll \omega L$, а $R_2 \ll \ll \frac{1}{\omega_p C}$, то

$$(R_1 + j\omega L) \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) \approx j\omega L \left(-j \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{L}{C} = \rho^2.$$

В этом случае

$$Z(j\omega) \approx \frac{\rho^2}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Вынесем за скобки $R_1 + R_2$:

$$Z(j\omega) \approx \frac{\rho^2}{(R_1 + R_2) \left(1 + j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2}\right)}.$$

Но $\rho/(R_1 + R_2) = Q$ – добротность последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов, а множитель при j – это обобщенная расстройка ξ . С учетом этого

$$Z(j\omega) \approx \frac{\rho Q}{1 + j\xi}.$$

Отсюда следует:

- АЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура $Z(\omega)$ повторяет в некотором масштабе АЧХ входной проводимости $Y(\omega)$ последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов;
- ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура $\varphi_Z(\omega)$ полностью совпадает с ФЧХ входной проводимости $\varphi_Y(\omega)$ последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов;
- на резонансной частоте входное сопротивление контура имеет активный характер: $Z(j\omega_p) = \rho Q$.

Оценим ток в реактивных элементах параллельного колебательного контура на резонансной частоте. Напряжение на контуре

$$U(\omega_p) = I\rho Q.$$

Ток в реактивных элементах

$$I_L = I_C \approx \frac{U}{\rho} = \frac{I\rho Q}{\rho} = QI,$$

т. е. на резонансной частоте ток в реактивных элементах в Q раз превышает ток источника I .

Рассмотрим передаточные характеристики параллельного колебательного контура. Если в качестве отклика принять ток в индуктивной ветви, то комплексный коэффициент передачи по току

$$\begin{aligned}
 K_{IL}(j\omega) &= \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}}{j\omega L \dot{I}} = \frac{1}{j\omega L} Z(j\omega) = \\
 &= \frac{1}{j\omega L} \frac{\rho Q}{1 + j\xi} \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{1}{j} Q \frac{\omega_p}{\omega} \frac{1}{1 + j\xi}.
 \end{aligned}$$

Если за отклик принять ток в емкостной ветви, то комплексный коэффициент передачи по току

$$\begin{aligned}
 K_{IC}(j\omega) &= \frac{\dot{I}_C}{\dot{I}} = j\omega C \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega C Z(j\omega) = \\
 &= j\omega C \frac{\rho Q}{1 + j\xi} \frac{\omega_p}{\omega} = jQ \frac{\omega}{\omega_p} \frac{1}{1 + j\xi}.
 \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что $K_{IL}(j\omega)$ для параллельного колебательного контура полностью совпадает с $K_{UC}(j\omega)$ для последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов, а $K_{IC}(j\omega)$ – совпадает с $K_{UL}(j\omega)$.

7. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

7.1. Основные определения и классификация четырехполюсников

При анализе электрических цепей мы обычно поступали так: подавали на одну пару зажимов цепи воздействие и интересовались откликом на другой паре зажимов цепи, т. е. мы рассматривали цепь как четырехполюсник. Однако мы изучали конкретные цепи, а теория четырехполюсников позволяет изучать цепи безотносительно к их схемам, как «черные ящики». Чтобы это было возможным, необходимо напряжение и ток на выходе четырехполюсника связать с напряжением и током на входе четырехполюсника. Эта связь устанавливается с помощью параметров четырехполюсника, которые могут быть рассчитаны по схеме четырехполюсника или определены экспериментально.

Теория четырехполюсников позволяет решать не только задачу анализа цепей, но и задачу синтеза цепей, т. е. по заданным воздействию и отклику позволяет определить структуру и параметры цепей. Теорию четырехполюсника целесообразно применить в тех случаях, когда нас интересуют напряжения и токи только на внешних зажимах цепи и не интересуют токи и напряжения на ее внутренних элементах.

Итак, четырехполюсник – это участок электрической цепи, имеющий две пары зажимов (рис. 7.1). Зажимы четырехполюсника, на которые подается воздействие, называют **входными** или **входом**. Зажимы четырехполюсника, на которых определяют отклик, называют **выходными** или **выходом**.

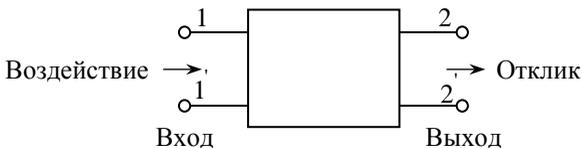


Рис. 7.1

Поскольку четырехполюсники представляют собой электрические цепи, то они, как и любая электрическая цепь, могут быть **линейными** и **нелинейными**, **активными** и **пассивными**.

Активный четырехполюсник, содержащий хотя бы один независимый источник, называют **автономным**. У автономного четырехполюсника в режиме холостого хода на входе и на выходе, хотя бы

на одной паре зажимов напряжение не будет равно нулю. Активный четырехполюсник, содержащий только зависимые источники, называют *неавтономным*. У неавтономного четырехполюсника в режиме холостого хода на входе и на выходе напряжение на обеих парах зажимов будет равно нулю.

По схемному признаку пассивные четырехполюсники подразделяют на *Г-образные* (рис. 7.2, а), *Т-образные* (рис. 7.2, б), *П-образные* (рис. 7.2, в), *мостовые* (рис. 7.2, г), *Т-образные перекрытые (Т-образные мостовые)* (рис. 7.2, д). В общем случае *мостовыми* называют четырехполюсники, в которых сигнал проходит с входа на выход двумя путями.

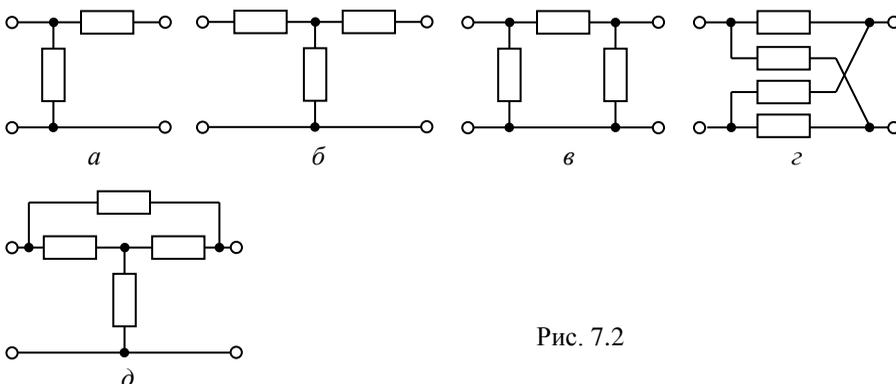


Рис. 7.2

Четырехполюсник называют *симметричным*, если при перемене местами его входных и выходных зажимов токи и напряжения во внешней цепи остаются неизменными. В противном случае четырехполюсники называют *несимметричными*.

Если при перемене местами входных зажимов 1 и 1', а также выходных зажимов 2 и 2' токи и напряжения во внешней цепи не изменяются, то такой четырехполюсник называют *уравновешенным*. В противном случае четырехполюсник называют *неуравновешенным*. Если один из входных зажимов соединен непосредственно с одним из выходных зажимов, то такой четырехполюсник называют *предельно неуравновешенным*.

Четырехполюсник называют *обратимым*, если его выходной ток при подключении источника напряжения ко входу будет равным входному току при подключении того же источника к выходу. В противном случае четырехполюсник называют *необратимым*. Обрати-

мыми являются линейные пассивные четырехполюсники и симметричные активные четырехполюсники как автономные, так и неавтономные. Несимметричные активные четырехполюсники необратимы.

Четырехполюсник называют **составным**, если он может быть представлен как соединение нескольких более простых четырехполюсников.

Различают следующие способы соединения четырехполюсников:

- последовательное (рис. 7.3, а);
- параллельное (рис. 7.3, б);
- последовательно-параллельное (рис. 7.3, в);
- параллельно-последовательное (рис. 7.3, г);
- каскадное (цепочечное, рис. 7.3, д).

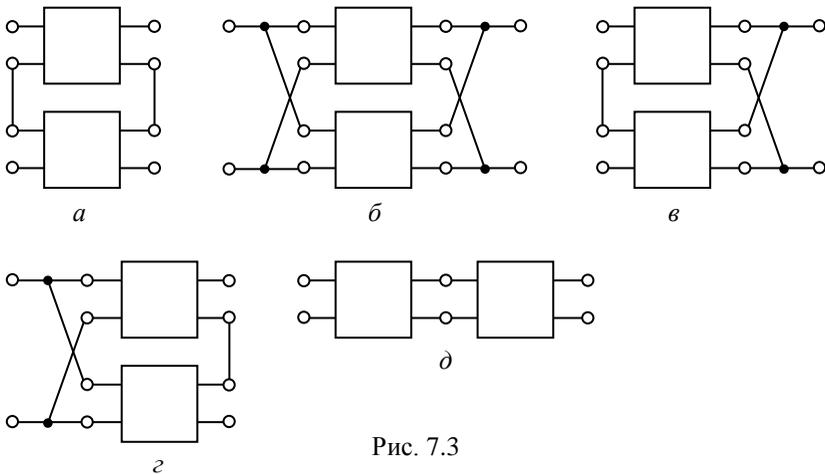


Рис. 7.3

Два четырехполюсника называют **эквивалентными**, если при замене одного из них другим токи и напряжения во внешней цепи не изменятся.

Четырехполюсник называют **проходным**, если к его входным зажимам подключен источник, а к выходным – нагрузка.

7.2. Основные уравнения четырехполюсников

Рассмотрим проходной четырехполюсник (рис. 7.4). Режим работы четырехполюсника характеризуется четырьмя физическими величинами: входным напряжением \dot{U}_1 , входным током \dot{I}_1 , выходным напряжением \dot{U}_2 , выходным током \dot{I}_2 . Уравнения, связывающие эти четыре величины, называют **основными уравнениями четырехполюсника** или **уравнениями передачи четырехполюсника**.

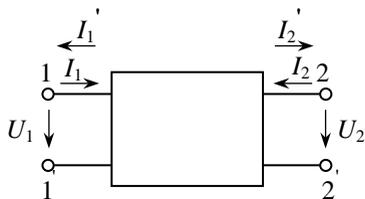


Рис. 7.4

Прежде чем приступить к выводу основных уравнений четырехполюсника, договоримся о положительных направлениях напряжений и токов. Напряжения будем отсчитывать от верхнего зажима к нижнему. Токи, втекающие в четырехполюсник через зажимы 1 и 2, обозначим соответственно \dot{I}_1 и \dot{I}_2 . Токи, вытекающие из четырехполюсника через зажимы 1 и 2, обозначим соответственно \dot{I}'_1 и \dot{I}'_2 .

На основании теоремы компенсации заменим ветви, подключенные к входу и выходу четырехполюсника, идеальными источниками напряжения $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$ (рис. 7.5).

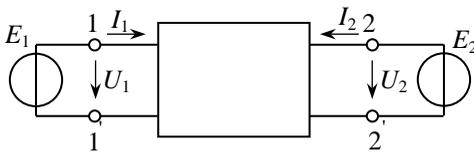


Рис. 7.5

Пусть рассматриваемый четырехполюсник содержит n контуров. Пронумеруем независимые контуры так, чтобы входной контур был первым, а выходной – вторым.

Поскольку четырехполюсник пассивный, т. е. рассматриваемая цепь не содержит других источников, кроме \dot{E}_1 и \dot{E}_2 , то контурные ЭДС

$$\dot{E}_{1к} = \dot{E}_1, \quad \dot{E}_{2к} = \dot{E}_2, \quad \dot{E}_{3к} = \dot{E}_{4к} = \dots = \dot{E}_{нк} = 0.$$

Пусть контурный ток входного контура $\dot{I}_{1к}$ совпадает с током \dot{I}_1 , а контурный ток выходного контура $\dot{I}_{2к}$ – с током \dot{I}_2 .

Составим систему контурных уравнений:

Отсюда

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}, \quad Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0},$$

т. е. Y_{11} – входная проводимость четырехполюсника при коротком замыкании на выходе;

Y_{21} – передаточная проводимость из входного контура в выходной при коротком замыкании на выходе.

Пусть $\dot{U}_1 = 0$, что соответствует короткому замыканию на входе четырехполюсника. Тогда

$$\dot{I}_1 = Y_{12}\dot{U}_2, \quad \dot{I}_2 = Y_{22}\dot{U}_2.$$

Отсюда

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0}, \quad Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0},$$

т. е. Y_{12} – передаточная проводимость из выходного контура во входной при коротком замыкании на входе;

Y_{22} – выходная проводимость четырехполюсника при коротком замыкании на входе.

Из физического смысла Y -параметров следует, что все они являются комплексными величинами. Y -параметры четырехполюсника могут быть рассчитаны по известной схеме четырехполюсника или определены экспериментально.

Как известно, в обратимых четырехполюсниках $Y_{12} = Y_{21}$. Отсюда следует, что обратимый четырехполюсник полностью характеризуется всего тремя параметрами. В симметричных четырехполюсниках, кроме того, выполняется равенство $Y_{11} = Y_{22}$, т. е. симметричный четырехполюсник полностью характеризуется всего двумя параметрами.

В полученных нами уравнениях четырехполюсника переменные \dot{U}_1 и \dot{U}_2 полагаются независимыми, а переменные \dot{I}_1 и \dot{I}_2 – зависимыми. Если в качестве независимых переменных выбрать другую пару величин, то можно получить еще пять форм записи основных уравнений четырехполюсника (число сочетаний из четырех по двум равно шести).

Уравнения передачи четырехполюсника в Z -форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2. \end{aligned}$$

Уравнения передачи четырехполюсника в H -форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Уравнения передачи четырехполосника в G -форме:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2.\end{aligned}$$

Уравнения передачи четырехполосника в A -форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}'_2.\end{aligned}$$

Уравнения передачи четырехполосника в B -форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}'_1; \\ \dot{I}_2 &= B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}'_1.\end{aligned}$$

Все формы записи уравнений передачи четырехполосника содержат полную информацию о нем, и в этом смысле все они эквивалентны. Отсюда следует, что между Y , Z , H , G , A и B -параметрами существует однозначная связь.

Выразим Z -параметры через Y -параметры, для чего уравнения передачи четырехполосника в Y -форме разрешим относительно \dot{U}_1 и \dot{U}_2 . Получим

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} \dot{I}_1 - \frac{Y_{12}}{\Delta_Y} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} \dot{I}_1 + \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} \dot{I}_2,\end{aligned}$$

где $\Delta_Y = Y_{22}Y_{11} - Y_{12}Y_{21}$ – определитель основной системы уравнений в Y -форме.

Сравнивая эти выражения с уравнениями передачи четырехполосника в Z -форме, находим

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}; \quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}; \quad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}; \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}.$$

Подобные соотношения могут быть получены для любых форм записи уравнений передачи четырехполосника и называются **формулами перехода** от одной системы параметров к другой. Параметры, входящие во все шесть форм записи уравнений передачи четырехполосника, называют **первичными**. Из шести форм записи уравнений передачи четырехполосника наиболее часто используются четыре: Y , Z , H и A -формы записи.

Установим физический смысл Z -параметров четырехполюсника. Уравнения передачи четырехполюсника в Z -форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.\end{aligned}$$

Пусть $\dot{I}_2 = 0$, что соответствует холостому ходу на выходе четырехполюсника. Тогда

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}; \quad Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0},$$

т. е. Z_{11} – входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1 при холостом ходе на зажимах 2 или входное сопротивление четырехполюсника при холостом ходе на выходе;

Z_{21} – передаточное сопротивление со входа на выход при холостом ходе на выходе.

Пусть $\dot{I}_1 = 0$, что соответствует холостому ходу на входе четырехполюсника. Тогда

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}; \quad Z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0},$$

т. е. Z_{12} – передаточное сопротивление с выхода на вход при холостом ходе на входе;

Z_{22} – выходное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 2 при холостом ходе на зажимах 1 или выходное сопротивление четырехполюсника при холостом ходе на входе.

Установим физический смысл H -параметров четырехполюсника. Уравнения передачи четырехполюсника в H -форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Пусть $\dot{U}_2 = 0$, что соответствует короткому замыканию на выходе четырехполюсника

Тогда

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}, \quad H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0},$$

т. е. H_{11} – входное сопротивление четырехполюсника при коротком замыкании на выходе;

H_{21} – коэффициент передачи по току при коротком замыкании на выходе четырехполюсника.

Пусть $I_1 = 0$, что соответствует холостому ходу на входе четырехполюсника. Тогда

$$H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_1=0}, \quad H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{i_1=0},$$

т. е. H_{12} – коэффициент передачи по напряжению с выхода на вход четырехполюсника при холостом ходе на входе;

H_{22} – входная проводимость четырехполюсника со стороны зажимов 2 при холостом ходе на зажимах 1 или выходная проводимость четырехполюсника при холостом ходе на входе.

7.3. Схемы замещения пассивного четырехполюсника

Как мы уже выяснили, пассивные четырехполюсники в силу их обратимости полностью описываются тремя параметрами, которые являются комплексными величинами. Это означает, что схема замещения таких четырехполюсников также должна содержать три комплексных параметра. Этому условию отвечает Т-образная и П-образная схемы замещения четырехполюсника (рис. 7.6).

Параметры схем замещения могут быть выражены через первичные параметры четырехполюсника, а также параметры одной схемы замещения могут быть выражены через параметры другой схемы замещения. Как

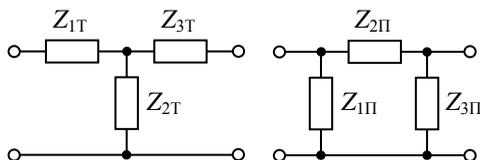


Рис. 7.6

видно из схем замещений, в Т-образной схеме замещения элементы соединены звездой, а в П-образной – треугольником, поэтому, если известны параметры Т-образной схемы замещений, то параметры П-образной схемы замещения могут быть найдены методом преобразования треугольника в эквивалентную звезду.

Установим связь параметров Т-образной схемы замещения с H -параметрами четырехполюсника. Запишем основные уравнения четырехполюсника в H -форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}H_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = Z_{1T} + \frac{Z_{2T}Z_{3T}}{Z_{2T} + Z_{3T}}; \\ H_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{Z_{2T}Z_{3T}}{Z_{2T} + Z_{3T}} \frac{1}{Z_{3T}} = \frac{Z_{2T}}{Z_{2T} + Z_{3T}}; \\ H_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{Z_{2T}}{Z_{2T} + Z_{3T}}; \\ H_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{1}{Z_{2T} + Z_{3T}}.\end{aligned}$$

Мы получили формулы, связывающие H -параметры четырехполюсника с параметрами его T -образной схемы замещения. Разрешив эти уравнения относительно параметров схемы замещения, можно получить формулы, связывающие параметры T -образной схемы замещения четырехполюсника с его H -параметрами.

Аналогичным образом можно установить связь параметров любой из схем замещения четырехполюсника с любой системой первичных параметров. Отметим, что T -образная и Π -образная схемы замещения четырехполюсника не всегда физически реализуемы.

7.4. Параметры холостого хода и короткого замыкания

Параметрами холостого хода и короткого замыкания называют входные и выходные сопротивления четырехполюсника в режиме холостого хода и короткого замыкания.

Для того чтобы доказать, что параметры холостого хода и короткого замыкания полностью описывают четырехполюсник, достаточно выразить параметры холостого хода и короткого замыкания через любую систему первичных параметров четырехполюсника. Выразим параметры холостого хода и короткого замыкания через H -параметры четырехполюсника:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}.$$

Входное сопротивление четырехполюсника в режиме короткого замыкания на выходе

$$Z_{1кз} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = H_{11}.$$

Входное сопротивление четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе

$$Z_{1хх} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{i}_2=0}.$$

Из второго уравнения системы уравнений четырехполюсника в H -форме находим

$$\dot{U}_2 = -\frac{H_{21}}{H_{22}} \dot{I}_1.$$

Подставим \dot{U}_2 в первое уравнение системы:

$$\dot{U}_1 = H_{11} \dot{I}_1 - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22}} \dot{I}_1 = \frac{H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}}{H_{22}} \dot{I}_1.$$

Отсюда входное сопротивление четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе

$$Z_{1хх} = \frac{H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}}{H_{22}}.$$

Выходное сопротивление четырехполюсника в режиме короткого замыкания на входе

$$Z_{2кз} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1=0}.$$

Из первого уравнения системы уравнений четырехполюсника в H -форме находим ток

$$\dot{I}_1 = -\frac{H_{12}}{H_{11}} \dot{U}_2.$$

Подставим ток \dot{I}_1 во второе уравнение системы:

$$\dot{I}_2 = -\frac{H_{12} H_{21}}{H_{11}} \dot{U}_2 + H_{22} \dot{U}_2 = \frac{H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}}{H_{11}} \dot{U}_2.$$

Отсюда выходное сопротивление четырехполюсника в режиме короткого замыкания на входе

$$Z_{2кз} = \frac{H_{11}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}.$$

Выходное сопротивление четырехполюсника в режиме холостого хода на входе

$$Z_{2xx} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{1}{H_{22}}.$$

Покажем, что в пассивном четырехполюснике только три параметра холостого хода и короткого замыкания являются независимыми. Найдем отношения

$$\frac{Z_{1кз}}{Z_{1xx}} \text{ и } \frac{Z_{2кз}}{Z_{2xx}}.$$

Отношение входных сопротивлений короткого замыкания и холостого хода

$$\frac{Z_{1кз}}{Z_{1xx}} = \frac{H_{11}H_{22}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}.$$

Отношение выходных сопротивлений короткого замыкания и холостого хода

$$\frac{Z_{2кз}}{Z_{2xx}} = \frac{H_{11}H_{22}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}.$$

Из сравнения двух последних соотношений следует, что

$$\frac{Z_{1кз}}{Z_{1xx}} = \frac{Z_{2кз}}{Z_{2xx}}.$$

Это выражение есть не что иное, как условие обратимости четырехполюсника в параметрах холостого хода и короткого замыкания.

В симметричном четырехполюснике $Z_{1кз} = Z_{2кз}$ и $Z_{1xx} = Z_{2xx}$, т. е. симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя параметрами.

Параметры холостого хода и короткого замыкания используются для экспериментального определения первичных параметров четырехполюсника, причем в ряде случаев этот вариант является единственно возможным.

7.5. Характеристические сопротивления пассивных четырехполюсников

Характеристическими сопротивлениями четырехполюсника называют такие сопротивления Z_{1C} и Z_{2C} , которые отвечают следующим условиям:

- при подключении к выходным зажимам четырехполюсника сопротивления нагрузки $Z_H = Z_{2C}$, его входное сопротивление со стороны входных зажимов $Z_{1вх} = Z_{1C}$;
- при подключении к входным зажимам четырехполюсника сопротивления нагрузки $Z_H = Z_{1C}$, его входное сопротивление со стороны выходных зажимов $Z_{2вх} = Z_{2C}$.

Сопротивление Z_{1C} называют *входным характеристическим сопротивлением* четырехполюсника, а сопротивление Z_{2C} – *выходным характеристическим сопротивлением* четырехполюсника.

Можно показать, что такая пара сопротивлений существует для любого пассивного четырехполюсника. Сопротивления Z_{1C} и Z_{2C} могут быть выражены через любую систему первичных параметров четырехполюсника, а также через параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{1C} = \sqrt{Z_{1xx} Z_{1кз}},$$
$$Z_{2C} = \sqrt{Z_{2xx} Z_{2кз}},$$

т. е. характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из сопротивлений холостого хода и короткого замыкания. Характеристические сопротивления Z_{1C} и Z_{2C} зависят только от параметров четырехполюсника и не зависят от параметров внешней цепи. Если четырехполюсник симметричный, то $Z_{1C} = Z_{2C} = Z_C$.

Если проходной четырехполюсник включен так, что внутреннее сопротивление источника равно входному характеристическому сопротивлению четырехполюсника Z_{1C} , а сопротивление нагрузки равно выходному характеристическому сопротивлению Z_{2C} , то говорят, что четырехполюсник включен *согласованно*.

Если условия согласования выполняются только для входа или только для выхода, то говорят, что четырехполюсник согласован соответственно по входу или по выходу.

7.6. Каскадное соединение четырехполюсников

Пусть даны два каскадно включенных четырехполюсника (рис. 7.7).

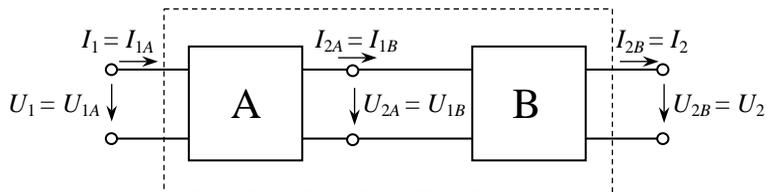


Рис. 7.7

Найдем коэффициент передачи по напряжению составного четырехполюсника

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_{2B}}{\dot{U}_{1A}}.$$

Умножим числитель и знаменатель на \dot{U}_{1B} . Тогда

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_{2B}}{\dot{U}_{1A}} \frac{\dot{U}_{1B}}{\dot{U}_{1B}},$$

Принимая во внимание, что $\dot{U}_{1B} = \dot{U}_{2A}$, получим

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{2B}}{\dot{U}_{1A}} \cdot \frac{\dot{U}_{1B}}{\dot{U}_{2A}} = K_{UA}(j\omega)K_{UB}(j\omega),$$

т. е. коэффициент передачи по напряжению составного четырехполюсника равен произведению коэффициентов передачи по напряжению каскадно включенных четырехполюсников.

Аналогичным образом найдем коэффициент передачи по току составного четырехполюсника:

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_{2B}}{\dot{I}_{1A}} \frac{\dot{I}_{1B}}{\dot{I}_{1B}} = \frac{\dot{I}_{2B}}{\dot{I}_{1A}} \frac{\dot{I}_{2A}}{\dot{I}_{1B}} = K_{IA}(j\omega)K_{IB}(j\omega),$$

т. е. коэффициент передачи по току составного четырехполюсника равен произведению коэффициентов передачи по току каскадно включенных четырехполюсников.

7.7. Схемы замещения неавтономных проходных четырехполюсников

Неавтономные четырехполюсники, как нам известно, необратимы, и поэтому все четыре параметра таких четырехполюсников будут независимыми. Следовательно, схемы замещения неавтономных четырехполюсников должны содержать также четыре параметра.

Схемы замещения неавтономных четырехполюсников можно образовать на основе схем замещения пассивных четырехполюсников, дополнив их идеальным управляемым источником.

Если принять за основу T-образную схему замещения пассивных четырехполюсников, то на ее основе можно образовать четыре схемы замещения неавтономных четырехполюсников (рис. 7.8).

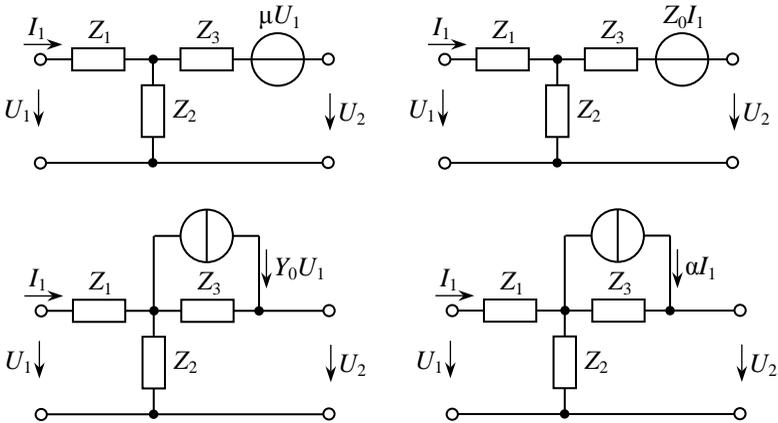


Рис. 7.8

Если принять за основу П-образную схему замещения пассивных четырехполюсников, то на ее основе можно образовать еще четыре схемы замещения неавтономных четырехполюсников (рис. 7.9).

Построение схем замещения неавтономных четырехполюсников на основе схем замещения пассивных четырехполюсников не является единственно возможным способом. В ряде случаев более удобными могут оказаться схемы замещения с двумя зависимыми источниками (рис. 7.10).

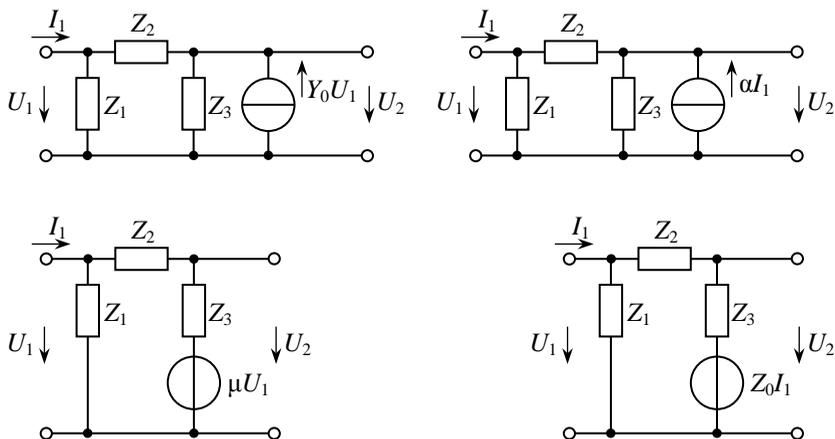


Рис. 7.9

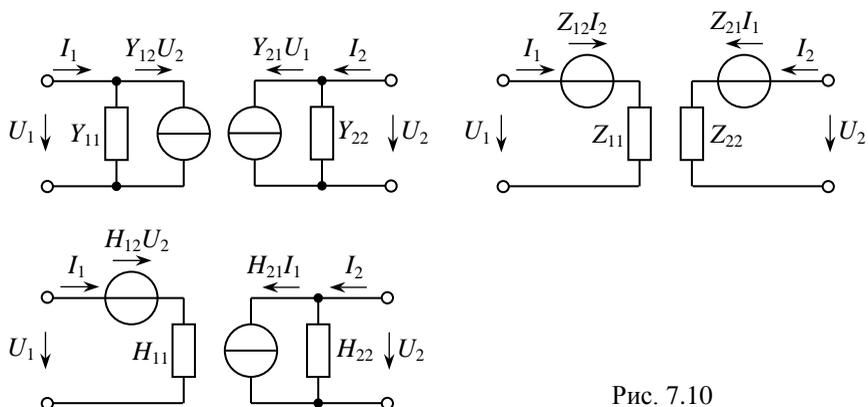


Рис. 7.10

Эти схемы замещения построены непосредственно по основным уравнениям четырехполюсников соответственно в Y -, Z - и H -параметрах.

8. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1. Определение отклика цепи по ее временным характеристикам

Переходной характеристикой $h(t)$ линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называют отклик этой цепи при нулевых начальных условиях на воздействие в виде функции включения.

Импульсной характеристикой $g(t)$ линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называют отклик цепи при нулевых начальных условиях на воздействие в виде δ -функции.

Переходная и импульсная характеристики, так же как и комплексная частотная характеристика, устанавливают связь между воздействием и откликом, однако если комплексная частотная характеристика устанавливает связь между воздействием и откликом в частотной области, то переходная и импульсная характеристики устанавливают связь между воздействием и откликом во временной области, поэтому переходную и импульсную характеристики называют *временными характеристиками цепи*.

Рассмотрим произвольную линейную цепь, не содержащую независимых источников энергии (рис. 8.1). Найдем отклик цепи $y(t)$ на произвольное воздействие $x(t)$ по известной импульсной характеристике $g(t)$.

Представим входное воздействие в виде последовательности примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (рис. 8.2), имеющих бесконечно малую длительность $d\tau$. Выделим один такой импульс, действующий в момент времени $t = \tau$. Если бы этот импульс

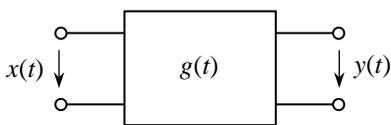


Рис. 8.1

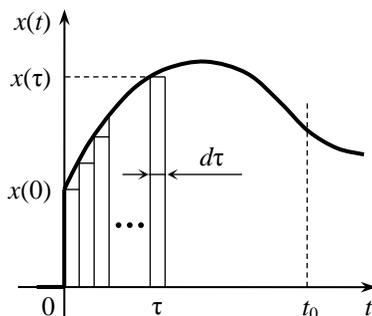


Рис. 8.2

имел единичную площадь, то откликом цепи в момент времени t_0 была бы импульсная характеристика $g(t_0 - \tau)$, где $t_0 - \tau$ – задержка момента времени t_0 относительно времени действия импульса τ . Но в нашем случае площадь импульса равна $x(\tau)d\tau$, поэтому для нахождения отклика цепи на импульс с площадью $x(\tau)d\tau$ необходимо импульсную характеристику $g(t_0 - \tau)$ умножить на площадь импульса:

$$dy(t_0) = x(\tau)d\tau \cdot g(t_0 - \tau).$$

Для нахождения отклика цепи в момент времени t_0 на воздействие $x(t)$, согласно принципу наложения, необходимо просуммировать отклики от всех элементарных импульсов, предшествующих моменту времени t_0 :

$$y(t_0) = \int_0^{t_0} x(\tau)g(t_0 - \tau)d\tau.$$

Поскольку эта формула справедлива для любого момента времени t_0 , то индекс можно опустить:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Полученный интеграл называют **интегралом наложения** или **интегралом Дюамеля**.

Найдем отклик цепи $y(t)$ на произвольное воздействие $x(t)$ по известной переходной характеристике $h(t)$ (рис. 8.3).

Представим входное воздействие $x(t)$ в виде суммы скачка $x(0)$ и последовательности примыкающих друг к другу элементарных скачков, следующих друг за другом через время $d\tau$ (рис. 8.4).

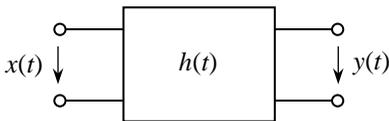


Рис. 8.3

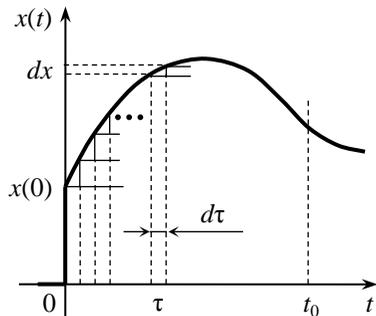


Рис. 8.4

Выделим один такой элементарный скачок, соответствующий моменту времени τ . Амплитуда элементарного скачка $dx = x'(\tau)d\tau$.

Если бы этот скачок имел единичную амплитуду, то откликом цепи в момент времени t_0 была бы переходная характеристика $h(t_0 - \tau)$, где $t_0 - \tau$ – задержка момента времени t_0 относительно времени действия импульса τ . Но в нашем случае амплитуда скачка равна $x'(\tau)d\tau$, поэтому для нахождения отклика цепи на скачок с амплитудой $x'(\tau)d\tau$ необходимо переходную характеристику $h(t_0 - \tau)$ умножить на амплитуду скачка:

$$dy(t_0) = x'(\tau)d\tau \cdot h(t_0 - \tau).$$

Отклик цепи в момент времени t_0 на воздействие $x(t)$ можно найти, просуммировав согласно принципу наложения отклик на скачок $x(0)$ и отклики на все элементарные скачки, предшествующие моменту времени t_0 :

$$y(t_0) = x(0) h(t_0) + \int_0^{t_0} x'(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau.$$

Поскольку момент времени t_0 может быть любым, то

$$y(t) = x(0) h(t) + \int_0^t x'(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Полученное выражение представляет собой одну из форм записи интеграла Дюамеля.

Рассмотренный метод нахождения отклика линейной цепи известен под названиями «метод интеграла наложения» или «метод интеграла Дюамеля».

8.2. Определение отклика цепи по ее частотным характеристикам

Пусть дана линейная электрическая цепь, имеющая комплексный коэффициент передачи по напряжению $K_U(j\omega)$ (рис. 8.5). Найдем отклик цепи $u_2(t)$ по заданному воздействию $u_1(t)$.

Рассмотрим три случая.

1. Пусть входное воздействие $u_1(t)$ представляет собой гармоническое колебание. Поскольку воздействие гармоническое, то функции времени $u_1(t)$ можно поставить в соответствие ее комплексное изображение \dot{U}_1 . Согласно определению

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$$

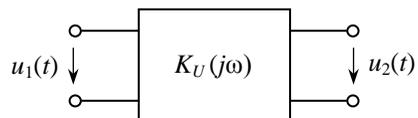


Рис. 8.5

откуда

$$\dot{U}_2 = K_U(j\omega)\dot{U}_1.$$

Для решения задачи осталось перейти от изображения отклика \dot{U}_2 к функции времени $u_2(t)$.

2. Пусть $u_1(t)$ представляет собой периодическое негармоническое колебание, удовлетворяющее условиям Дирихле. В этом случае периодическую функцию $u_1(t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{1n} e^{jn\omega_1 t}.$$

Физически это означает, что на входе цепи действует бесконечное число включенных последовательно гармонических источников, каждый из которых имеет свою частоту $n\omega_1$, амплитуду U_{1n} и начальную фазу Ψ_{1n} .

Найдем отклик цепи на n -ю гармонику входного воздействия:

$$\dot{U}_{2n} = K_U(jn\omega_1)\dot{U}_{1n}.$$

Поскольку цепь линейна, то в силу принципа наложения отклик цепи $u_2(t)$ на воздействие $u_1(t)$ можно найти как сумму откликов на воздействие всех гармоник:

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_U(jn\omega_1)\dot{U}_{1n} e^{jn\omega_1 t}.$$

3. Пусть входное воздействие $u_1(t)$ является непериодической функцией времени, отвечающей условиям Дирихле и абсолютно интегрируемой в бесконечных пределах (абсолютная интегрируемость означает, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(t)| dt$ должен иметь конечное значение).

Перейдем от функции времени $u_1(t)$ к ее спектральному представлению.

$$U_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt.$$

В силу линейности цепи спектр отклика

$$U_2(j\omega) = K_U(j\omega)U_1(j\omega).$$

По спектру $U_2(j\omega)$, применяя обратное преобразование Фурье, находим

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Таким образом, спектральный метод анализа позволяет найти отклик цепи на произвольное воздействие. Недостаток этого метода заключается в трудности вычисления интегралов. Функция $u_1(t)$ может быть задана аналитически, графически и таблично. В последнем случае интегрирование выполняется численными методами.

8.3. Связь временных и частотных характеристик электрической цепи

Установим связь между частотными и временными характеристиками цепи. Пусть дана цепь с комплексной частотной характеристикой $K(j\omega)$. Если воздействие представляет собой δ -функцию, то откликом цепи будет ее импульсная характеристика $g(t)$ (рис. 8.6).

Найдем спектральную характеристику отклика

$$G(j\omega) = \Delta(j\omega)K(j\omega).$$

Но $\Delta(j\omega) = 1$. Тогда $G(j\omega) = K(j\omega)$. Применяв к $G(j\omega)$ обратное преобразование Фурье, получим

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Соответственно

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt,$$

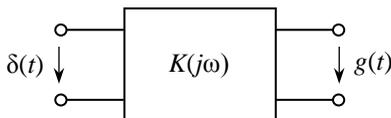


Рис. 8.6

т. е. импульсная характеристика цепи $g(t)$ и ее комплексная частотная характеристика $K(j\omega)$ связаны между собой преобразованиями Фурье.

Если воздействие представляет собой функцию включения $1(t)$, то откликом цепи будет ее переходная характеристика $h(t)$ (рис. 8.7).

Найдем спектр отклика

$$H(j\omega) = 1(j\omega) K(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j\omega}.$$

Но $1(j\omega) = 1/j\omega$. Тогда

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j\omega}.$$

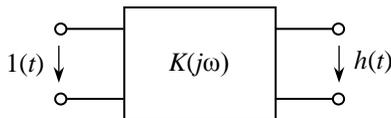


Рис. 8.7

Применяя к $H(j\omega)$ обратное преобразование Фурье, получим формулу, связывающую переходную характеристику $h(t)$ с комплексной частотной характеристикой $K(j\omega)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Из сравнения спектральных характеристик откликов на воздействия в виде функции включения и δ -функции следует, что

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j\omega} = \frac{G(j\omega)}{j\omega}.$$

Но операция деления на $j\omega$ в частотной области соответствует операции интегрирования во временной области. Тогда

$$h(t) = \int_0^t g(t) dt.$$

Соответственно

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = h'(t).$$

Как и следовало ожидать, импульсная и переходная характеристики связаны друг с другом: переходная характеристика равна интегралу от импульсной характеристики, а импульсная характеристика равна производной от переходной характеристики.

Воспользовавшись последним соотношением, выразим комплексную частотную характеристику цепи через ее переходную характеристику:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h'(t) e^{-j\omega t} dt.$$

8.4. Условия неискаженной передачи сигнала через линейную электрическую цепь

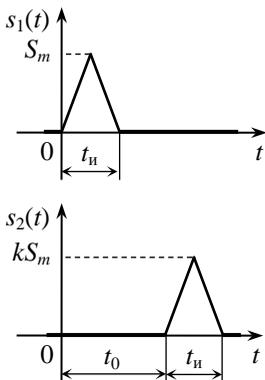


Рис. 8.8

Передачу сигнала называют **неискаженной**, если выходной сигнал совпадает по форме с входным сигналом, при этом допускается задержка сигнала на время t_0 и пропорциональное изменение уровня выходного сигнала по сравнению с входным (рис. 8.8).

Итак, условием неискаженной передачи является

$$s_2(t) = ks_1(t - t_0),$$

где k – постоянный множитель, а t_0 – время запаздывания выходного сигнала относительно входного.

Найдем комплексную частотную характеристику цепи $K(j\omega)$, отвечающую этому условию.

Пусть сигнал $s_1(t)$ имеет спектр $S_1(j\omega)$. Найдем спектр неискаженного выходного сигнала $s_2(t)$:

$$S_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = k \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt .$$

Произведем замену переменной:

$$t - t_0 = x .$$

Тогда

$$S_2(j\omega) = k \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) e^{-j\omega x} e^{-j\omega t_0} dx = k S_1(j\omega) e^{-j\omega t_0} .$$

Комплексная частотная характеристика неискажающей цепи

$$K(j\omega) = \frac{S_2(j\omega)}{S_1(j\omega)} = k e^{-j\omega t_0} .$$

Итак, электрическая цепь не будет исказить передаваемые сигналы, если ее амплитудно-частотная характеристика равномерна во всей полосе частот (рис. 8.9)

$$K(\omega) = k = \text{const},$$

а фазочастотная характеристика линейна

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 .$$

Условия неискаженной передачи выполняются, например, в резистивных цепях, в которых $t_0 = 0$. В общем случае (но не всегда) в цепях с реактивными элементами условия неискаженной передачи физически нереализуемы в диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Однако на практике это и не требуется, так как реальные сигналы имеют конечную ширину спектра и поэтому достаточно, чтобы характеристики цепи были близки к идеальным только в спектре частот входного воздействия.

Вследствие неидеальности амплитудно-частотной характеристики амплитудные соотношения спектральных составляющих сигнала на выходе и входе цепи будут отличаться. Изменения формы негармонического сигнала, вызванные неидеальностью амплитудно-частотной характеристики, называют **частотными искажениями**.

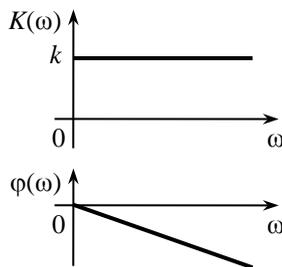


Рис. 8.9

Неидеальность (нелинейность) фазочастотной характеристики приводит к изменению фазовых соотношений спектральных составляющих в выходном сигнале цепи. Вызываемые этой причиной изменения формы негармонического колебания называют **фазовыми искажениями**.

Для частотных и фазовых искажений используют также обобщающий термин – **линейные искажения**, поскольку они присущи линейным цепям, содержащим реактивные элементы. Отметим, что линейные искажения изменяют амплитудные и фазовые соотношения спектральных составляющих сигнала, но не изменяют спектральный состав сигнала. Линейные искажения приводят к изменению формы сложных сигналов, но не изменяют форму гармонического колебания.

8.5. Согласование источника с нагрузкой

Рассмотрим цепь, содержащую источник напряжения с ЭДС \dot{E} и внутренним сопротивлением Z_i , нагруженный на сопротивление Z_n (рис. 8.10). Пусть

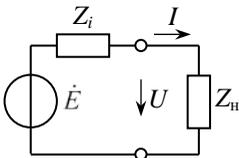


Рис. 8.10

$$Z_i = R_i + jx_i,$$

$$Z_n = R_n + jx_n.$$

Определим параметры нагрузки, при которых активная мощность в нагрузке будет максимальна.

Активная мощность

$$P = I^2 R_n = \frac{E^2 R_n}{(R_i + R_n)^2 + (x_i + x_n)^2} \quad (8.1)$$

является функцией двух независимых переменных R_n и x_n . Поскольку x_n входит только в знаменатель, то очевидно, что активная мощность будет максимальна при $x_n = -x_i$. Тогда

$$P_{\max} = P|_{x_n = -x_i} = \frac{E^2 R_n}{(R_i + R_n)^2}.$$

Исследуем поведение этой функции при изменении R_n . Продифференцируем последнее выражение:

$$\frac{dP_{\max}}{dR_n} = E^2 \frac{(R_i + R_n)^2 - R_n 2(R_i + R_n)}{(R_i + R_n)^4}.$$

Приравнивая полученную производную к нулю

$$R_i^2 + 2R_i R_H + R_H^2 - 2R_i R_H - 2R_H^2 = 0,$$

находим

$$R_H = R_i.$$

Итак, при $x_H = -x_i$ и $R_H = R_i$ источник отдает в нагрузку максимально возможную активную мощность

$$P_{\max \max} = P \Big|_{\substack{x_H = -x_i \\ R_H = R_i}} = \frac{E^2 R_i}{4R_i^2} = \frac{E^2}{4R_i}.$$

Условие передачи максимальной активной мощности в нагрузку можно записать в виде

$$Z_H = Z_i^*,$$

т. е. для передачи в нагрузку максимальной активной мощности сопротивление нагрузки должно быть комплексно сопряженным с внутренним сопротивлением источника. В цепях постоянного тока источник будет отдавать в нагрузку максимальную мощность при $R_H = R_i$.

Здесь следует заметить, что режим передачи максимальной активной мощности в нагрузку при $Z_H = Z_i^*$ имеет скорее теоретическое, чем практическое значение. Действительно, в цепях передачи электрической энергии этот режим не может быть использован из-за низкого коэффициента полезного действия $\eta = 0,5$, а в цепях передачи электрических сигналов – из-за больших линейных искажений.

Покажем, что при работе источника на комплексно сопряженную нагрузку коэффициент передачи по напряжению $K_U(j\omega)$, равный отношению напряжения на нагрузке \dot{U} к ЭДС источника \dot{E} , будет зависеть от частоты ω .

Коэффициент передачи по напряжению рассматриваемой цепи

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{E}} = \frac{Z_H}{Z_i + Z_H} = \frac{R_H + jx_H}{(R_i + jx_i) + (R_H + jx_H)}.$$

При $x_H = -x_i$ и $R_H = R_i$ получим

$$K_U(j\omega) = \frac{R_i - jx_i}{2R_i}.$$

Отсюда следует, что $K_U(j\omega)$ в этом случае будет зависеть от частоты, поскольку x_i зависит от частоты. К тому же условие $x_H = -x_i$ может быть выполнено только на одной частоте, которая будет частотой резонанса напряжений, но именно резонансные цепи отличаются

наибольшей неравномерностью амплитудно-частотной характеристики и нелинейностью фазочастотной характеристики. Таким образом, в сигнальных цепях согласование источника с нагрузкой по критерию максимальной активной мощности недопустимо, поскольку линейные искажения сигнала при этом будут максимальны.

Очевидно, что в сигнальных цепях представляет интерес не просто передача максимальной активной мощности в нагрузку, а **передача максимальной активной мощности при условии отсутствия линейных искажений**.

Определим условия, при которых рассматриваемая цепь будет неискажающей

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{E}} = \frac{Z_H}{Z_i + Z_H} = \frac{1}{1 + \frac{Z_i}{Z_H}} = \frac{1}{1 + \frac{R_i + jx_i}{R_H + jx_H}} = \frac{1}{1 + \frac{R_i \left(1 + j \frac{x_i}{R_i}\right)}{R_H \left(1 + j \frac{x_H}{R_H}\right)}}.$$

Из полученного выражения следует, что рассматриваемая цепь не будет вносить линейные искажения при

$$\frac{x_i}{R_i} = \frac{x_H}{R_H},$$

т. е. характер реактивных составляющих сопротивления нагрузки и источника должен быть одинаков.

Преобразуем полученное условие неискаженной передачи сигнала, умножив левую и правую часть равенства на R_H / x_i . Тогда

$$\frac{R_H}{R_i} = \frac{x_H}{x_i} = \alpha.$$

Найдем максимальную активную мощность в нагрузке при условии неискаженной передачи сигнала. Принимая во внимание, что при условии неискаженной передачи сигнала $R_H = \alpha R_i$, а $x_H = \alpha x_i$, из соотношения (8.1) получим

$$P \Big|_{\substack{x_H = \alpha x_i \\ R_H = \alpha R_i}} = E^2 \frac{R_i}{R_i^2 + x_i^2} \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2}.$$

Исследование этой зависимости на экстремум дает, что она имеет максимум при $\alpha = 1$, т. е. при условии неискаженной передачи сигнала в нагрузку будет передаваться максимальная активная мощность, когда

$$R_H = R_i, \quad x_H = x_i,$$

или, в комплексной форме,

$$Z_{\text{н}} = Z_i .$$

Максимальная активная мощность в нагрузке при условии неискаженной передачи сигнала

$$P_{\text{max}}|_{Z_{\text{н}}=Z_i} = \frac{1}{4} \frac{E^2 R_i}{R_i^2 + X_i^2} .$$

Режим работы источника на сопротивление нагрузки, равное внутреннему сопротивлению источника $Z_{\text{н}} = Z_i$, называют ***согласованным режимом***.

9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Переходные процессы. Законы коммутации и начальные условия

При установившихся процессах в электрических цепях напряжения и токи либо неизменны во времени, что имеет место в цепях постоянного тока, либо являются периодическими функциями времени, что имеет место в цепях переменного тока. Установившийся режим работы может нарушаться при различных изменениях топологии или параметров цепи (включение и отключение нагрузок, электросварка и т. п.). Любое скачкообразное изменение топологии или параметров цепи будем называть *коммутацией*. Если внешнее воздействие после коммутации является постоянной величиной или периодической функцией времени, то со временем цепь перейдет в новый установившийся режим. Неустановившиеся процессы в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому называют *переходными процессами*.

В электроэнергетике переходные процессы связаны в основном с изменениями топологии цепи и параметров пассивных элементов (коммутации нагрузки, сварка, контроллеры в электроприводе и т. п.). Параметры источников энергии, как правило, неизменны во времени.

В радиоэлектронике наоборот, топология и параметры цепи остаются неизменными, а внешнее воздействие – входной сигнал – изменяется по произвольному закону. В этом смысле режим работы радиоэлектронных цепей представляет сплошной переходной процесс и уместнее говорить не о процессе перехода от одного установившегося режима к другому (их просто нет), а об отклике цепи на произвольное непериодическое воздействие.

Однако и в радиоэлектронике есть целый класс устройств – импульсные устройства, принцип действия которых основан на использовании переходных процессов при коммутации в электрических цепях, что делает актуальным изучение переходных процессов в их классическом виде.

Другой аргумент в пользу изучения переходных процессов: произвольное непериодическое воздействие может быть представлено как суперпозиция скачкообразных воздействий.

Анализ переходных процессов в их классическом виде необходим также для нахождения временных характеристик линейных электрических цепей.

При анализе переходных процессов в электрических цепях длительностью процесса коммутации обычно пренебрегают и считают, что коммутация осуществляется мгновенно. За начало отсчета времени, как правило, принимают момент коммутации. Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначают $t = 0_-$. Момент времени непосредственно после коммутации обозначают $t = 0_+$ или $t = 0$.

Несмотря на то, что коммутация осуществляется мгновенно, переход от одного установившегося режима к другому происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени. Это объясняется тем, что каждому установившемуся режиму соответствует определенный запас энергии электрического и магнитного полей. Скачкообразный переход от одного установившегося режима к другому означал бы скачкообразное изменение энергии, запасенной в цепи. Но в этом случае мощность, равная производной энергии по времени, достигла бы бесконечно больших значений, что физически невозможно. Таким образом, суммарная энергия, запасенная в цепи, может изменяться только плавно без скачков. Но энергия, запасенная индуктивностью,

$$w_L = \frac{Li^2}{2},$$

а энергия, запасенная емкостью,

$$w_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

Тогда из непрерывности запасенной энергии, следует непрерывность тока в индуктивности и непрерывность напряжения на емкости. Эти положения формулируют в виде законов или правил коммутации.

Первый закон коммутации: ток через индуктивность после коммутации равен току через индуктивность непосредственно перед коммутацией

$$i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

Второй закон коммутации: напряжение на емкости непосредственно после коммутации равно напряжению на емкости непосредственно перед коммутацией

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Законы коммутации не накладывают ограничений на характер изменения напряжения на индуктивности, тока через емкость и

напряжения и тока сопротивлений, которые могут изменяться скачком.

Значения токов и напряжений, а также их производных в момент времени $t = 0_+$ называют **начальными условиями**. Начальные условия подразделяют на независимые и зависимые. **Независимыми начальными условиями** называют значения токов через индуктивность и напряжений на емкостях в момент времени $t = 0_+$. Значения остальных напряжений и токов и их производных в момент времени $t = 0_+$ называют **зависимыми начальными условиями**.

Независимые начальные условия определяют из анализа установившегося режима цепи в момент времени $t = 0_-$. Зависимые начальные условия определяют по независимым начальным условиям из уравнения равновесия электрической цепи, составленным для момента времени $t = 0_+$.

Если энергия, запасенная в цепи в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, равна нулю, то говорят, что в цепи имеют место **нулевые начальные условия**. В этом случае все независимые начальные условия равны нулю.

Если запас энергии в цепи в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, не равен нулю, то говорят, что в цепи имеют место **ненулевые начальные условия**. В этом случае хотя бы одно независимое начальное условие не равно нулю.

9.2. Классический метод анализа переходных процессов

Классический метод анализа переходных процессов основан на классическом методе решения обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений, описывающих электрические цепи. Порядок дифференциального уравнения равен количеству независимых реактивных элементов цепи. В зависимости от порядка дифференциального уравнения, описывающего цепь, различают цепи первого, второго и более высоких порядков.

Пусть заданная цепь описывается дифференциальным уравнением v -го порядка

$$a_v \frac{d^v y}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} y}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t).$$

Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами равно

сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения

$$a_v \frac{d^v y}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} y}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t),$$

которое получается из неоднородного уравнения при $x(t) = 0$.

Частное решение определяет **принужденный режим**, задаваемый источником. Если воздействие $x(t)$ постоянно или является периодической функцией времени, то принужденный режим будет характеризовать **установившийся режим** цепи после коммутации.

Общее решение однородного дифференциального уравнения характеризует так называемые **свободные процессы** в цепи, т. е. процессы в цепи после коммутации при отсутствии источников и заданных начальных условиях. В цепях с потерями свободные процессы с течением времени затухают. Характер свободных процессов не зависит от внешнего воздействия, а определяется только параметрами цепи и ее топологией после коммутации.

Итак, искомый отклик цепи можно представить в виде суммы свободной $y_{св}$ и принужденной $y_{пр}$ составляющих:

$$y = y_{св} + y_{пр}.$$

Поскольку свободная составляющая со временем затухает $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св} \rightarrow 0$, то принужденная составляющая представляет собой установившееся значение отклика после коммутации $y_{пр} = \lim_{t \rightarrow \infty} y$. Для определения принужденной составляющей необходимо воспользоваться методами анализа цепей в установившемся режиме.

Для определения свободной составляющей $y_{св}$ отклика цепи необходимо решить характеристическое уравнение

$$a_v p^v + a_{v-1} p^{v-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Если корни характеристического уравнения простые (различные), то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_v e^{p_v t},$$

где A_1, A_2, \dots, A_v – постоянные интегрирования;

p_1, p_2, \dots, p_v – корни характеристического уравнения.

Если какой-либо корень p_k имеет кратность n , то этому корню соответствует слагаемое свободной составляющей вида

$$y_{св}^{(k)} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_n t^{n-1}) e^{p_k t}.$$

9.3. Переходные процессы в цепях первого порядка. Общие положения

К цепям первого порядка относятся RL - и RC -цепи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями первого порядка. В соответствии с классическим методом анализа переходных процессов, отклик цепи равен сумме принужденной и свободной составляющих:

$$y(t) = y_{\text{пр}} + y_{\text{св}} = y_{\text{пр}} + Ae^{pt}.$$

Введем обозначение $\tau = -1/p$. Величину τ , имеющую размерность времени, **называют постоянной времени цепи первого порядка**. Используя введенное обозначение, получим

$$y(t) = y_{\text{пр}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Величина τ характеризует скорость затухания свободной составляющей переходного процесса. Найдем значение постоянной интегрирования A . При $t = 0$ имеем $y(0) = y_{\text{пр}}(0) + A$. Отсюда

$$A = y(0) - y_{\text{пр}}(0).$$

Тогда выражение для отклика цепи первого порядка имеет вид

$$y(t) = y_{\text{пр}}(t) + [y(0) - y_{\text{пр}}(0)]e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если воздействие $x(t)$ является константой или периодической функцией времени, то принужденная составляющая отклика $y_{\text{пр}}$ будет характеризовать установившийся режим цепи после коммутации. Если $x(t) = \text{const}$, то и $y_{\text{пр}}(t) = \text{const}$. Если $x(t)$ – гармоническая функция времени, то $y(t)$ также будет гармонической функцией времени.

Свободная составляющая переходного процесса в цепи первого порядка, как видно из полученного выражения, независимо от характера воздействия $x(t)$ является экспоненциальной функцией времени. С течением времени свободная составляющая переходного процесса затухает и при $t \rightarrow \infty$ $y_{\text{св}} \rightarrow 0$.

График свободной составляющей переходного процесса $y_{\text{св}}(t)$ в цепи первого порядка изображен на рис. 9.1. Отметим на графике точку B , соответствующую произвольному моменту времени. Проведем касательную к графику $y_{\text{св}}(t)$ в точке B до пересечения с осью абсцисс. Отрезок BE называют **длиной касательной**. Отрезок CE , представляющий собой проекцию отрезка BE на ось абсцисс, называют **подкасательной**.

Найдем длину подкасательной. Из прямоугольного треугольника BCE имеем

$$\frac{BC}{CE} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда

$$CE = \left| \frac{BC}{\operatorname{tg} \alpha} \right| = \left| \frac{y_{CB}}{y'_{CB}} \right| = \left| \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau} Ae^{-\frac{t}{\tau}}} \right| = \tau,$$

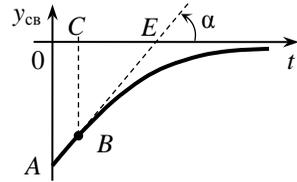


Рис. 9.1

т. е. геометрический смысл постоянной времени τ цепи первого порядка заключается в том, что она является длиной подкасательной к кривой $y_{CB}(t)$. Таким образом, постоянная времени τ является мерой длительности переходных процессов.

Оценим скорость затухания свободной составляющей переходного процесса:

$$\frac{y_{CB}}{y_{CB}(0)} = \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{A} = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если рассчитать значения этой функции, то получим следующие результаты:

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$\frac{y_{CB}}{y_{CB}(0)}$	1	0,368	0,135	0,050	0,018	0,007

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако на практике можно считать, что переходный процесс заканчивается за время $t = (3 \div 5) \tau$.

Пусть воздействие $x(t) = \text{const}$. Оценим время $\Delta t = t_2 - t_1$, за которое отклик цепи $y(t)$ изменяется от уровня $y(t_1)$ до уровня $y(t_2)$ (рис. 9.2). Если $x(t) = \text{const}$, то $y_{np}(t) = y_{np}(0) = y(\infty) = \text{const}$. При $t = t_1$

$$y(t_1) = y(\infty) + [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t_1}{\tau}}.$$

Разрешим уравнение относительно экспоненты:

$$e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{y(t_1) - y(\infty)}{y(0) - y(\infty)}.$$

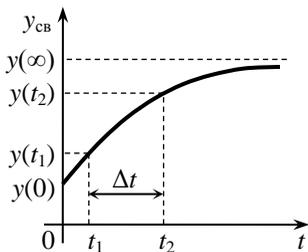


Рис. 9.2

Отсюда после логарифмирования получим

$$t_1 = \tau \ln \frac{y(0) - y(\infty)}{y(t_1) - y(\infty)}.$$

Аналогичным образом находим

$$t_2 = \tau \ln \frac{y(0) - y(\infty)}{y(t_2) - y(\infty)}.$$

Тогда

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \tau \left[\ln \frac{y(0) - y(\infty)}{y(t_2) - y(\infty)} - \ln \frac{y(0) - y(\infty)}{y(t_1) - y(\infty)} \right].$$

Окончательно получим

$$\Delta t = \tau \ln \frac{y(t_1) - y(\infty)}{y(t_2) - y(\infty)}.$$

Эта формула широко используется в импульсной технике при определении длительности импульсов, длительности фронтов, периодов колебаний.

9.4. Переходные процессы в RL -цепи

Пусть в момент времени $t = 0$ последовательная RL -цепь подключается к источнику напряжения с ЭДС $e(t)$ (рис. 9.3). Запишем дифференциальное уравнение цепи для времени $t \geq 0$

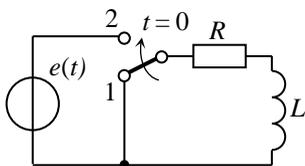


Рис. 9.3

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e.$$

Характеристическое уравнение

$$R + pL = 0.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{R}{L}.$$

Тогда постоянная времени RL -цепи

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Пусть $e(t) = E = \text{const}$, т. е. рассмотрим переходные процессы в последовательной RL -цепи при ее подключении к источнику посто-

янного напряжения. В соответствии с полученной нами формулой отклика цепи первого порядка

$$i(t) = i_{\text{пр}} + [i(0) - i_{\text{пр}}(0)] e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Но $i_{\text{пр}} = \frac{E}{R}$, $i_{\text{пр}}(0) = \frac{E}{R}$, $i(0) = 0$. Тогда

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Напряжение на сопротивлении R

$$u_R(t) = Ri = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Напряжение на индуктивности L

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Временные диаграммы переходных процессов приведены на рис. 9.4.

Рассмотрим второй случай. Пусть в некоторый момент времени, который примем за нулевой, переведем ключ из положения 2 в положение 1 (см. рис. 9.3). При этом ток в цепи исчезнет не мгновенно, а будет некоторое время поддерживаться за счет энергии, запасенной в индуктивности. В соответствии с первым законом коммутации

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{R}.$$

По мере того, как энергия, запасенная в индуктивности, будет рассеиваться, превращаясь на сопротивлении R в тепло, ток в RL -цепи будет стремиться

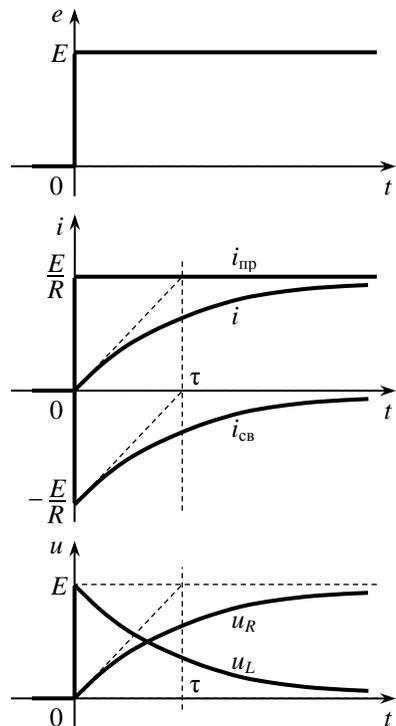


Рис. 9.4

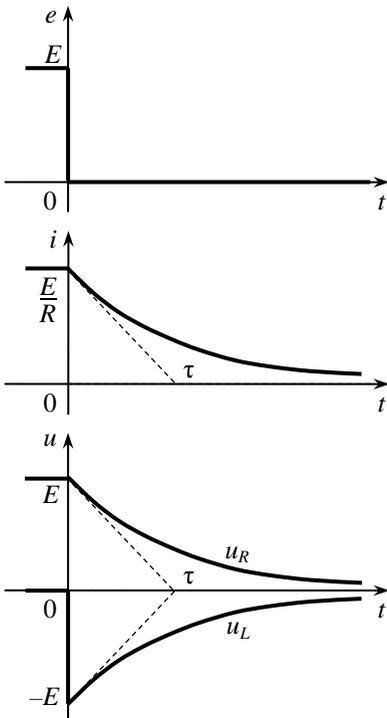


Рис. 9.5

к нулю, т. е. $i_{np} = 0$. Соответственно $i_{np}(0) = 0$. Тогда

$$i(t) = i_{np} + [i(0) - i_{np}(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на сопротивлении R

$$u_R(t) = iR = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на индуктивности L

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Временные диаграммы переходных процессов приведены на рис. 9.5.

9.5. Переходные процессы в RC -цепи

Пусть в момент времени $t = 0$ последовательная RC -цепь подключается к источнику напряжения с ЭДС $e(t)$ (рис. 9.6). Согласно второму закону Кирхгофа при $t \geq 0$

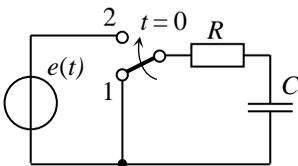


Рис. 9.6

$$Ri + u_C = e,$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e.$$

Характеристическое уравнение цепи

$$RCp + 1 = 0.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

Постоянная времени RC -цепи

$$\tau = RC.$$

Пусть $e(t) = E = \text{const}$, т. е. рассмотрим переходные процессы в последовательной RC -цепи при ее подключении к источнику постоянного напряжения с ЭДС E .

Для нахождения $u_C(t)$ воспользуемся формулой для отклика цепи первого порядка

$$u_C(t) = u_{C\text{нр}} + [u_C(0) - u_{C\text{нр}}(0)]e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Найдем величины, входящие в эту формулу:

$$u_C(0) = 0,$$

$$u_{C\text{нр}} = E,$$

$$u_{C\text{нр}}(0) = E.$$

Тогда

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Ток в RC -цепи

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = CE \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на сопротивлении R

$$u_R(t) = iR = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Временные диаграммы переходных процессов приведены на рис. 9.7.

Рассмотрим второй случай: разрядку предварительно заряженной емкости C на сопротивление R . Пусть в некоторый момент времени, который мы примем за нулевой, ключ из положения 2 перебрасывается в положение 1 (см. рис. 9.6). В соответствии со вторым законом коммутации

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E.$$

В дальнейшем емкость C будет разряжаться на сопротивление R и при $t \rightarrow \infty$ $u_{C\text{нр}} = 0$. Соответственно $u_{C\text{нр}}(0) = 0$.

Запишем решение дифференциального уравнения:

$$u_C(t) = u_{C\text{нр}}(t) + [u_C(0) - u_{C\text{нр}}(0)]e^{-\frac{t}{\tau}},$$

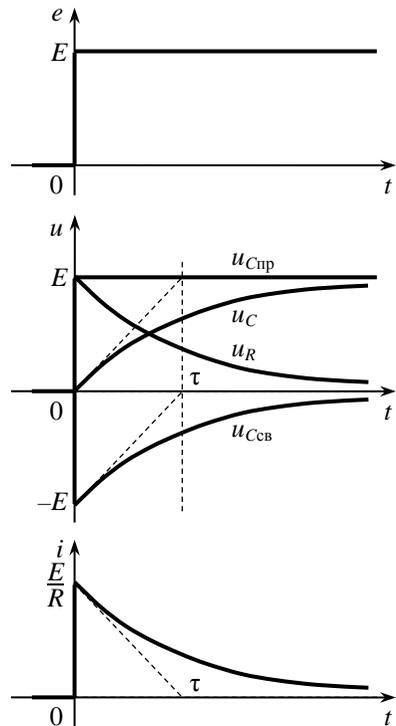


Рис. 9.7

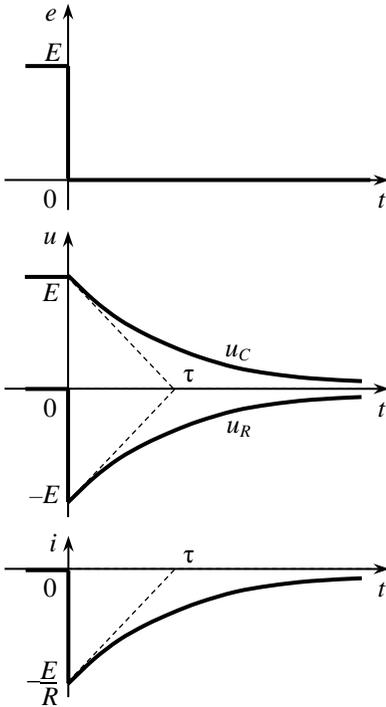


Рис. 9.8

$t = 0$ ключ из положения 1, в котором он находился неограниченно долго, перебрасывается в положение 2, и последовательная RLC -цепь подключается к источнику напряжения с ЭДС E (рис. 9.9). Составим уравнение электрического равновесия цепи после коммутации. Согласно второму закону Кирхгофа

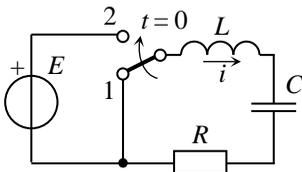


Рис. 9.9

$$u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток в цепи

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = CE \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на сопротивлении R

$$u_R(t) = iR = -E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Временные диаграммы переходных процессов приведены на рис. 9.8.

9.6. Переходные процессы в последовательной RLC -цепи

Рассмотрим переходные процессы при подключении последовательной RLC -цепи к источнику постоянного напряжения. Пусть в момент времени

$$u_L + u_C + u_R = E.$$

С учетом компонентных уравнений это соотношение примет следующий вид:

$$L \frac{di}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + iR = E.$$

Поскольку ключ находился в положении 1 неограниченно долго, то после переброса ключа в положение 2 в цепи будут иметь место нулевые начальные условия, т.е. $i(0) = 0$ и $u_C(0) = 0$. Тогда

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + iR = E. \quad (9.1)$$

Продифференцировав соотношение (9.1) по времени, получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (9.2)$$

Для решения уравнения (9.2) необходимо найти корни характеристического уравнения

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0.$$

Запишем это квадратное уравнение в приведенной форме:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (9.3)$$

Введем обозначения:

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (9.4)$$

где δ – коэффициент затухания;

ω_0 – резонансная частота последовательной RLC -цепи.

С учетом введенных обозначений выражение (9.3) примет вид:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

В зависимости от соотношения δ и ω_0 возможны три ситуации:

- если $\delta > \omega_0$, то корни характеристического уравнения будут различными действительными числами;
- если $\delta < \omega_0$, то корни характеристического уравнения будут сопряженными комплексными числами;
- если $\delta = \omega_0$, то корни характеристического уравнения будут равными действительными числами (кратные корни).

Рассмотрим первый случай, когда $\delta > \omega_0$ или $\omega_0/\delta < 1$. Найдем отношение ω_0/δ с учетом соотношений (9.4):

$$\frac{\omega_0}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{2L}{R} = \frac{2\sqrt{L}}{R} = \frac{2\rho}{R} = 2Q,$$

где ρ и Q – соответственно характеристическое сопротивление и добротность последовательной RLC -цепи.

Отсюда следует, что рассматриваемый случай $\omega_0/\delta < 1$ соответствует низкой добротности последовательной RLC -цепи: $Q < 1/2$.

В общем случае ток в цепи равен сумме принужденного и свободного токов:

$$i = i_{пр} + i_{св}.$$

Принужденный ток, характеризующий установившийся режим в цепи после коммутации, будет равен нулю, так как емкость C представляет собой разрыв цепи для постоянного тока. Свободный ток в цепи при различных корнях характеристического уравнения определяется соотношением:

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (9.5)$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

Для нахождения постоянных интегрирования необходимо иметь два независимых уравнения, связывающих A_1 и A_2 . На основании первого закона коммутации из соотношения (9.5) при $t = 0$ имеем:

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (9.6)$$

Второе уравнение получим, продифференцировав выражение для свободного тока (9.5),

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Из соотношения (9.1) при $t = 0$ находим зависимое начальное условие:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}. \quad (9.7)$$

Приравняв правые части последних двух соотношений, получим второе уравнение для нахождения постоянных интегрирования:

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L}. \quad (9.8)$$

Решая уравнения (9.6) и (9.8) как систему, находим

$$A_1 = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}};$$

$$A_2 = -\frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

С учетом последних соотношений выражение для тока в последовательной RLC -цепи после коммутации можно записать в виде:

$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left[e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right].$$

Экспонента, соответствующая первому корню, затухает медленнее экспоненты, соответствующей второму корню, и результирующий ток будет иметь вид, показанный на рис. 9.10. Как видно из этого рисунка, переходный процесс носит аperiodический характер.

Рассмотрим второй случай, когда $\delta < \omega_0$ и характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни. В этом случае $R < 2\rho$, а добротность $Q > 1/2$.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)}.$$

Введем обозначение

$$\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_{св}, \quad (9.9)$$

где $\omega_{св}$ – **частота свободных колебаний** в последовательной RLC -цепи.

Тогда

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св},$$

где j – мнимая единица.

Поскольку корни характеристического уравнения разные, то свободный ток в последовательной RLC -цепи в рассматриваемом случае определяется соотношением (9.5), постоянные интегрирования в котором

$$A_1 = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} = \frac{E}{j2\omega_{св}L};$$

$$A_2 = -\frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} = -\frac{E}{j2\omega_{св}L}.$$

После подстановки постоянных интегрирования и корней характеристического уравнения в (9.5), выражение для тока в последовательной RLC -цепи после коммутации примет вид:

$$i(t) = \frac{E}{j2\omega_{св}L} \left[e^{-(\delta - j\omega_{св})t} - e^{-(\delta + j\omega_{св})t} \right]$$

Распишем каждую экспоненту в виде произведения экспонент:

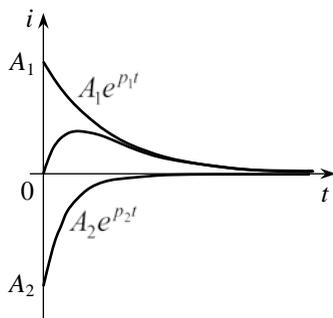


Рис. 9.10

$$i(t) = \frac{E}{j2\omega_{\text{св}}L} \left[e^{-\delta t} e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega_{\text{св}}t} \right]$$

Вынесем за скобку экспоненту $e^{-\delta t}$:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_{\text{св}}L} e^{-\delta t} \frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2j}.$$

Окончательно

$$i(t) = \frac{E}{\omega_{\text{св}}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{св}}t.$$

Таким образом, переходный процесс в последовательной RLC -цепи с добротностью $Q > 1/2$ при подключении к источнику постоянного напряжения имеет колебательный характер. Ток в цепи представляет собой экспоненциально затухающее синусоидальное колебание с частотой $\omega_{\text{св}}$ (рис. 9.11). Частота свободных колебаний $\omega_{\text{св}}$ согласно (9.9) всегда ниже резонансной частоты ω_0 последовательной RLC -цепи.

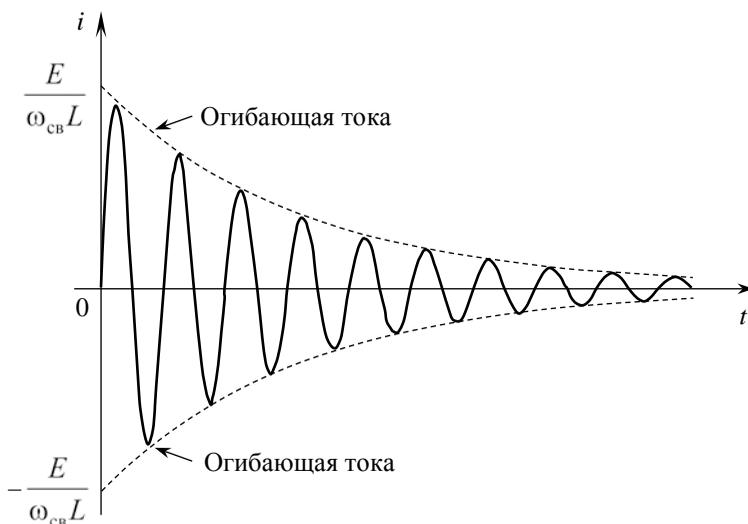


Рис. 9.11

Из соотношения (9.9) следует, что

$$\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_{\text{св}}^2}.$$

Это соотношение представляет собой уравнение окружности с радиусом ω_0 , т.е. корни характеристического уравнения располага-

ются в левой полуплоскости ($\delta < 0$) симметрично относительно действительной оси на полуокружности радиусом ω_0 (рис. 9.12). При $\delta \rightarrow \omega_0$ частота свободных колебаний $\omega_{\text{св}} \rightarrow 0$. При $\delta \rightarrow 0$ частота свободных колебаний $\omega_{\text{св}} \rightarrow \omega_0$.

Скорость затухания синусоидального колебания определяется коэффициентом затухания δ . Величину $\tau = 1/\delta$ называют **постоянной времени последовательной RLC-цепи**. За время τ амплитуда затухающего синусоидального колебания уменьшается в e раз.

Рассмотрим третий случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни $p_1 = p_2 = -\delta$. Общее решение однородного дифференциального уравнения (9.2) при $t \geq 0$ в этом случае имеет вид:

$$i = (A_1 + A_2 t)e^{pt} = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}. \quad (9.10)$$

На основании первого закона коммутации при $t = 0$ получим

$$A_1 = 0.$$

Для определения постоянной интегрирования A_2 найдем производную выражения (9.10):

$$\frac{di}{dt} = -\delta A_1 e^{-\delta t} + A_2 e^{-\delta t} - \delta A_2 t e^{-\delta t}.$$

При $t = 0$ из последнего соотношения имеем

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = A_2.$$

Принимая во внимание зависимое начальное условие (9.7), получим

$$A_2 = \frac{E}{L}.$$

С учетом найденных значений постоянных интегрирования выражение (9.10) для тока в последовательной RLC-цепи примет вид:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}.$$

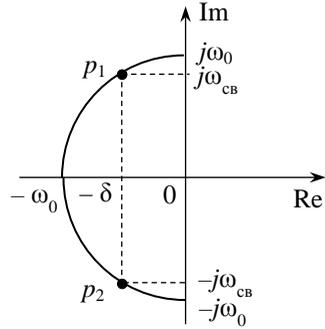


Рис. 9.12

Итак, при $R = 2\rho$ ($Q = 1/2$) переходный процесс в последовательной RLC -цепи носит апериодический характер. Такой предельный режим работы последовательной RLC -цепи на границе апериодического и колебательного переходного процесса называют **критическим режимом**.

Из проведенного анализа следует, что характер переходных процессов в последовательной RLC -цепи зависит от расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Аналогичная зависимость присуща линейным электрическим цепям любого порядка.

10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

10.1. Классификация нелинейных элементов и цепей

Электрическую цепь называют *нелинейной*, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент. Характеристики всех реальных элементов в той или иной степени нелинейны. Однако в ряде случаев нелинейность характеристик реальных элементов можно не учитывать и считать цепь линейной, если нелинейность характеристик приводит лишь к некоторым второстепенным эффектам, которыми в рамках решаемой задачи можно пренебречь. С другой стороны, работа большинства радиоэлектронных устройств основана на использовании нелинейности характеристик реальных элементов. К таким устройствам относятся генераторы гармонических и релаксационных (импульсных) колебаний, выпрямители, модуляторы и демодуляторы, параметрические стабилизаторы напряжения или тока, ограничители напряжения или тока, умножители частоты, преобразователи частоты, перемножители напряжений и многие другие. В этих случаях, когда нелинейность характеристик реального элемента является принципиально необходимой для функционирования устройства, учет нелинейности характеристик неизбежен.

Различают *резистивные* (сопротивления) и *реактивные* (индуктивности, емкости) нелинейные элементы. К резистивным нелинейным элементам относятся многие электровакуумные, ионные и полупроводниковые приборы, широко используемые в радиоэлектронике для усиления и преобразования сигналов. Нелинейной индуктивностью является катушка с ферромагнитным сердечником. Примерами нелинейной емкости могут служить такие приборы, как варикап и варактор.

Нелинейные элементы, характеристики которых отвечают условию $y(x) = -y(-x)$, где x – воздействие, а y – отклик, называют *нелинейными элементами с симметричными характеристиками* (рис. 10.1), а в противном случае – *нелинейными элементами с несимметричными характеристиками* (рис. 10.2). Если у нелинейного элемента с симметричными характеристиками поменять местами выводы, то это никак не повлияет на режим работы цепи. Симметричные характеристики имеют варисторы, бареттеры, симисторы, двухсторонние стабилитроны. Ярво выраженные несимметричные характеристики имеют электровакуумные и полупроводниковые диоды.

Различают **нелинейные элементы с монотонными и немонотонными характеристиками**. У элементов с монотонными характеристиками $\frac{dy}{dx} \geq 0$ (рис. 10.1, 10.2). У элементов с немонотонной характеристикой есть участок характеристики, на котором $\frac{dy}{dx} < 0$ (рис. 10.3, 10.4). Воздействие и отклик нелинейного элемента с немонотонной характеристикой не связаны между собой взаимно однозначной зависимостью.

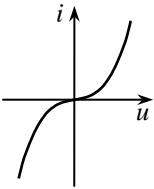


Рис. 10.1

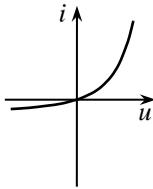


Рис. 10.2

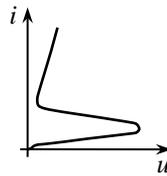


Рис. 10.3

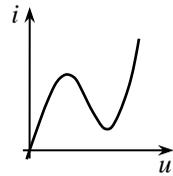


Рис. 10.4

Нелинейные резистивные элементы с немонотонной характеристикой называют **негатронами**, поскольку их вольт-амперная характеристика имеет участок отрицательного сопротивления. Различают **негатроны S-типа и N-типа**. Вольт-амперная характеристика у негатронов S-типа похожа на латинскую букву S (рис. 10.3), а у негатронов N-типа – на латинскую букву N (рис. 10.4). Вольт-амперная характеристика S-типа неоднозначна относительно оси напряжения, а характеристика N-типа неоднозначна относительно оси тока. Наличие участка отрицательного сопротивления свидетельствует о том, что такие элементы могут отдавать энергию в цепь, т. е. они относятся к классу активных элементов. Вольт-амперную характеристику S-типа имеют неоновые лампы, газотроны, однопереходные транзисторы, тиристоры. Характеристику N-типа имеют диоды Ганна, туннельные диоды.

Различают **инерционные и безынерционные резистивные нелинейные элементы**. У инерционных нелинейных элементов при достаточно высокой частоте периодического воздействия нелинейность не проявляется и их вольт-амперные характеристики для мгновенных значений напряжения и тока линейны. У инерционных элементов нелинейной является вольт-амперная характеристика, связывающая действующие значения напряжения и тока. К инерционным нелиней-

ным элементам относится, например, лампа накаливания, сопротивление которой связано с изменением температуры нити.

У безынерционных нелинейных элементов вольт-амперная характеристика нелинейна для мгновенных значений напряжения и тока. При подаче на такой элемент гармонического напряжения ток в нем будет негармоническим. К безынерционным элементам при определенных условиях относятся, например, полупроводниковые диоды и транзисторы.

Следует отметить, что деление реальных элементов на инерционные и безынерционные имеет относительный характер. При низкой частоте воздействия лампу накаливания следует рассматривать как безынерционный элемент, если за период воздействия температура нити успевает существенно измениться. С другой стороны, на высоких частотах становятся существенными инерционные свойства диодов и транзисторов и они уже не могут считаться безынерционными.

Цепи, содержащие хотя бы один резистивный нелинейный элемент и не содержащие реактивных элементов (как линейных, так и нелинейных), называют **резистивными нелинейными цепями**. Процессы в резистивных нелинейных цепях описываются нелинейными алгебраическими уравнениями.

Цепи, содержащие хотя бы один реактивный нелинейный элемент или хотя бы один резистивный нелинейный элемент и хотя бы один реактивный элемент (даже если он линейный), называют **динамическими нелинейными цепями**. Процессы в динамических нелинейных цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Характерной особенностью нелинейных цепей является то, что в них не выполняется принцип наложения. Отсюда следует неприменимость для анализа нелинейных цепей временного метода (метода интеграла наложения), спектрального и операторного методов, в основу которых положен принцип наложения.

10.2. Эквивалентные преобразования цепей с нелинейными сопротивлениями

Рассмотрим цепь (рис. 10.5) из двух последовательно включенных нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 , вольт-амперные характеристики которых приведены на рис. 10.6.

Пусть через сопротивления R_1 и R_2 протекает ток i . Согласно второму закону Кирхгофа напряжение u на зажимах последовательно включенных R_1 и R_2 равно сумме напряжений на каждом из них:

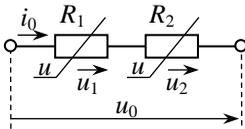


Рис. 10.5

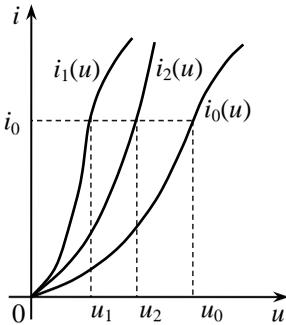


Рис. 10.6

$$u(i) = u_1(i) + u_2(i).$$

Отсюда следует, что два последовательно включенных нелинейных сопротивления могут быть заменены одним нелинейным сопротивлением, вольт-амперная характеристика которого $i(u)$ получается суммированием напряжений $u_1(i)$ и $u_2(i)$ при $i_1 = i_2 = i$ (рис. 10.6).

Очевидно, что таким же образом можно заменить цепь, содержащую произвольное количество последовательно включенных линейных и нелинейных сопротивлений.

Рассмотрим цепь (рис. 10.7) из двух параллельно включенных сопротивлений R_1 и R_2 , вольт-амперные характеристики которых приведены на рис. 10.8.

Пусть к сопротивлениям R_1 и R_2 приложено напряжение u . Согласно первому закону Кирхгофа ток i в общей части параллельно включенных сопротивлений R_1 и R_2 равен сумме токов в каждом из них:

$$i(u) = i_1(u) + i_2(u).$$

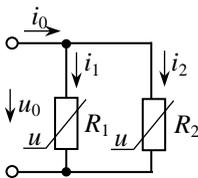


Рис. 10.7

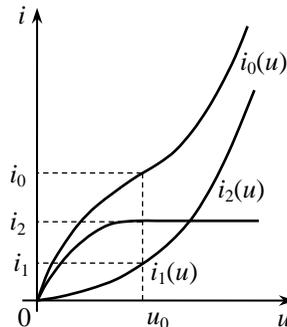


Рис. 10.8

Отсюда следует, что два параллельно включенных нелинейных сопротивления могут быть заменены одним нелинейным сопротивлением, вольт-амперная характеристика которого $i(u)$ получается суммированием токов $i_1(u)$ и $i_2(u)$ при $u_1 = u_2 = u$ (рис. 10.8). Таким же

образом можно заменить цепь, содержащую произвольное количество параллельно включенных линейных и нелинейных сопротивлений.

Если цепь представляет собой смешанное соединение произвольного числа линейных и нелинейных сопротивлений, то ее так же можно свести к одному нелинейному сопротивлению, применяя правила преобразования последовательных и параллельных цепей.

10.3. Расчет нелинейных цепей постоянного тока

Расчет нелинейных цепей постоянного тока обычно сводится к нахождению токов и напряжений на элементах цепи по заданным параметрам независимых источников напряжения и тока.

Рассмотрим цепь (рис. 10.9) из двух последовательно включенных нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 , вольт-амперные характеристики которых приведены на рис. 10.10. Найдем напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 .

Задача может быть решена заменой последовательно включенных нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 одним нелинейным сопротивлением:

- строим вольт-амперную характеристику суммарного сопротивления $i(u)$ (рис. 10.10);
- по построенной вольт-амперной характеристике и заданному значению E находим ток I в цепи;
- зная ток I в цепи, по вольт-амперным характеристикам сопротивлений R_1 и R_2 находим напряжения U_1 и U_2 .

Аналогичным образом может быть рассчитана цепь, содержащая произвольное число последовательно включенных линейных и нелинейных сопротивлений.

Если последовательная нелинейная цепь состоит из двух сопротивлений, то задача может быть решена без построения вольт-амперной характеристики суммарного сопротивления. Начнем с самого простого случая, когда нелинейным является лишь одно сопротивление из двух. Пусть это будет сопротивление R_2 (рис. 10.11).

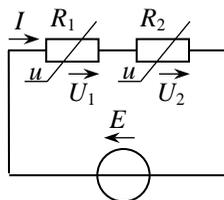


Рис. 10.9

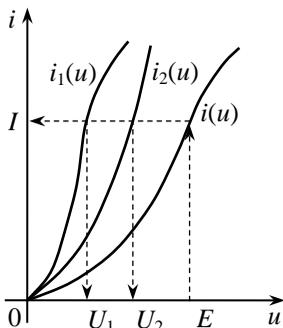


Рис. 10.10

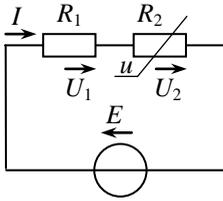


Рис. 10.11

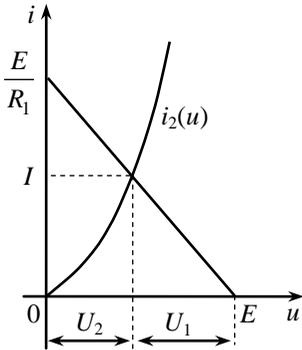


Рис. 10.12

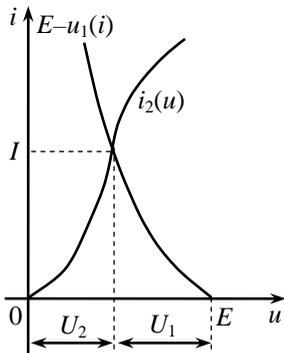


Рис. 10.13

Согласно второму закону Кирхгофа

$$U_2 = E - U_1 = E - IR_1,$$

т. е. зависимость напряжения U_2 от тока I является линейной функцией, график которой представляет собой прямую линию. Построим эту прямую по отрезкам, отсекаемым на осях координат. При токе $I = 0$ напряжение $U_2 = E$. При напряжении $U_2 = 0$ ток $I = E / R_1$. Построенную прямую (рис. 10.12) называют **нагрузочной прямой по постоянному току** (линейное сопротивление R_1 рассматривается как нагрузка нелинейного сопротивления R_2).

Очевидно, что в цепи установится такой ток I , который будет лежать на нагрузочной прямой и на вольт-амперной характеристике нелинейного сопротивления R_2 , т. е. искомые ток I и напряжение U_2 представляют собой координаты точки пересечения нагрузочной прямой с вольт-амперной характеристикой нелинейного сопротивления R_2 . Эту точку называют **рабочей точкой** нелинейного элемента.

К рассмотренной задаче может быть сведен расчет любой цепи, содержащей одно нелинейное сопротивление и произвольное число источников энергии и линейных сопротивлений, для чего достаточно всю внешнюю по отношению к нелинейному сопротивлению цепь заменить эквивалентным источником напряжения.

Очевидно, что изложенную методику можно использовать при расчете последовательной цепи, когда оба сопротивления R_1 и R_2 являются нелинейными. В этом случае ток I и напряжение U_2 можно найти как координаты точки пересечения вольт-амперной характеристики нелинейного сопротивления R_2 с **нагрузочной кривой** $u_2 = E - u_1(i)$ (рис. 10.13).

10.4. Нелинейное сопротивление при произвольном воздействии

Пусть к нелинейному сопротивлению, имеющему вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 10.14, приложено напряжение $u(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$, представляющее собой сумму постоянной составляющей U_0 и переменной гармонической составляющей $U_m \sin \omega t$. Напряжение U_0 называют **напряжением смещения**. Напряжение смещения задает рабочую точку на вольт-амперной характеристике нелинейного сопротивления. Нас будет интересовать форма тока в нелинейном сопротивлении.

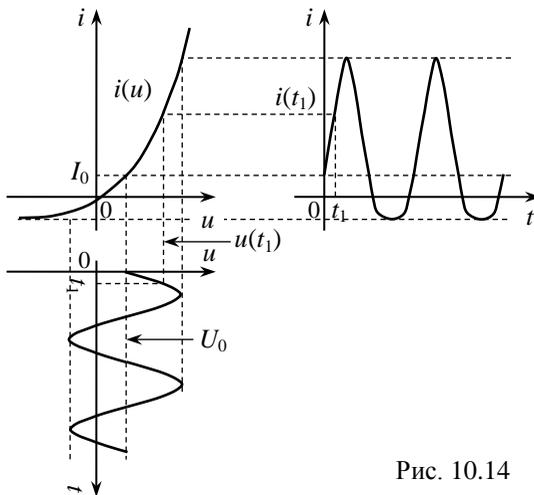


Рис. 10.14

Форму тока в нелинейном сопротивлении можно построить по точкам. Чтобы построить мгновенное значение тока в момент времени t_1 , необходимо по временной диаграмме напряжения найти мгновенное значение напряжения $u_1 = u(t_1)$ и спроецировать это значение на вольт-амперную характеристику нелинейного сопротивления. Полученное значение тока $i_1 = i(t_1)$ следует перенести в систему координат время – ток и построить точку с координатами (t_1, i_1) .

Если выполним такие построения для достаточно большого числа моментов времени и соединим построенные точки плавной кривой, то получим временную диаграмму тока в нелинейном сопротивлении. При увеличении числа точек точность построений будет повышаться.

Как видно из рис. 10.14, ток в сопротивлении будет периодической функцией той же частоты, но иной формы. Если переменная составляющая напряжения была гармонической, то переменная составляющая тока будет негармонической, а следовательно, содержит высшие гармоники.

Искажения формы тока, обусловленные нелинейностью вольт-амперной характеристики сопротивления называют **нелинейными искажениями**. Нелинейные искажения формы гармонического колебания количественно оценивают **коэффициентом гармоник**

$$k_r = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_{nm}^2}}{I_{1m}}.$$

где n – номер гармоники;

I_{1m} – амплитуда первой гармоники тока;

I_{nm} – амплитуда n -й гармоники тока.

Если бы вольт-амперная характеристика сопротивления была линейной, то числитель последнего выражения был бы равен нулю и коэффициент гармоник $k_r = 0$. Чем нелинейнее вольт-амперная характеристика сопротивления, тем больше нелинейные искажения и коэффициент гармоник.

Характерные особенности нелинейных искажений:

- зависимость от амплитуды воздействия: чем больше амплитуда воздействия, тем больше искажения;
- в общем случае постоянная составляющая тока зависит от амплитуды воздействия и не равна току I_0 в рабочей точке. Эти токи будут равны только в том случае, если вольт-амперная характеристика нелинейного сопротивления будет симметрична относительно рабочей точки.

Рассмотренный метод нахождения отклика нелинейной цепи называют **методом проекций**. Мы рассмотрели метод проекций при воздействии напряжения $u(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$, но очевидно, что метод проекций применим при произвольном воздействии.

В электронике часто встречается режим работы нелинейного элемента, когда переменная составляющая напряжения на нем столь мала ($U_m \ll U_0$), что всеми высшими гармониками тока можно пренебречь и ограничиться рассмотрением только первой гармоники. Это означает, что реальную вольт-амперную характеристику нелинейного элемента в некоторой окрестности рабочей точки можно заменить касательной. Эту процедуру называют **линеаризацией** вольт-амперной

характеристики, а такой режим работы нелинейного элемента – **режимом малого сигнала**. В противном случае, когда линеаризация вольт-амперной характеристики становится невозможной, режим работы нелинейного элемента называют **режимом большого сигнала**.

В режиме малого сигнала переменные составляющие напряжения и тока связаны между собой дифференциальным сопротивлением $r = du/di$. Нелинейность цепи в режиме малого сигнала проявляется в том, что дифференциальное сопротивление r зависит от выбора рабочей точки.

Анализ нелинейной цепи в режиме малого сигнала проводят в два этапа. На первом этапе выполняют анализ цепи по постоянному току, в результате которого находят постоянные напряжения и токи, действующие в цепи. На втором этапе выполняют анализ цепи по переменному току, при этом нелинейные резистивные элементы заменяют их дифференциальными сопротивлениями (или проводимостями) в рабочей точке. Очевидно, что схема замещения цепи по переменному току будет линейной. В результате второго этапа находят переменные составляющие напряжений и токов, действующих в цепи.

Рассмотренный метод анализа нелинейной цепи в режиме малого сигнала называют **методом линеаризации в малом** или просто **методом линеаризации**.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов В.П. Основы теории цепей : учебник для вузов / В.П. Попов. – 6-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2007. – 575 с.
2. Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. И. Атабеков. – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2006. – 432 с.
3. Баскаков С.И. Лекции по теории цепей : учеб. пособие / С.И. Баскаков. – 4-е изд. – М. : КомКнига, 2005. – 280 с.
4. Новиков Ю.Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа : учеб. пособие / Ю.Н. Новиков. – СПб. : Питер, 2005. – 384 с.
5. Новгородцев А.Б. Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие / А.Б. Новгородцев. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 576 с.
6. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для студентов вузов / Л.А. Бессонов. Изд. 11-е, испр. и доп. – М. : Гардарики, 2006. – 701 с.
7. Бакалов В.П. Основы анализа цепей : учеб. пособие для вузов / В.П. Бакалов, О.Б. Журавлёва, Б.И. Крук. – М. : Горячая линия – Телеком: Радио и связь, 2007. – 591 с.
8. Бычков Ю.А. Основы теории электрических цепей : учебник для вузов / Ю.А. Бычков, В.М. Золотницкий, Э.П. Чернышев. – СПб. : Лань, 2002. – 464 с.
9. Кузовкин В.А. Теоретическая электротехника : учебник / В.А. Кузовкин. – М. : Логос, 2002. – 480 с.
10. Бакалов В.П. Основы теории цепей : учебник для вузов / В.П. Бакалов, В.Ф. Дмитриков, Б.И. Крук; под ред. В.П. Бакалова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 2000. – 592 с.
11. Бакалов В.П. Теория электрических цепей : учебник для вузов / В.П. Бакалов, П.П. Воробиенко, Б.И. Крук; под ред. В.П. Бакалова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1998. – 444 с.
12. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей : учебник для вузов / А.К. Лосев. – М. : Высш. шк., 1987. – 512 с.
13. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники : курс лекций / В.А. Прянишников. – СПб. : КОРОНА принт, 2000. – 368 с.
14. Крылов В.В. Основы теории цепей для системотехников : учеб. пособие для вузов / В.В. Крылов, С.Я. Корсаков. – М. : Высш. шк., 1990. – 224 с.

15. Бирюков В.Н. Сборник задач по теории цепей : учеб. пособие для радиотех. спец. вузов / В.Н. Бирюков, В.П. Попов, В.И. Семенов; под ред. В.П. Попова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1998. – 254 с.
16. Лосев А.К. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособие для вузов / А.К. Лосев, Ю.М. Зиёмелис. – М. : Высш. шк., 1989. – 270 с.
17. Воробиенко П.П. Теория линейных электрических цепей. Сборник задач и упражнений : учеб. пособие для вузов / П.П. Воробиенко. – М. : Радио и связь, 1989. – 328 с.

Учебное издание

Виталий Александрович **Матвиенко**

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

Подписано в печать 25.01.2016

Формат 60×84 1/16

Бумага писчая

Печать офсетная

Усл. печ. л. 10,12

Тираж 100 экз.

Заказ 5558

ООО «Издательство УМЦ УПИ»

620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.

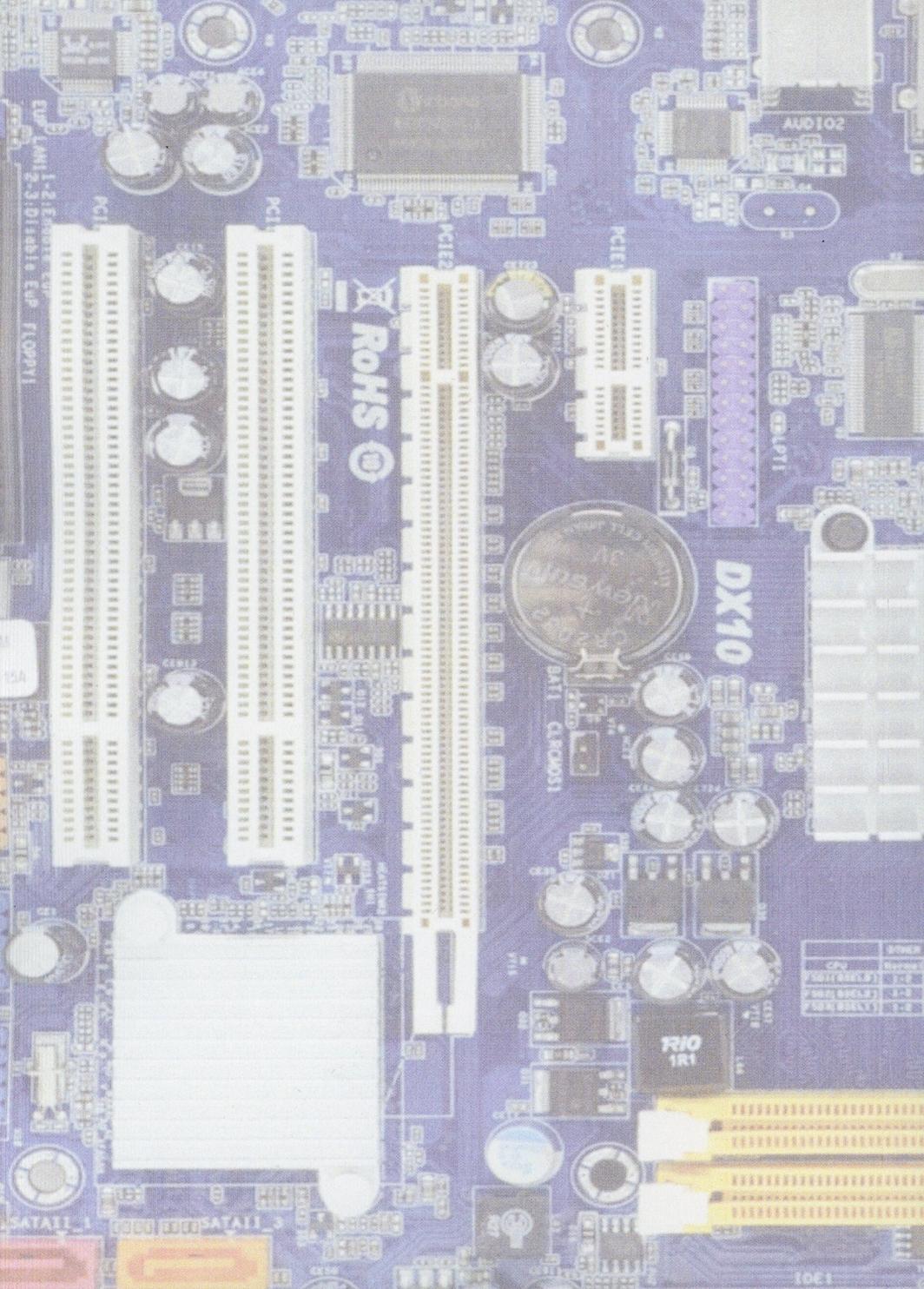
Тел.: (343) 362-91-16; факс: (343) 362-91-17

E-mail: 3629116@mail.ru

Отпечатано в типографии

ООО «Издательство УМЦ УПИ»

620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.



AU102

CPU: AMI 1-2: Enable CUP
AMI 2-3: Disable CUP FLOPPY

Rohs

DX10
1R0 1R1

Part No.	Qty	Desc
1R0 1R1	1	1R0 1R1
1R0 1R1	1	1R0 1R1
1R0 1R1	1	1R0 1R1

SATA1_1

SATA1_3

1001