**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КР**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.И.РАЗЗАКОВА**

**Кызыл-Кийский филиал**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Методические указания к практическим занятиям по выполнению**

**расчетно-графических и студенческих**

**научно-исследовательских работ**

Приводятся общие вопросы теории, решения типовых задач в упругой постановке и в стадии развития пластических деформаций вплоть до исчерпания несущей способности.

Определяются реальные коэффициенты запаса прочности, и на этой основе делается вывод о дополнительных резервах нагружения.

Приводимые примеры соответствуют типовым задачам, выдаваемым студентам технических специальностей вузов.

Оглавление

|  |  |
| --- | --- |
| Предисловие | 5 |
| **Глава 1. Общие сведения** | 6 |
| * 1. Общие понятия | 6 |
| * 1. Общие принципы расчета | 9 |
| **Глава 2. Растяжение и сжатие** | 10 |
| 2.1. Общие вопросы и расчетные формулы | 10 |
| 2.2. Проектирование растянутого или сжатого бруса | 13 |
| 2.3. Расчет при развитии пластических деформаций (по предельному состоянию) | 18 |
| 2.4. Расчет статически неопределимой стержневой системы | 19 |
| 2.5. Расчет по методу предельных состояний | 23 |
| **Глава 3. Геометрические характеристики плоских сечений** | 25 |
| 3.1. Общие понятия и расчетные формулы | 25 |
| 3.2. Главные оси и главные моменты инерции | 27 |
| 3.3. Графическое представление моментов инерции | 29 |
| 3.4. Проектирование составного сечения | 30 |
| 3.4.1.Аналитическое решение для составного сечения из уголка и швеллера | 31 |
| 3.4.2. Графическое решение | 34 |
| **Глава 4. Расчеты на кручение** | 37 |
| 4.1. Общие понятия | 37 |
| 4.2. Напряжения при кручении брусьев круглого сплошного и кольцевого сечений | 38 |
| 4.3. Определение перемещений | 39 |
| 4.4. Расчет вала на прочность и жесткость | 40 |
| 4.4.1. Расчет на прочность | 40 |
| 4.4.2. Расчет на жесткость | 41 |
| 4.5. Исследование работы вала с учетом пластических деформаций | 43 |
| 4.6. Пример расчета вала | 43 |
| 4.7. Расчет по предельному состоянию | 47 |
| **Глава 5. Изгиб** | 48 |
| 5.1. Основные понятия | 48 |
| 5.2. Внутренние силовые факторы при изгибе и построение их эпюр | 50 |
| 5.3. Дифференциальные зависимости между *Qу*, *Mx* и *q*. | 51 |
| 5.4. Напряжения при изгибе | 54 |
| 5.4.1. Чистый изгиб | 54 |
| 5.4.2. Поперечный изгиб | 56 |
| 5.5. Расчеты на прочность при изгибе | 58 |
| 5.6. Перемещения при прямом изгибе | 61 |
| 5.7. Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование | 62 |
| 5.8. Универсальное уравнение упругой линии балки | 63 |
| 5.9. Исследование работы балки с учетом пластических деформаций | 66 |
| 5.10. Расчет статически определимой консольной балки | 69 |
| 5.11. Расчет статически определимой двухопорной балки с консолью | 73 |
| 5.11.1. Исследование работы балки с учетом развития пластических деформаций | 79 |
| **Глава 6. Расчет статически неопределимых балок и рам** | 80 |
| 6.1. Основные понятия | 80 |
| 6.2. Потенциальная энергия бруса в общем случае нагружения | 83 |
| 6.3. Интеграл Мора | 84 |
| 6.4. Способ Верещагина | 85 |
| 6.5. Канонические уравнения метода сил | 86 |
| 6.6. Расчет статически неопределимой балки | 89 |
| 6.7. Расчет статически неопределимой рамы | 96 |
| 6.7.1. Исследование работы рамы с учетом развития пластических деформаций | 102 |
| **Глава 7. Устойчивость сжатых стержней** | 103 |
| 7.1. Расчет сжатых стержней на устойчивость | 103 |
| 7.2. Дополнительные указания к расчетам на устойчивость | 108 |
| 7.3. Расчет сжатых стержней на устойчивость по коэффициентам продольного изгиба | 110 |
| 7.4. Расчет составной стойки | 112 |
| **Глава 8. Расчеты на действие ударных нагрузок** | 119 |
| 8.1 Определение напряжений и перемещений при ударе | 119 |
| 8.2. Расчеты на удар при изгибе | 121 |
| Список рекомендуемой литературы | 126 |
| Приложения | 127 |

**1. ПРЕДИСЛОВИЕ**

Курс сопротивления материалов занимает одно из ведущих мест в учебных планах инженерных специальностей вузов.

Несмотря на то, что по данному курсу имеется большое количество учебной и вспомогательной литературы, в последнее время стал ощущаться дефицит по части обеспечения учебного процесса краткими учебниками и учебными пособиями. Особенно это касается вопросов решения конкретных задач, связанных с самостоятельным выполнением расчетно-графических работ и введением в них элементов исследовательского характера. Этот пробел мы постарались восполнить таким образом, что в начале каждой главы приводятся теоретические сведения, а затем решение типовых задач, в каждой из которых имеются дополнительные разделы исследовательского характера, формирующие у студентов широкое инженерное мышление. Эти вопросы, как нам представляется, могут носить факультативный характер, и предназначены для студентов, интересующихся научными исследованиями по линии студенческих научных работ, а также специалистов, занимающихся вопросами обеспечения прочности конструкций.

Электронный вариант пособия может быть использован для самостоятельного изучения курса, применения мультимедийных средств обучения и решения типовых задач, как студентами очного отделения, так и заочного (дистанционного) обучения.

Пособие состоит из 8 глав, каждая из которых подкреплена решением конкретной задачи. Приводится расширенное условие с вопросами, включающими исследование работы конструкции за пределом упругости, определения предельных нагрузок и выявления возможностей дополнительного нагружения, обязательных выводов и заключений по работоспособности конструкции.

Автор приносит благодарность Марковской О.Е. за компьютерный набор, редактирование и оформление текста.

**Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ**

**1.1. Общие понятия**

Сопротивление материалов – наука о прочности и жесткости элементов инженерных конструкций.

Задачей сопротивления материалов является обеспечение безопасной и долговечной работы как существующих, так и вновь проектируемых конструкций.

Вводятся понятия, связанные с решением указанных задач.

К ним относятся:

1. Расчетная схема – реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, не влияющих на прочность конструкции.
2. Строение материала – сплошность, изотропность. Материал в реальной конструкции имеет сплошное строение, и его свойства не зависят от выбранного направления. В противном случае это оговаривается специально (анизотропность).
3. Деформируемость материала конструкции под действием внешнего воздействия.
4. Классификация элементов конструкции на составные части – брус, пластинка, оболочка, массив.
5. Материал занимает весь объем, занимаемый рассчитываемым элементом.

Вводятся также понятия, связанные с внешним воздействием:

1. Силы внешние – результат взаимодействия рассматриваемого объекта с другими телами вне связи с ними.

Подразделяются на:

*F*  – сосредоточенные, условно прикладываемые в точке;

*q*  – распределенные по длине (погонные усилия) или распределенные по площадке ;

*М*  – сосредоточенный момент;

*m*  – распределенный по длине момент;

А [м2]– площадь поперечного сечения.

2. Силы внутренние – результат взаимодействия одной части тела с другой при его условном рассечении. Эти силы в зависимости от характера действия обозначаются:

*N*  – продольные,

*Q*  – поперечные,

*Мz = М*кр  – крутящие моменты,

*Мх*, *Му*  – изгибающие моменты.

В инженерных задачах внутренние силы обычно определяются с использованием метода сечений или задаются и в каждом случае принимается определенное правило знаков.

3. Напряжения – мера внутренних сил, приходящихся на единицу площади сечения. Различают:

 – нормальные напряжения, т. е. действующие по нормали к сечению;

 – касательные напряжения, т. е. действующие в плоскости сечения.

Для них, так же, как и для внутренних сил, вводится определенное правило знаков.

4. Деформации – мера изменения формы тела.

ε [безразмерная] – относительная продольная, связанная с σ;

γ [рад] – угловая, связанная с τ.

5. Перемещения – изменение линейного положения точек тела в результате деформации.

Δ*l* [м, мм]-изменение линейного положения точки -абсолютная деформация.

Между ε и Δ*l* существует связь: , где *l* – линейный размер.

Связь между внешними, внутренними силами и напряжениями вполне определенна. Величина внутренних сил и напряжений напрямую зависит от величины внешней силы.

Внутренние силы, через внешние, определяются методом сечений с использованием уравнений равновесия статики, рассматриваемых в курсе теоретической механики.

6. В сопротивлении материалов рассматриваются деформации несоизмеримо малые (малые деформации), по сравнению с размерами элемента конструкции. Малость деформаций предполагает их упругость, т. е. после снятия нагрузки деформации полностью исчезают.

Это положение, в свою очередь, позволяет использовать принцип независимости действия сил, т. е. результирующее воздействие от системы сил можно определить как сумму воздействий от каждой силы в отдельности, что существенно упрощает решение задачи.

Принцип независимости действия сил вытекает из закона Гука, согласно которому перемещения (деформации) прямо пропорциональны действующим силам и вызываемым ими напряжениям.

Эта связь является линейной функцией и обозначает увеличение перемещений при увеличении усилий.

Подробнее эти вопросы будут отражены при рассмотрении отдельных видов нагружения.

Как и в любой другой науке, в сопротивлении материалов все исследуемые объекты представляются в виде совокупности простейших составляющих.

Закономерности, полученные путем такого дробления, распространяются на объект в целом, и затем эта закономерность, получив экспериментальное подтверждение, используется в инженерной практике.

В сопротивлении материалов дробление любого сложного нагружения приводит к следующим простейшим случаям нагружений: растяжению или сжатию, сдвигу или срезу, кручению, изгибу, потере устойчивости, а также комбинации этих нагружений применительно к простейшей конструкции – брусу. К этим задачам добавляются динамические задачи.

**1.2. Общие принципы расчета**

Основная цель расчета инженерной конструкции – удовлетворение требований прочности и надежности с возможно минимальным расходом материала.

Эти задачи решаются выбором метода расчета. Наиболее распространенным методом расчета в машиностроении является расчет по напряжениям. Согласно этому методу критерием надежности конструкции является напряжение или напряженное состояние в точке.

Схема расчета выглядит следующим образом: на основе анализа работы конструкции выявляется точка в ней, где возникают наибольшие напряжения, затем эти напряжения сравниваются с предельной величиной для данного материала конструкции, которые в свою очередь получаются на основе лабораторных испытаний.

На основе такого сравнения делается заключение о прочности конструкции.

Совершенно очевидно, что сравнение напряжений в одной точке, хотя и наиболее «опасной», не позволяет однозначно оценить прочность конструкции. Всегда будет возникать вопрос, а насколько это опасно, имеется ли дальнейший резерв нагружения, а что будет, если предельные напряжения возникнут не в одной точке, а допустим, в определенном объеме тела?

Эти вопросы носят исследовательский характер и ответ на них, в данном пособии позволяет более точно оценить работоспособность конструкции и выбрать такие параметры, которые сделают ее более рациональной и менее материалоемкой.

В разрезе поставленных выше вопросов, в пособии приводятся решения задач в классической - упругой постановке, и исследование их же с учетом развития неупругих, пластических деформаций, вплоть до исчерпания несущей способности, причем во всех задачах материал считается идеально пластичным с диаграммой Прандтля. Упрочнение материала не учитывается.

А истина будет лежать где-то между ними, и зависеть от потребностей практики и интеллекта инженера.

**Глава 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

**2.1. Общие вопросы и расчетные формулы**

Растяжением или сжатием называется вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только одно внутреннее усилие - продольная сила *N*.

Внутренние силы определяются по методу сечений, как проекции всех сил на продольную ось бруса *z*:

.

Правило знаков: если сила направлена от сечения (растяжение), она берется со знаком «+», если к сечению (сжатие) – со знаком «–».

Расчетные формулы при сжатии отличаются от растяжения знаком.

При растяжении и сжатии в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения «σ», причем , где – *N* продольная сила, *А* – площадь поперечного сечения. Эта формула справедлива для однородного напряженного состояния, т. е. когда напряжения распределены внутри тела равномерно.

В наклонных сечениях действуют напряжения «*р*», которые раскладываются на нормальные σ = *р* cosα и касательные τ = *р* sinα, где α– угол наклона сечения к продольной оси бруса.

При растяжении и сжатии продольные и поперечные размеры бруса изменяются, причем: Δ*l = l*1 – *l* [м],

где Δ*l* – абсолютное удлинение при растяжении или абсолютное укорочение при сжатии;

*l* – начальная длина бруса;

*l*1 – конечная длина бруса,

а Δ*а = а*1 – *а* [м], где Δ*а* – абсолютное сужение поперечного размера при растяжении или абсолютное расширение при сжатии.

Этим перемещениям Δ*l* и Δ*а* соответствуют:

 [безразмерное] – относительное удлинение или укорочение,

 [безразмерное] – относительное сужение или расширение,

Отношение  – коэффициент Пуассона, физическая величина, определяемая экспериментально и характеризующая способность материала получать поперечные деформации.

Экспериментами установлено, что для различных материалов при различных условиях нагружения 0 ≤ μ ≤ 0,5.

При μ = 0 материал остается абсолютно жестким, недеформируемым.

При μ = 0,5 материал (например, конструкционная сталь) течет.

Для стали Ст. 3 в условиях упругих деформаций μ = 0,25÷0,33, в условиях пластических деформаций μ = 0,5.

Для чугуна μ = 0,23÷0,27, а пластических деформаций чугун не испытывает.

При малых упругих деформациях между σ и ε существует линейная зависимость, называемая законом Гука:

,

где *Е* [Па] – модуль продольной упругости, характеризующий способность материала сопротивляться действию продольной нагрузки. Является, как и μ, физической характеристикой материала и определяется экспериментально.

Например, для сталей *Е* = (1,87÷2,16)⋅105 МПа, для чугунов

*Е* = (0,8÷1,6)⋅105 МПа. Для упрощения расчетов обычно принимают для сталей *Е* = 2⋅105 МПа, для чугунов *Е* = 1,2⋅105 МПа.

Для других материалов величина *Е* приводится в справочниках.

Размерность *Е* та же, что и у σ – Па, МПа.

Подставляя значения σ и ε в закон Гука, получим другую форму этого закона:

,

где *EА* – жесткость бруса при растяжении и сжатии.

Для расчета растянутых и сжатых брусьев на прочность используется условие прочности, согласно которому действующие или расчетные напряжения сравниваются с допускаемыми для данного материала значениями напряжений, которые обозначаются [σ]. Это условие имеет вид:

**.**

Величина  назначается для различных материалов и условий эксплуатации конструкции из соотношения  ****,

где  – предельное напряжение, достижение которого в конструкции недопустимо из соображений безопасности;

*п>1* – коэффициент запаса, назначаемый в зависимости от материала и условий эксплуатации.

Для определения предельных напряжений  образцы из различных материалов подвергают испытаниям.

Условно все материалы подразделяются на пластичные – когда материал может получать большие остаточные деформации, не разрушаясь, и хрупкие – когда материал разрушается без образования заметных остаточных деформаций.

Для пластичных материалов предельным напряжением будет σ*Т* – предел текучести, чтобы избежать в работающей конструкции образования заметных остаточных деформаций принимают , тогда ,

где *пТ* – коэффициент запаса по пределу текучести.

Для хрупких материалов предельным напряжением будет σвр – предел прочности, т. е. , тогда ,

где *п*вр – коэффициент запаса по пределу прочности.

*пТ* и *п*вр обычно нормируются в зависимости от назначения конструкции.

Достижение напряжениями предельных значений σ*Т* и σвр в отдельных точках нагруженного тела еще не означает исчерпания несущей способности и, как правило, приводит к перераспределению усилий, а конструкция продолжает воспринимать нагрузку. Поэтому расчет можно вести также по предельному состоянию (предельной нагрузке).

Расчеты по предельным состояниям приводятся далее на конкретных примерах.

Кроме вышесказанного, в зависимости от количества наложенных связей конструкции делятся, на статически определимые и статически неопределимые. Они различаются тем, что в первых все реакции связей определяются из уравнений статики, а во вторых число неизвестных, подлежащих определению, больше числа уравнений статики и в качестве дополнительных составляются уравнения деформации системы. Как это делается, показано на примерах.

**2.2. Проектирование растянутого или сжатого бруса**

Статически неопределимый стальной ступенчатый брус находится под действием продольных сил (рис. 1).

Необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость.
2. Построить эпюры продольных сил *N*, нормальных напряжений σ и перемещений Δ*l*.
3. Исходя из условия прочности по методу допускаемых напряжений вычислить размеры сечений *Аi* на каждом участке, выразив их через силу *F* и допускаемые напряжения .
4. Дать чертеж бруса с указанием вычисленных размеров «*Ai*» в условном масштабе.
5. Факультативно. Произвести расчет этого же бруса по методу предельных состояний и определить суммарный запас прочности, если материал бруса имеет диаграмму идеальной пластичности с σ*Т* = 240 МПа и [σ] = 160 МПа.

Порядок решения

1. Вычертить в условном масштабе расчетную схему по исходным данным.

2. Обозначить на схеме опорные реакции, подлежащие определению.

3. Составить уравнения статического равновесия  и совместности деформаций .

4. Определить опорные реакции.

5. Проверить соответствие расчетной схеме.

6. Записать выражения для продольных сил , используя правило знаков: если сила направлена от сечения – знак «+», если к сечению – знак «–».

7. По вычисленным значениям  построить эпюру продольных сил в долях *Р*.

8. Вычислить напряжения на каждом участке, используя формулу , выражая их в долях *F* и *Ai*.

9. По вычисленным значениям построить эпюру σ*i*.

10. Записать выражения для перемещений, используя закон Гука, причем .

11.По вычисленным значениям построить эпюру Δ*li*, выразив их в долях , *li*, *EAi*.

12. Используя условие прочности по методу допускаемых напряжений , определить безопасные площади сечений *Аi* на каждом участке, не подставляя значения *F*, [σ].

13. Дать эскиз бруса в условном масштабе с указанием *Ai* в долях *F* и [σ].

14. Произвести расчет того же бруса с учетом развития пластических деформаций, для этого:

14.1. Проанализировать порядок перехода в пластическое состояние того или иного участка при увеличении нагрузки при условии .

14.2. Определить усилие , при котором в пластическое состояние переходит наиболее нагруженный участок.

14.3. Выявить условие перехода в пластическое состояние следующего участка при условии .

14.4. Определить усилие , при котором следующий участок переходит в пластическое состояние.

14.5. Сформулировать условие наступления предельного состояния.

14.6. Определить предельную нагрузку на конструкцию *F*пред, при условии исчерпания несущей способности.

14.7. Определить коэффициент запаса по предельному состоянию по условию .

14.8. Определить общий (суммарный) коэффициент запаса с учетом запаса по методу допускаемых напряжений и *п*пред: , при заданных по условию σ*Т* и [σ].

14.9. Сформулировать вывод.

Решение

1. Раскроем статическую неопределимость. Условие равновесия бруса по рис. 1.1. имеет вид:

, или .

Задача один раз статически неопределима, т. к. уравнение равновесия включает две неизвестные реакции *RA* и *RB*.

Для составления дополнительного уравнения составим условие деформации системы.

Так как оба конца бруса закреплены (рис. 1.1), то



или, используя закон Гука, получим:

.

Или *RA =* 2,8*F*; *RB* = 1,2*F*.

2. Построим эпюры:

2.1. Продольных сил (рис. 1.2)

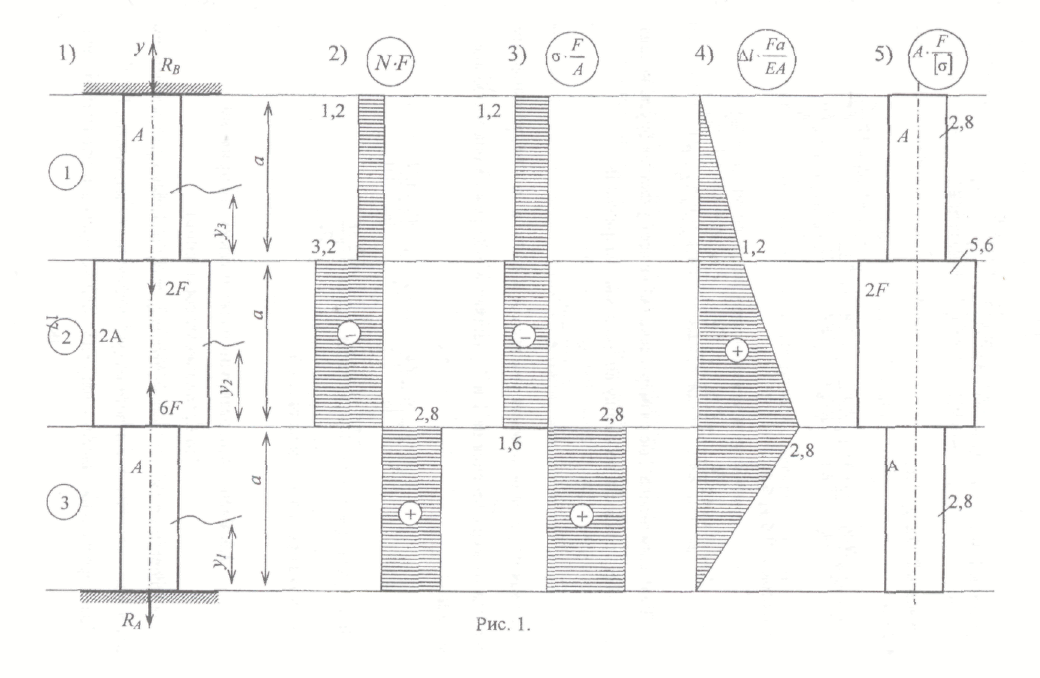
 – растяжение.  – сжатие.

 – сжатие.

2.2. Нормальных напряжений (рис. 1.3)

 – растяжение.  – сжатие.

 – сжатие.



2.3. Продольных перемещений Δ*l* (рис. 1.4)

;

участок 1. ; 

участок 2. ;



участок 3. ;



3.Вычислим безопасные размеры сечений на всех участках бруса, исходя из условия прочности по методу допускаемых напряжений:

.

Так как по условию сечения участков , а , то вычислим сначала размеры сечения на 1 и 3 участках и выберем из них наибольшее значение:

; .

Выбираем . Тогда .

4. Эскиз бруса показан на рис. 1.5.

**2.3. Расчет при развитии пластических деформаций**

**(по предельному состоянию)**

Из эпюра σ на рис. 1.3 видно, что σmax = σ1, поэтому при постепенном росте нагрузки первым в пластическую стадию перейдет участок 1.

Для определения значения нагрузки, при котором это произойдет, приравняем σmax = σ1 = , отсюда .

Дальнейшее увеличение нагрузки не приведет к увеличению , а усилия на участках 2 и 3 будут увеличиваться.

Решая задачу о равновесии участков 2 и 3, находящихся еще в упругой стадии под действием силы , найдем



.

Как видим σ3 > σ2, следовательно, следующим перейдет в пластическую стадию участок 3, при нагрузке, определяемой из условия  или, подставляя значение , найдем: .

Таким образом, предельное состояние системы наступит тогда, когда будет исчерпана несущая способность системы или когда два участка 1 и 3 будут находиться в пластически деформированном состоянии, а средний участок 2, находясь между ними, не встретит возрастающего сопротивления перемещению.

Предельная нагрузка при этом найдется как сумма нагрузок:

.

Запас прочности системы, по сравнению с , будет:

.

Суммарный запас прочности с учетом метода допускаемых напряжений будет больше на величину отношения :

.

**2.4. Расчет статически неопределимой стержневой системы**

Абсолютно жесткий брус подвешен на двух тягах и опирается на опору или подвешен на трех тягах и находится под действием силы *F*.

Требуется:

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через действующую нагрузку *F*.
2. Найти допускаемую нагрузку *F*доп и коэффициент запаса *п*1, используя метод допускаемых напряжений, приняв σт = 240 МПа и [σ] = 160 МПа.
3. Найти предельную нагрузку *F*пред, используя метод предельных состояний.
4. Найти полный коэффициент запаса (резерв нагружения) с использованием метода предельных состояний.

Порядок решения.

* 1. По данным своего варианта начертить в условном масштабе расчетную схему.
  2. Рассечь тяги, на которых подвешен брус, и указать неизвестные усилия в тягах.
  3. Составить уравнение равновесия системы:

3.1. В случае опирания на опору это уравнение будет 

(т. к. реакции в опоре в решении задачи не участвуют).

3.2. В случае подвески на трех тягах использовать два уравнения равновесия:  и .

* 1. Недостающее уравнение составить, используя условие деформации системы и закон Гука .
  2. Решая совместно все уравнения найти усилия в тягах , выразив их через нагрузку *F*.
  3. Определить напряжения в тягах .
  4. Сравнивая значения напряжений, найти σmax.
  5. Используя метод допускаемых напряжений , при заданном  и площади сечения тяги *A* найти допускаемую нагрузку *F*доп и коэффициент запаса *п*1 при этом методе.
  6. Перебирая варианты перехода системы в предельное состояние найти *F*пред.
  7. Сравнивая *F*пред с *F*доп, найти коэффициент запаса или дополнительный резерв нагружения .

Полный коэффициент запаса .

* 1. Сформулировать вывод.

Абсолютно жесткий брус *АС* подвешен на трех параллельных стержнях (рис. 2, а). Стержни стальные, площади сечений соответственно равны *A* , 2*A* и 1,5*A*.

Решение

1. Рассечем стержни и приложим в сечениях продольные силы ,  и  (рис.2, б).

Составим уравнения равновесия балки *АС*:

,

.

В этих уравнениях три неизвестные величины: ,  и , а уравнений статики только два. Следовательно, задача один раз статически неопределима.

Для ее решения необходимо составить одно уравнение перемещений. Для этого предположим, что в результате действия силы *F* балка *АС* опустится и займет положение  (рис. 2, *б*). Вследствие абсолютной жесткости балки нижние шарниры стержней расположатся на одной прямой, и таким образом,

*l*1=2м

*F =* 91кН

*b*=1,5м

*а* = 2,5м

*l*2=1,5м

*L*

*K*

*D*

*A*

*B*

*C*

*A*

2*A*

1,5*A*

*A*

*B*

*C*

*F*

*NC*

*NB*

*NA*

*C*2

*C*1

*B*2

*B*1

*A*1

Δ*l*1

Δ*l*2

Δ*l*3

*а*)

*б*)

Рис. 2

стержень *AD* получит удлинение , стержень *ВК* – удлинение  и стержень *CL* – удлинение .

Далее через точку *А*1 проведем прямую *А*1*С*2, параллельную оси балки

*АС* (до ее нагружения), и рассмотрим подобные треугольники *А*1*С*2*С*1 и *А*1*В*2*В*1. Из подобия этих треугольников следует, что

. (1)

Но



Точно так же



Подставив полученные значения *С*1*С*2 и *В*1*В*2 в равенство (1), получим

. (2)

На основании закона Гука:



следовательно,

.

После подстановки значений  и  и алгебраических преобразований получим: .

Решая полученное уравнение совместно с уравнениями равновесия, находим



2. Определяем напряжения в стержнях



Сравнивая, найдем:

σ*В* > σ*А* > σ*С* , т. е. σmax = σ*В* = .

Принимая большее из напряжений σ*В* за допускаемое напряжение МПа, определим допускаемую нагрузку :

 или  и

.

Если принять *A* = 4 см2 = 4⋅10-4 м2, = 272 кН.

Коэффициент запаса прочности при этом будет .

**2.5. Расчет по методу предельных состояний**

Пусть тяги, на которых висит балка, изготовлены из малоуглеродистой стали с σтр = 240 МПа = 240⋅106 Па.

При расчете по допускаемым напряжениям было принято [σ]=160 МПа и коэффициент запаса .

При постепенном увеличении нагрузки *F* усилия в тягах будут увеличиваться. Предельным или разрушающим будет усилие *F*пред, при котором заметные пластические деформации возникнут одновременно в двух из трех тяг, если балка подвешена, или в обоих тягах, если балка оперта каким-либо образом.

В рассматриваемом примере балка подвешена на трех тягах, поэтому возможны 2 варианта предельного состояния.

1 вариант: пусть в тягах *AD* и *BK* напряжения достигнут значения σт, тогда  и балка поворачивается вокруг шарнира С, превратившись в механизм.

Составим уравнение равновесия:

 или .

.

2 вариант: пусть тяги *CL* и *BK* достигли предела текучести, т. е. .

Из уравнения равновесия найдем:

 или .

.

Из двух полученных значений *F*пред выбираем меньшее, т. е. полученное по второму варианту: *F*пред =  = 4,4 ⋅ 240 ⋅ 106 ⋅ 4 ⋅ 10-4 = 422,4 кН.

Сравнивая с *F*доп, найдем дополнительный резерв нагружения:

 или 55%.

Общий коэффициент запаса прочности будет= 1,5 + 1,55 = 3,05.

Таким образом, предельную нагрузку можно увеличить в 1,55 раза по сравнению с допускаемой и общий коэффициент запаса прочности

составит *п* = 3.

# **Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

# **ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ БРУСА**

**3.1 Общие понятия и расчетные формулы**

Любая конструкция представляет собой геометрическое тело с присущими для него размерами и характеристиками. Так, для бруса характерными размерами являются длина, размеры поперечного сечения и форма продольной оси.

При растяжении и сжатии, для получения расчетных формул использовались длина *l* [м] и площадь поперечного сечения *A* [м2].

При изучении других видов нагружения возникает необходимость оперировать другими геометрическими характеристиками, например, при кручении и изгибе. Кроме того, большое значение имеет ориентация поперечного сечения относительно нагрузки, действующей на конструкцию.

В общем виде геометрические характеристики некоторой произвольной плоской фигуры (сечения) сводятся (рис. 3) к:

1. Статическим моментам:

Рис. 3

*а*

*b*

*х*

*у*

*dA*

*у*1

*х*1

0

01

 [м3],

 [м3],

где *dA* – элементарная площадка,

*х*, *у* – координаты *dА*.

2. Осевым моментам инерции

 [м4],  [м4].

3. Полярному моменту инерции:

 [м4], причем вполне очевидно, что .

4. Центробежному моменту инерции:  [м4].

При параллельном переносе осей геометрические характеристики изменятся.

Если *а*, *b* – расстояния между осями, то:



Расстояния *а*, *b* могут быть положительными или отрицательными. Поэтому их можно подобрать так, чтобы второе слагаемое было равно первому, тогда . Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются центральными. Относительно них:

.

В этом случае, *а = х*С и *b = у*С – координаты центра тяжести относительно произвольных осей *х*, *у*. Они могут быть положительными и отрицательными.

Аналогично моменты инерции относительно осей *х1*, *у1*, в случае их совпадения с центральными, будут:



Для простейших сечений – прямоугольник, квадрат, круг, кольцо, треугольник, все геометрические характеристики можно выразить через характерные размеры сечений. Любую сложную фигуру можно представить в виде комбинации простейших фигур, а геометрические характеристики, как сумму характеристик этих фигур.

Так основные геометрические характеристики относительно центральных осей простейших фигур будут:

1. Прямоугольник со сторонами *b* x *h*:

*Sx = Sy = Ixy =* 0, .

1. Квадрат со стороной *а*:

 *Sx = Sy = Ixy =* 0.

1. Прямоугольный треугольник – основание *b*, высота *h*:

.

1. Круглое сечение диаметром *d*:

*Sx = Sy = Ixy =* 0, .

1. Кольцевое сечение с внутренним диаметром *d* и наружным *D*:

*Sx = Sy = Ixy =* 0, .

Геометрические характеристики стандартных прокатных профилей приводятся в таблицах приложений.

**3.2 Главные оси и главные моменты инерции**

Если координатные оси поворачивать, то координаты *х*, *у* будут изменяться, следовательно, будут меняться и геометрические характеристики.

Если обозначить *u*, *v*, положение осей, повернутых на угол α относительно общего начала координат, то, воспользовавшись формулами преобразования координат, можно получить значения моментов инерции  через .

Так, по формулам перехода:









Складывая два первых выражения почленно, получим:



Отсюда вывод: Сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей является величиной постоянной и не зависит от угла α при повороте осей, в то время как каждая из величин  меняется.

Существует такое значение α, при котором один из моментов инерции достигает максимального значения, в то время как другой принимает минимальное значение, а сумма их остается постоянной.

Дифференцируя  по α и приравнивая производную нулю, находим:



Подставляя это значение α в формулу для , найдем, что он будет равен нулю.

Оси *u* и *v*, относительно которых центробежный момент инерции  равен нулю, а осевые моменты  принимают экстремальные значения, называются главными осями.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Подставляя значение α для главных осей в выражения для , найдем:



Верхний знак соответствует максимальному значению, а нижний – минимальному.

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет главной.

Для сложных и составных сечений знание  имеет большое значение, так как, ориентируя главные оси относительно линии действия сил, можно добиться более эффективного использования материала конструкции.

Для простых сечений  вычисляются, а для сечений, составленных из стандартных прокатных профилей, выбираются из таблиц.

**3.3 Графическое представление моментов инерции**

Вычисление моментов инерции можно заменить простым графическим построением.

Пусть известны моменты инерции . По вышеприведенной формуле определяем угол α для главных осей.

0

*Iy*

*Ix*

*Iu*

*Ixy*

*y*

*Iv*

*D*

*B*

*B*1

*A*1

01

*C*

*E*

*A*

*x*

*v*

*u*

α

2α

Рис. 4

На координатной оси *х* откладываем *Ix* – точка *А* и *Iy* – точка *В*. Из точек *А* и *В* откладываем по вертикали , причем ,  (рис.4). Концы этих отрезков, точки *А*1 и *В*1 принадлежат одному диаметру, точка пересечения отрезка *А*1*В*1 с осью *х* даст центр круга. Радиус этого круга:



Круг пересекает ось *х* в точках *D* и *E*, а абсциссы этих точек будут искомыми главными моментами инерции, т. е.



,





Для определения положения главных осей строится фокус круга инерции. Для этого из точки *А*1 проводится горизонталь до пересечения с кругом в точке *О*1. Соединяя фокус *О*1 с точками *D* и *E* круга, получим направление главных осей *u* и *v* (рис. 4).

Покажем на примере вычисление моментов инерции сечения, составленного из двух стандартных прокатных профилей.

**3.4 Проектирование составного сечения**

Для заданного составного сечения из двух стандартных прокатных профилей требуется:

1. Определить положение центра тяжести.
2. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно случайных осей *хС* и *уС*, проходящих через центр тяжести.
3. Определить положение главных центральных осей *u* и *v*.
4. Вычислить главные моменты инерции относительно главных центральных осей *u* и *v*.
5. Проверить вычисления.
6. Вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все оси и размеры в числах.
7. Решить эту же задачу графически и сравнить с аналитическим решением.
8. Сформулировать выводы.

## Порядок решения

1. Начертить сечение в масштабе.
2. Обозначить центральные оси *х*1, *у*1 и *х*2, *у*2 составляющих сечения.
3. Выбрать из таблиц ГОСТ все расчетные параметры составных элементов.
4. Определить координаты центра тяжести составного сечения и обозначить их на чертеже.
5. Определить координаты центров тяжести составных элементов относительно общего центра тяжести.
6. Вычислить осевые и центробежный моменты инерции всего сечения относительно произвольных центральных осей *хС* и *уС*.
7. Определить положение главных центральных осей *u*, *v* и обозначить их на чертеже.
8. Найти главные центральные моменты инерции.
9. Произвести проверку вычислений.
10. Решить эту же задачу графически с использованием круга инерции. Сравнить с аналитическим решением.
11. Сформулировать выводы.

**3.4.1. Аналитическое решение для составного сечения**

**из уголка 14/9 и швеллера №24**

Через центры тяжести *С*1 и *С*2 уголка и швеллера (рис. 5) проводим центральные оси *х*1, *у*1 и *х*2, *у*2, параллельные их сторонам. Поскольку *х*2 - ось симметрии швеллера, она и ось *у*2 являются его главными центральными осями. Главная центральная ось инерции *у*0 уголка образует с его центральной осью *х*1 угол α.

Для неравнобокого уголка *A*1 = 22,2 см2;  = 146 см4;  = 444 см4;  =  = 85,5 см4; tg α = 0,409; α = 22°15′; координаты центра тяжести

*хС* = 4,58см; *уС* = 2,12см.

Для швеллера *A*2 = 30,6 см2;  = 2900 см4;  = 208 см4;  = 0; координаты центра тяжести *хС* = 2,42 см; *уС* = 12 см.

1. Найдем главный момент инерции и центробежный момент инерции уголка :

= = 444 + 146 – 85,5 = 504,5 см4;

см4.

Расстояния между центральными осями уголка и швеллера равны:

между осями *х*1 и *х*2

12,00 + 2,12 = 14,12 см;

между осями *у*1 и *у*2

14,00 – 2,42 – 4,58 = 7,00 см.

Определим координаты центра тяжести *С* всей фигуры в системе координат *х*2, *у*2:

 см;

 см.

Центр тяжести *С* должен лежать на прямой *С*1*С*2, что необходимо проверить на рисунке. Через центр тяжести *С* проводим центральные оси *хС* и *уС*, параллельные проведенным ранее центральным осям уголка и швеллера. В системе центральных осей *хС* и *уС* координаты центров тяжести уголка и швеллера равняются:

= 7,00 – 2,94 = 4,06 см; = 14,12 – 5,94 = 8,18 см;

= −2,94 см; = −5,94 см.

2. Вычислим осевые и центробежный моменты инерции всего сечения в системе произвольных центральных осей *хС*, *уС*:

= 146,0 + 22,2 ⋅ 8,182 + 2900 + 30,6 ⋅ 5,942 = 5607,6 см4;

= 444,0 + 22,2 ⋅ 4,06 + 208,0 + 30,6 ⋅ 2,942 = 1282,4 см4;

= 146,7 + 22,2 ⋅ 4,06 ⋅ 8,18 + 30,6 ⋅ (−2,94) ⋅ (−5,94) = 1417,3 см4;

3. Находим угол α0 наклона главных центральных осей *и* и *v* относительно произвольных центральных осей *хС* и *уС*:





Поскольку угол α0 отрицательный, главная центральная ось *и* откладывается относительно произвольной центральной оси *хС* по часовой стрелке, а поскольку , ось *и* является осью, относительно которой момент инерции будет максимальным.

4. Главные моменты инерции определим по формуле



 см4;

 см4 = 6030,6 ⋅ 10-8 м4;

 см4 = 859,4 ⋅ 10-8 м4.

Проверка. Должны удовлетворяться условия

.

В данном случае

 см4;



см4.

Относительная ошибка составляет , что допустимо.

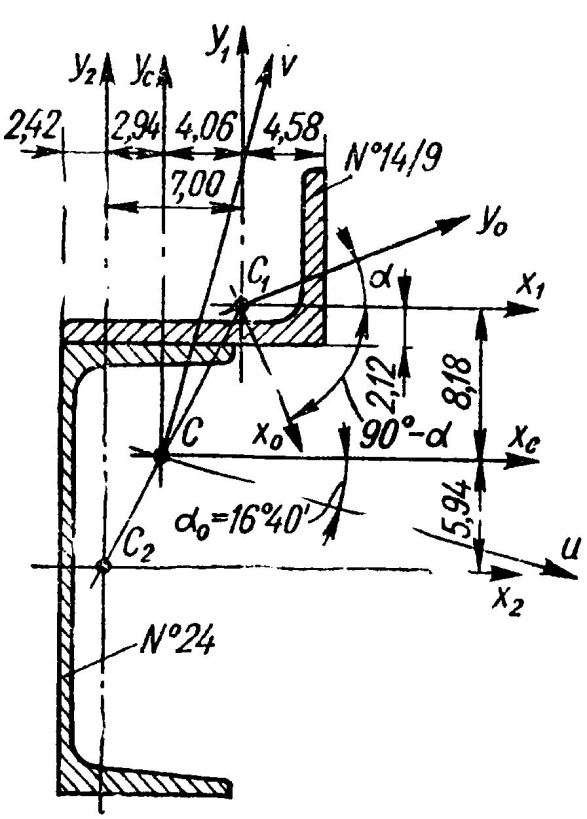
 5. На рис. 5 показано составное сечение в масштабе со всеми размерами и осями.

Рис. 5

**3.4.1. Графическое решение для составного сечения**

# **из уголка 14/9 и швеллера №24**

# Решение рассмотренной выше задачи можно получить графически с помощью так называемого круга инерции.

Этим способом можно решить две задачи:

− прямую, когда заданы главные моменты инерции  и требуется определить моменты инерции  относительно произвольных центральных осей, проведенных под углом α к главным осям, и

− обратную, когда заданы центральные моменты инерции  и требуется определить положение главных центральных осей *и* и *v* и главные моменты инерции  относительно этих осей.

Предыдущей задаче, решенной аналитически, соответствует обратная задача графического метода.

Рассмотрим этот пример.

Пусть определены положение центра тяжести *хС*, *уС* и моменты инерции относительно этих осей , .

Из предыдущего примера:  см;  см; = 5607,6 см4; = 1282,4 см4;  = 1417,3 см4.

*u*

*v*

*D*

*C*

*B*

*E*

*A*

*G*

*F*

*M*

*Ixсyс* = 1417,3 (11,1) см4

*I*max = *Iu* = 6052,9 (4,7) см4

*Iхc =* 5607,6 (4,37)см4

0





*I*min = *Iv* = 872 (0,67) см4

*Iyc =* 1282,4 (1)см4

Рис.6

На координатных осях  и  в условном масштабе отложим значения моментов инерции ,  в соотношениях:

, .

На рисунке 6  (1) см4, см4,  см4.

В скобках указаны соотношения величин в принятом масштабе.

На полуразности  найдем точку *С*, затем радиусом  построим круг инерции.

Очевидно, что отрезки *ОА* и *АВ* будут являться искомыми главными моментами инерции .

Из рисунка радиус круга

,



,

,

т. е. совпадают с выражениями , полученными аналитически.

Для определения направления главных осей инерции необходимо построить фокус круга инерции.

Для этого из точек *F* и *E* проводим отрезки *FM* и *EM* параллельно горизонтальной и вертикальной осям. Они пересекутся в точке *М*, которая и будет фокусом. Соединяя фокус *М* с точками *А* и *В* круга инерции, получим направления главных осей *и* и *v*.

Из рисунка, замеряя отрезки *ОА* и *ОВ* в см,деля на *OD* и умножая на общий параметр 1282,4 см4, получим:

 см4,

 см4,

которые отличаются от вычисленных значений на:

,

,

что объясняется погрешностью построения рисунка.

Масштаб построений: в 2,5см – 1282,4 см4.

# **Глава 4. РАСЧЕТЫ НА КРУЧЕНИЕ**

# **4.1 Общие понятия**

Кручением называется вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает крутящий момент *М*кр [Н⋅м], при воздействии на брус внешних пар сил с моментом *М*. Пары сил действуют в плоскостях перпендикулярных продольной оси бруса. Внутренние силы, возникающие при этом, приводятся к одному силовому фактору – крутящему моменту.

Для расчета на кручение необходимо знать величину крутящего момента в любом поперечном сечении бруса. Для этого строят эпюры крутящих моментов.

Для построения эпюры – графика изменения *М*кр по длине бруса, используют тот же метод сечений, что и при растяжении и сжатии.

Величина *М*кр определяется как алгебраическая сумма заданных моментов, действующих на часть бруса по одну сторону от рассматриваемого сечения:

*М*кр =.

Знак крутящего момента физического смысла не имеет и общепринятого правила знаков не существует.

При построении эпюры крутящих моментов их величины откладываются перпендикулярно базовой линии, проводимой параллельно продольной оси бруса.

Если задача статически неопределима, т. е. внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений статики, необходимо сначала раскрыть статическую неопределимость. Для этого составляются дополнительные уравнения перемещений и, решая их совместно с уравнениями равновесия статики, определяют опорные моменты. Дальнейшее построение эпюр *М*кр ничем не отличается от описанного выше. Построение эпюр и дальнейший расчет приводятся в примере.

**4.2 Напряжения при кручении брусьев круглого**

**сплошного и кольцевого сечений**

Напряжения и деформации при кручении существенно зависят от формы поперечного сечения бруса.

Рассмотрим брусья круглого сплошного и кольцевого сечений. Теория кручения таких брусьев (валов) основана на следующих допущениях:

1. Ось бруса после деформации остается прямой.
2. Расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными, т. е. брус в продольном направлении не деформируется, а только скручивается.
3. Поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений).
4. Радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на определенный угол, остаются прямыми.

Эти допущения подтверждаются экспериментами и точными решениями, получаемыми методами теории упругости.

В поперечных сечениях при указанных допущениях возникают лишь касательные напряжения, определяемые по формуле:

,

где  – касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения,

*М*кр – крутящий момент в исследуемом сечении (определяется по эпюре *М*кр),

*ρ* – расстояние от исследуемой точки до оси бруса,

** – полярный момент сечения бруса.

Для круга

.

Для кольцевого сечения

,

*D* – наружный диаметр,

*d* – внутренний диаметр кольца.

В любой точке поперечного сечения  перпендикулярно радиусу, проходящему через эту точку.

Наибольшей величины касательные напряжения достигают в крайних, периферийных точках сечения

,

где отношение  называют полярным моментом сопротивления.

Для круга:

.

Для кругового кольца с наружным и внутренним диаметрами:

.

**4.3 Определение перемещений (углов поворота).**

Если на участке бруса,  то угол закручивания определяется по формуле

 или ,

где *l* – длина рассматриваемого участка,

*GIp* – жесткость сечения бруса при кручении,

*G* – модуль упругости второго рода или модуль сдвига.

Величина *G* определяется, также как и *Е*, и μ, экспериментально или из соотношения



где *Е* – модуль упругости первого рода,

μ – коэффициент Пуассона.

Если брус имеет ступенчатую форму и крутящий момент изменяется по длине скачкообразно, то полный угол закручивания определяется суммированием углов закручивания по участкам, в пределах которых *М*кр и *Ip* постоянны

.

Угол закручивания на единицу длины бруса называется относительным углом закручивания и обозначается θ:

,

.

**4.4 Расчет вала на прочность и жесткость**

**4.4.1 Расчет на прочность**

Условие прочности вала записывается в виде ,

где  – допускаемое касательное напряжение при кручении.

Превышение расчетных рабочих напряжений допускается в пределах 5%.

Пользуясь условием прочности, можно выполнить:

1. Проверку прочности (поверочный расчет)

.

1. Подбор сечения вала (проектный расчет)

.

Используя выражения *Wp* можно найти:

- для вала сплошного сечения

,

-для вала кольцевого сечения

,

 – выбирается из эпюры *М*кр.

1. Определить допускаемый крутящий момент

.

Во всех этих расчетах допускаемые напряжения при кручении берутся на основе обобщения экспериментальных данных или берутся в долях от допускаемых напряжений при растяжении или сжатии:

-для сталей ,

-для чугуна .

При приближенном расчете валов, испытывающих, кроме кручения, влияние изгиба, динамической нагрузки, переменных напряжений и других факторов, их действие компенсируют снижением допускаемых напряжений.

**4.4.2 Расчет на жесткость**

Длинные валы, кроме расчета на прочность, проверяются также и на жесткость для нормальной работы связанных с ними деталей. Для этого наибольший относительный угол закручивания θ не должен превышать допускаемого значения, устанавливаемого на основе опыта проектирования и эксплуатации аналогичных валов.

Условие жесткости вала имеет вид:

 или ,

где [θ] и [θ°] – допускаемые углы закручивания соответственно в  и .

Исходя из этих условий, можно определить требуемый диаметр вала:

- для сплошного круглого сечения

 и ,

- для вала кольцевого сечения

,

- допускаемый крутящий момент по условию жесткости:

.

Допускаемые относительные углы закручивания на основе экспериментальных исследований и технических условий для различных конструкций и условий работы принимаются

 или .

При расчетах на прочность и жесткость из двух найденных значений диаметра принимается большее.

При кручении вала кольцевого сечения материал используется более рационально, чем в случае сплошного круглого сечения, т. к. при ρ = 0 и в окрестностях оси вала *τ* = 0 и материал не используется.

Из двух валов одинаковой прочности и жесткости вал с кольцевым сечением будет более легким, но более трудоемким в изготовлении.

Поэтому целесообразность выбора того или иного сечения вала диктуется эксплуатационными требованиями.

**4.5 Исследование работы вала с учетом пластических деформаций**

Постоянный рост изгибающего момента приведет к тому, что первыми достигнут предела текучести наружные, периферийные волокна. Это произойдет, если ,

где  – крутящий момент, соответствующий началу пластических дефор-

маций.

При дальнейшем росте *М*кр пластические деформации будут распространяться внутрь сечения, и когда все сечение (с ) перейдет в пластическую область, образуется пластический шарнир и вал перестанет воспринимать крутящий момент. Это состояние вала будет предельным, а *М*пр – предельный крутящий момент, соответствующий этому состоянию определится интегрированием:

.

Для сплошного круглого сечения:

, где  – пластический момент сопротивления при кручении.

Он отличается от полярного момента сопротивления в  раза или на 33%.

С учетом коэффициента запаса при расчете по допускаемым напряжениям, полный коэффициент запаса при расчете по предельным состояниям будет: *п* = 1,5+ 1,33 = 2,83.

Этот коэффициент имеет теоретическое значение и позволяет оценивать состояние исчерпания несущей способности вала.

**4.6 Пример расчета вала**

Стальной вал находится под действием моментов *М* (рис. 7, *а*)

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить диаметр вала на каждом участке по методу допускаемых напряжений, приняв для стали *τ* т = 0,5σт = 0,5⋅240 = 120 МПа, коэффициент запаса принять *п*1 = 1,5, а [*τ* ] =  МПа.
3. Дать эскиз вала с указанием вычисленных размеров.
4. Построить эпюру углов закручивания спроектированного вала.
5. Произвести расчет этого же вала по методу предельных состояний и определить общий (фактический) коэффициент запаса *п* = *п*1 + *п*2.

Порядок решения.

* 1. Начертить в условном масштабе расчетную схему вала с указание заданных параметров.
  2. Разбить вал на участки по характеру приложенных моментов.
  3. На каждом участке вычислить крутящие моменты, используя метод сечений.
  4. Построить эпюры крутящих моментов *М*кр.
  5. Определить диаметр вала на каждом участке по методу допускаемых напряжений.
  6. Начертить в условном масштабе эскиз вала с указанием размеров.
  7. Вычислить углы закручивания каждой ступени вала и построить эпюру углов закручивания.
  8. Произвести расчет спроектированного вала по методу предельных состояний.
  9. Определить полный запас прочности вала.

Решение.

1. Расчетная схема вала представлена на рис 7, *а*.
2. Вал имеет 4 участка (рис. 7, *а*).
3. Вычислим крутящие моменты на участках:

*М*I = *М*4 = – 1000 Н⋅м. *М*II = *М*4 – *М*3 = 1000– 2200 = –1200 Н⋅м.

*М*III = *М*4 – *М*3 – *М*2 = – 1200 – 1000 = – 2200 Н⋅м.

*М*IV = *М*4 – *М*3 – *М*2 + *М*1 = – 2200 + 1500 = – 700 Н⋅м.

1. Эпюра *М*кр представлена на рис. 7, *б*.
2. Определим диаметры вала на участках:



 мм.  мм.

 мм.  мм.

1. Эскиз вала представлен на рис.7. *в*.
2. Углы закручивания вала вычисляем по формуле:

.

Задавшись *G* = 8⋅104 МПа для стали, вычислим сначала жесткости вала по участкам:









 рад.  рад.

 рад  рад.

Эпюра углов закручивания показана на рис. 7, *г*.

φmax = φ4 = - 0,110 рад.