**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**

**КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**Филиал Кыргызского государственного технического университета**

**им. И.Раззакова в г. Кызыл -Кия**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | «**УТВЕРЖДАЮ**»  Гл. спец. по УР Турунбаева А  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_«\_\_\_»\_\_\_\_2022 г. |

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**

по дисциплине «Теоретическая механика»

для студентов направления 650400 и 630300 «тмио и гд»

форма обучения – очная, заочная с применением ДОТ

Учебно-методический комплекс составлен на основе Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования КР по направлению 650400 и 630300 «ТМИО» и «Горное дело». Учебно-методический комплекс разработан доц. кафедры ЕГН Асамидиновым Ф.М.

Кызыл – Кия –2022

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**

**КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**Филиал Кыргызского государственного технического университета**

**им. И.Раззакова в г. Кызыл –Кия**

«**УТВЕРЖДАЮ**»

Гл. спец. по УР Турунбаева А.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_«\_\_\_»\_\_\_\_2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине «Теоретическая механика»

для студентов направления 650400 и 630300 «ТМиО ,МД»

Всего кредитов 4

в том числе:

аудиторная работа, час 64

самостоятельная работа студентов, час 56

Форма отчётности экзамен

Семестр 3,4

Рабочая программа разработана доц. Асамидиновым Ф.М.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры «ЭУП» Протокол №1 от 29.08.2022 г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Подпись. Ф,И,О, зав. кафедрой

Одобрено учебно-методической комиссией филиала.

Протокол №\_\_\_\_от «\_\_\_»\_\_\_\_\_2022 г.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Тургунбаева А.

Кызыл – Кия –2022 г.

**Цель и задачи дисциплины**

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов) с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей, и в частности, таких объектов как автомобилей, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли, и т. д. Несмотря на многообразия всех этих проблем, решение их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы. Требующие изучение законов движение или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется *теоретической* (или *общей )* механикой.

В процессе изучения дисциплины студент получить необходимые знания об общих законах движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним системам.

Целью изучения дисциплины являются подготовка высококвалифицированных специалистов-инженеров знающих теоретическое основы и умеющих их использовать в практической деятельности.

**Структура дисциплины (содержание ЛЕКЦИОННЫХ разделов дисциплины)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№**  **п/п** | | **Наименование тем** | **Кол-во часов** |
|  | | **I модуль** |  |
|  | | **СТАТИКА** |  |
| 1 | | Задачи статики. Аксиома статики. Связи и реакции связей. | 2 |
| 2 | | Условия равновесия системы сходящихся сил. | 2 |
| 3 | | Параллельные силы. Центр системы параллельных сил. Центр тяжести твердого тела | 2 |
| 4 | | Плоская система сил. Условия равновесия плоской системы сил | 2 |
| 5 | | Произвольная система сил. Условия равновесия системы сил и в общем виде. | 2 |
| 6 | | Закон трения | 2 |
|  | | **КИНЕМАТИКА** |  |
| 7 | | Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки | 2 |
| 8 | | Криволинейное движение точки. Касательное и нормальное ускорение точки. | 2 |
| 9 | | Поступательное и вращательное движение твердого тела | 2 |
|  | | **II модуль** | 2 |
| 10 | | Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. | 2 |
| 11 | | Плоскопараллельное движение твердого тела. | 2 |
| 12 | | Ускорение точек плоской фигуры. | 2 |
| 13 | | Сложение движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. | 2 |
|  | | **Динамика материальный точки** |  |
| 14 | Введение в динамику. Система единиц. | | 2 |
| 15 | Дифференциальные уравнения. Движения материальной точки.  Решение первой задачи динамики. | | 2 |
| 16 | Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки. | | 2 |
| 17 | Решение основной задачи динамики при криволинейном движение точки. | | 2 |
|  | **Общие теоремы динамики точки** | |  |
| 18 | Количество движения точки. Импульс силы. Теорема об изменении количество движение точки. | | 2 |
|  | **III-модуль** | |  |
| 19 | Работа силы. Мощность. Примеры вычисления работ. | | 2 |
| 20 | Теорема об изменении кинематической энергии точки. | | 2 |
|  | **Колебание материальной точки** | |  |
| 21 | Виды колебания. Свободные колебание. Задача. | | 2 |
| 22 | Затухающие колебание. Вынужденные колебания. Резонанс. | | 2 |
|  | **Динамика системы и твердого тела.** | |  |
| 23 | Введение в динамику системы. Механическая система. | | 2 |
| 24 | Моменты инерции тело относительно оси. Радиус инерции. Моменты инерции тело относительно параллельных осей. Теорема Гюгенса. | | 2 |
| 25 | Теорема о движении центра масс системы. | | 2 |
| 26 | Теорема об изменении количество движения системы. | | 2 |
| 27 | Теорема об изменении кинематической | | 2 |
| **Итого:** | | | **54 часов** |

**Перечень практических занятий**

**III семестр**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **ТЕМА ЗАНЯТИЙ и**  **ЗАДАЧИ ПО УЧЕБНИКУ МЕЩЕРСКИЙ** | **Кол-во часов** |
|  | **I модуль** |  |
| 1 | Силы, действующие по одной прямой. Задачи § 1, § 2. | 2 |
| 2 | Параллельные силы. Момент силы и пара сил. Задачи § 3. | 2 |
| 3 | Произвольная плоская система сил. Теорема Вариньона. Задачи § 4 | 2 |
| 4 | Примеры решение РГЗ С-1 | 2 |
| 5 | Расчет плоских ферм. Метод вырезания узлов и метод сечений. | 2 |
| 6 | Произвольная система. Задачи № 8. | 2 |
|  | **II модуль** |  |
| 7 | Законы трения. Трение скольжение и трение качение. Задачи § 4. 2 | 2 |
|  | КИНЕМАТИКА |  |
| 8 | Закон движения и траектория точки. Скорость и ускорения точки. Задачи § 10, §11, §12. | 2 |
| 9 | Примеры решение РГЗ К-1 | 2 |
| 10 | Скорость и ускорения точки в криволинейных координатах.  Задачи § 10, §11, §12. | 2 |
| 11 | Криволинейное движение точки. Скорость и ускорения при криволинейном движении точки. Задачи §11, §12. | 2 |
| 12 | Пример решения РГЗ К-1 | 2 |
|  | **III-модуль** |  |
| 13 | Поступательное и вращательное движение твердого тела.  Задачи § 13 | 4 |
| 14 | Определение сил по данному движению. 26 -9,12,24,30 | 2 |
| 15 | Дифференциальные уравнение движения. 27 -2,7,12,17 | 2 |
| 16 | Определение движений материальной точки. 27 -33,32,57,63 | 2 |
| 17 | Теорема об изменение количество движения. 28 -2,5,12,20 | 2 |
| 18 | Теорема об изменении кинематической энергии материальной точки.  30 -4,14,18,23 | 2 |
|  | **ИТОГО:** | **36** |

**Перечень лабораторных занятий**

**III семестр**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№**  **п/п** | **СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЙ** | **Кол-во**  **часов** |
| 1 | Определение коэффициента трения скольжения | 4 |
| 2 | Определение центра тяжести плоских фигур | 4 |
| 3 | Определение движений материальной точки. | 2 |
| 4 | Теорема об изменение количество движения. | 2 |
| 5 | Теорема об изменении кинематической энергии материальной точки. | 2 |
| 6 | Работа силы тяжести и силы упругости. | 2 |
| 7 | Свободные гармонические колебания материальной точки. | 2 |
|  | **ИТОГО:** | **18** |

**ТЕМЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ ПЕРВОЙ ЧАСТИ**

РГЗ-1

**С1. Равновесие плоской системы сил.**

РГЗ-2

**К1. Кинематика точки.**

РГЗ-3

**Д 1.Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.**

**Теоретические рейтинговые вопросы**

1. Задачи статики и ее основные понятие.
2. Аксиомы статики.
3. Связи и реакции связей.
4. Сложение сходящихся сил.
5. Разложение силы.
6. Проекция силы на ось.
7. Уравнения равновесия системы сходящихся сил.
8. Момент сил относительно центра и оси.
9. Пара сил. Момент пара. Эквивалентные пары. Сложения пар.
10. Плоскость система сил.
11. Главный вектор и главный момент.
12. Приведение плоской системы сил к одной паре.
13. Условия равновесия плоской системы сил.
14. Произвольная система сил. Приведение произвольной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент.
15. Условия равновесия системы сил в общем виде.
16. Способ задания движения точки. Система отсчета.
17. Скорость и ускорения точки.
18. Поступательное движение движения твердого тела.
19. Вращательное движения твердого тела.
20. Линейная скорость и ускорения точек, твердого тела вращающегося вокруг неподвижной оси.
21. Плоское движение твердого тела.
22. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры.
23. Мгновенный центр скоростей фигуры.
24. Ускорение точек плоскостей фигуры.
25. Мгновенный центр ускорение.
26. Введение в динамику. Основные понятия и определение.
27. Закон динамики. Задачи динамики материальной точки.
28. Система единиц.
29. Дифференциальные уравнение движение точки.
30. Решение первой задачи динамики.
31. Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки.
32. Решение первой задачи динамики.
33. Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки.
34. Общие теоремы динамики. Понятие о количество движение точки кинематической энергии и импульса силы.
35. Теорема об изменении количество движения материальной точки.
36. Работа силы. Мощность.
37. Примеры вычисление работы.
38. Теорема об изменении кинематической энергии точки.
39. Введение в динамику системы. Механическая система. Силы внешние и внутренние.
40. Масса системы. Центр масс.
41. Моменты инерции тела относительно оси. Радиус инерции.
42. Теорема о движении центра масс системы.

**5.1. Критерии оценки усвоения дисциплины:**

1. Знание теоретических основ механики.

2. Приобретение знания по управление персоналом и принятие необходимых решений.

3. Умение анализировать результаты исследования и делать соответствующие выводы.

4. Своевременное выполнение и защита лабораторных работ.

5. Умение излагать информацию устно и письменно.

6. Умение логически мыслить.

**5.2. Критерии оценки самостоятельной работы студентов:**

1. Способность искать, находить, отбирать, анализировать, систематизировать, обобщать и описывать информацию по выбранной теме (при написании реферата).

2. Способность искать, находить, отбирать, анализировать, систематизировать, обобщать и представлять информацию по выбранной теме (при подготовке презентации).

3. Владение специальными терминами, используемыми в менеджменте.

4. Способность искать, находить, отбирать, анализировать, систематизировать, обобщать и представлять информацию по выбранной теме (при подготовке портфолио).

5. Своевременность представления необходимых материалов (рефератов, презентаций, кроссворда, портфолио).

**5.3. Индивидуальная работа:**

1. Способность студента работать в группе.

2. Использование информационных технологий для поиска информации.

3.Использование информационных технологий для обработки данных.

4. Психологическая совместимость.

**5.4. Общие компетенции:**

- лидерство

- коммуникативность

- стрессоустойчивость

- креативность

- знания

- умения

- навыки

**Ожидаемый результат:** приобретение студентами знаний научных основ менеджмента:

**Оценивание:**

Конкретные требования экзаменирования сообщаются студентам в начале модуля (семестра).

Контроль знаний включает элементы теории и практики, с учетом материала, представленного в ходе лекций, семинаров (где обсуждаются рефераты и презентации) и лабораторных работ.

Контроль знаний проводится в виде письменного и устного опроса, тестирования, в виде доклада (реферата), презентации, отчёта по лабораторной работе.

Окончательная оценка ставится с учетом пропорциональной доли и значимости различных теоретических и практических элементов модуля.

Обязательным условием выставления оценки является успешное прохождение и защита всех предусмотренных лабораторных работ, представление рефератов, презентаций, портфолио.

В случае не завершения или неудовлетворительного выполнения элементов практики (практических занятий, семинаров, лабораторных работ) ставится оценка «неудовлетворительно».

Весь учебный курс оценивается в 100 баллов.

**5.5. Карта рейтинг-контроля**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № модуля | Объём модуля в часах | Оценка в баллах | | Сроки |
| мин. | макс. |
| **Текущий контроль** | | | | |
| Модуль 1 | Лекции – 16 час  Практическая занятия – 16 час  СРС – 28 час  Сумма баллов | 12  12  6  30 | 20  20  10  50 | По графику |
| Модуль 2 | Лекции – 16 час  Практические занятия – 16 час  СРС – 28 час  Сумма баллов | 12  12  7  31 | 20  20  10  50 | По графику |
| **Заключительный контроль** | |  |  | По расписанию экзаменов |
| **Итого баллов** | | **61** | **100** |  |

На основании полученной студентом суммы баллов за семестр выставляется оценка в соответствии с приведённой ниже таблицей.

**Итоговое распределение баллов**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
| Сумма баллов | 61-73 | 74-86 | 87-100 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Содержание оценки | |  | | |
| **Отлично –** замечательный результат при нескольких незначительных недостатках | **5** | **А** | **отлично** | зачёт |
| **Очень хорошо –** результат выше среднего, несмотря на определённое количество  недостатков | **4+** | **В** | **хорошо** |
| **Хорошо –** в общем хорошая работа, несмотря на определённое число значительных недостатков | **4** | **С** |
| **Удовлетворительно –** добросовестная работа, содержащая, однако, значительные недостатки | **3+** | **D** | **Удовлетво-рительно** |
| **Посредственно –** результат соответствует минимально допустимым критериям | **3** | **E** |
| **Неудовлетворительно –** с правом пересдачи, необходима дополнительная работа для получения кредита | **2** | **FX** | **Неудовле-твори-тельно** | незачёт |
| **Неудовлетворительно –** без права пересдачи, необходимо повторить курс, необходима значительная дополнительная работа  (повторный курс) |  | **F** |

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Филиал Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова в г. Кызыл - Кия

|  |
| --- |
| «Утверждён»  на заседании Методического Совета  филиала КГТУ им. И. Раззакова в г. Кызыл – Кия  Председатель\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022 г. |

**СИЛАБУС**

по дисциплине «Теоретическая механика»

для студентов направления 650400 и 630300 «тмио и гд»

форма обучения – очная, дистанционная

Всего кредитов 4

Курс 1,2

Семестр 2,3

Лекций, час 32

Практических (семинарских) 16

Лабораторных, час 16

Количество рубежных контролей 4

СРС, час 108

Экзамен, семестр 2,3

Всего аудиторных часов 64

Всего внеаудиторных часов 108

Общая трудоёмкость, час 172

Обсуждён и рекомендован на заседании кафедры «енд»

«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022 г. Протокол №\_\_\_\_

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Преподаватель:** Асамидинов Фазлиддин Мамадалиевич–кандидат физико-математических наук,доцент кафедры «ЕГН»

Тел.: 0551476445 e mail afm1949@mail.ru

**Краткое описание дисциплины**: Целью изучения данной дисциплины является:

готовность студентов к применению полученных при изучении модуля «Теоретическая

и прикладная механика» знаний, умений навыков и компетенций при изучении общена-

ученых и специальных дисциплин, а также для решения профессиональных задач;

**Пререквизиты**:

Для освоения дисциплины студент должен владеть знаниями по

черчению, математике, физике ,полученными в средней школе

**Постреквизиты:** сопротивление материалов, теория механизмов машин

**Методы преподавания:** Преподавание будет включать следующее:

* лекции, практические занятия;
* обсуждение расчетно- графических заданий, выполненных студентами

**Политика курса:** Залогом вашего академического успеха является следующие требования:

**Посещение лекционных и практических занятий обязательное. В случае, если по какой-либо причине, Вы не смогли посетить занятие, Вы будете неси ответственность за весь материал, изученный на пропущенных занятиях и Вы должны отработать пропущенные занятия. По лекциям - представить конспект лекций, на лабораторные занятия - отчет и анализ с рассмотрением задач, выполнение которых было предусмотрено на пропущенном занятии, при необходимости остаться на дополнительное занятие. Указанные материалы Вы можете представить преподавателю во время индивидуальной работы на кафедре. Активно участвовать в учебном процессе; своевременно выполнять домашние задания; быть терпимым, пунктуальным и ответственным; откровенным и доброжелательным к сокурсникам и преподавателю; отключить сотовый телефон; В случае невыполнения выше перечисленных требований, вы**

будете удалены из аудитории, а в случае порчи материальных ценностей будете возмещать убыток за свой счет,

Основные требования по курсу: На лекционные занятия вы должны прочитать необходимую

литературу и предыдущие темы, на практических занятий вы также

должны приходить подготовленным, прочитать учебную литературу,

**Темы лекционных занятий**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Содержание | Часы | прим | |
|  | Модуль №1 |  |  | |
|  | **СТАТИКА** |  |  | |
| **1** | **Введение.Аксиомы статики. Простейшие теоремы статики. Связи и их реакции.** | **2** |  | |
| **2** | **Система сходящихся сил. Приведение. Равновесие.** | **2** |  | |
| **3** | **Пространственная система сил. Приведение. Равновесие.** | **2** |  | |
| **4** | **Плоская система сил. Приведение. Равновесие.** | **2** |  | |
| **5** | **Равновесие при наличии трения скольжения и качения.** | **2** |  | |
| **6** | **Центр тяжести твердого тела.** |  |  | |
|  | **Кинематика** |  |  | |
| **1** | Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки | **2** |  | |
| **2** | Криволинейное движение точки. Касательное и нормальное ускорение точки. | **2** |  | |
| **3** | Поступательное и вращательное движение твердого тела | **2** |  | |
| **4** | Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. | **2** |  | |
| **5** | Плоскопараллельное движение твердого тела. | **2** |  | |
| **6** | Ускорение точек плоской фигуры. | **2** |  | |
| **7** | Сложение движение точки | **2** |  | |
| **8** | Абсолютное, относительное и переносное движение точки. | **2** |  | |
|  |  | **32 ч.** |  | |
|  |  |  |  | |
|  | **2 модуль** |  | |
|  | **Динамика материальный точки** |  | |
| 1 | Введение в динамику. Система единиц. | 2 | |
| 2 | Дифференциальные уравнения. Движения материальной точки.  Решение первой задачи динамики. | 2 | |
| 3 | Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки. | 2 | |
| 4 | Решение основной задачи динамики при криволинейном движение точки. | 2 | |
|  | **Общие теоремы динамики точки** |  | |
| 5 | Количество движения точки. Импульс силы. Теорема об изменении количество движение точки. | 2 | |
| 6 | Работа силы. Мощность. Примеры вычисления работ. | 2 | |
| 7 | Теорема об изменении кинематической энергии точки. | 2 | |
|  | **Колебание материальной точки** |  | |
| 8 | Виды колебания. Свободные колебание. Затухающие колебание. Вынужденные колебания. Резонанс. | 2 | |
|  | **Всего** | **32 ч.** | |

**Перечень практических занятий**

**2 семестр**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **ТЕМА ЗАНЯТИЙ и**  **ЗАДАЧИ ПО УЧЕБНИКУ МЕЩЕРСКИЙ** | **Кол-во часов** |
|  | **I модуль** |  |
| 1 | Силы, действующие по одной прямой. Задачи § 1, § 2. | 2 |
| 2 | Параллельные силы. Момент силы и пара сил. Задачи § 3. | 2 |
| 3 | Произвольная плоская система сил. Теорема Вариньона. Задачи § 4 | 2 |
| 4 | Примеры решение РГЗ С-1 | 2 |
| 5 | Расчет плоских ферм. Метод вырезания узлов | 2 |
| 6 | Расчет плоских ферм. Метод сечений. | 2 |
| 7 | Произвольная система. Задачи № 8. | 2 |
| 8 | Законы трения. Трение скольжение и трение качение. Задачи § 4. 2 | 2 |
|  | Всего | 16 |

**3 семестр**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | КИНЕМАТИКА |  |
| 1 | Закон движения и траектория точки. Скорость и ускорения точки. Задачи § 10, §11, §12. | 2 |
| 2 | Примеры решение РГЗ К-1 | 2 |
| 3 | Скорость и ускорения точки в криволинейных координатах.  Задачи § 10, §11, §12. | 2 |
| 4 | Криволинейное движение точки. Скорость и ускорения при криволинейном движении точки. Задачи §11, §12. | 2 |
| 5 | Пример решения РГЗ К-2 | 2 |
| 6 | Пример решения РГЗ К-2 | 2 |
| 7 | Поступательное и вращательное движение твердого тела.  Задачи § 13 | 2 |
| 8 | Поступательное и вращательное движение твердого тела.  Задачи § 13 | 2 |
| 9 | Определение сил по данному движению. 26 -9,12,24,30 | 2 |
| 10 | Работа силы тяжести и силы упругости. Зад 29-2, 29-6 | 2 |
| 11 | Свободные гармонические колебания материальной точки. Зад 32-2,32-7 | 2 |
| 12 | Затухающие и вынужденные колебания материальной точки. Зад 32-15 | 2 |
| 13 | Дифференциальные уравнение движения. 27 -2,7,12,17 | 2 |
| 14 | Определение движений материальной точки. 27 -33,32,57,63 | 2 |
| 15 | Теорема об изменение количество движения. 28 -2,5,12,20 | 2 |
| 16 | Теорема об изменении кинематической энергии материальной точки.  30 -4,14,18,23 | 2 |
|  | Всего | 32 |

**ТЕМЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ ПЕРВОЙ ЧАСТИ**

С1. Равновесие плоской системы сил. РГЗ-1

К1. Кинематика точки. РГЗ-2

К2 Кинематика твердого тела РГЗ-3

Д 1.Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки. РГЗ-3

**Задания для Самостоятельной работы студентов за второй**

**семестр**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Перечень тем** | **Кол-во часов** | **Форма отчетности** | **Примечание** |
| 1 | Равновесие плоской системы сил | 10 | РГЗ-1 |  |
| 2 | Определение реакции опор составной конструкции | 10 | РГЗ-2 |  |
| 3 | Условия равновесия системы сил в общем виде | 10 | РГЗ-3 |  |
|  | **ИТОГО** | **30** |  |  |

**Задания для Самостоятельной работы студентов за третий**

**семестр**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Перечень тем** | **Кол-во часов** | **Форма отчетности** | **Примечание** |
| 1 | Кинематика точки. | 10 | РГЗ-1 |  |
| 2 | Определение скорости и ускорения точек твердого тела . | 10 | РГЗ-1 |  |
| 3 | Плоское движение твердого тела. | 10 | РГЗ-2 |  |
| 4 | Д1.Интегрирование дифференциальных уравнений материальной точки . | 10 |  |  |
| 5 | Д2. Применение теоремы о движении центра масс к исследованию движения механической системы. | 7 | РГЗ-3 |  |
| 6 | Д3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы к определению скорости материальной точки . | 7 | РГЗ-3 |  |
|  | **ИТОГО** | **54** |  |  |

Оценка по курсу: Текущий контроль успеваемости студентов - оперативный контроль в

течение семестра и оценка уровня знаний и степени усвоения студентами учебного материала по логически завершенным разделам (модулям) соответствующих дисциплин в процессе ее изучения. Промежуточная аттестация успеваемости студентов - обязательный контроль по окончании семестра (во время экзаменационной сессии) путем приема экзаменов по дисциплинам, изучение которых предусмотрены учебным планом в данном семестре. Текущий контроль выводится по итогам выполнения лабораторных работ.

Дата проведения семестрового экзамена будет сообщена дополнительно.

Итоговая оценка слушателя за данный курс будет формироваться из следующих компонентов:

- домашние работы, а также посещаемость – 20 %

- активность участия на лекциях и лабораторных занятиях – 20 %

- текущая аттестация – 30 %

- семестровый экзамен – 30 %

Если студент не выполнил домашние задания или получил ноль баллов по текущей успеваемости, то он не допускается к семестровому экзамену

**Используемая литература**

1. Бубенин Н.В., Ленц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.1,2 учебник М.1970и последние издание.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник М.1963г.
3. Мешерский И.В. Сборник по теоретической механике. Учебное пособие, 1970г. и последние издание.
4. Сборник зданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие под редакцией А.А. Яблоского. М.1968г.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Теоретическая механика в примерах и задачах.

Часть 1 и 2 608 ст.

6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. М. ВШ1968г. 416 ст.

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

**ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

ВВЕДЕНИЕ

***Теоретическая механика*** – наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Под движением в механике понимается изменение положения твердого тела в пространстве и во времени, относительно других тел.

Пространство в классической механике рассматривается как абсолютное, трехмерное, в котором все построения базируются на геометрии Евклида.

Время в классической механике так же абсолютно.

Тела, относительно которых мы рассматриваем движение данного тела, называются *телами отсчета*. Тело отсчета со скрепленными с ним осями координат называется *системой отсчета*.

Система отсчета, которая находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, называется *инерциальной*.

***Абсолютно твердое тело*** – тело, в котором расстояния между любыми точками остается неизменным при взаимодействии с другими телами.

На основе законов механики базируются дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика, инженерные конструкции и т.д.

Механика состоит из трех основных разделов:

* статика;
* кинематика;
* динамика.

РАЗДЕЛ I. СТАТИКА

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

***Статика*** – раздел механики, изучающий условия равновесия материальных тел или систем тел, под действием приложенных к ним сил.

***Покой*** (равновесие) – состояние тела, при котором его положение относительно инерциальной системы отсчета остается неизменным.

Одним из основных понятий в теоретической механике является понятие силы.

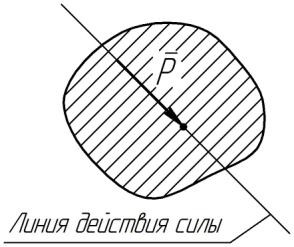


Рисунок 1.1***Сила*** – векторная величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел.

Геометрически сила изображается вектором (рисунок 1.1), который характеризуется:

1. числовым значением (модулем);
2. направлением;
3. линией действия, которая пролегает вдоль вектора силы в оба направления.

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется ***системой сил***.

Если одну систему сил можно заменить другой, и при этом тело не изменит своего кинематического состояния, то эти системы считаются ***эквивалентными***.

***Уравновешенными системами сил*** называются системы сил, которые будучи приложенными к покоящемуся телу не изменят его кинематического состояния, т.е. эквивалентные нулю.

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел, называются ***внешними***.

Силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга, называются ***внутренними***.

Основной ***задачей статики*** является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

* 1. Свободное и несвободное тело. Реакция связи

***Свободное тело*** – тело, перемещение которого ничем не ограничено.

***Несвободное тело*** – тело, перемещение которого ограничено другими телами.

Тело, ограничивающее перемещение рассматриваемого тела, является по отношению к нему ***связью***.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние разделяются на *задаваемые* или *активные* силы и *реакции связей*.

***Активная сила*** – сила, стремящаяся изменить кинематическое состояние тела.

***Пассивная сила*** – реакция связи (возникающая от действия активной силы).

Одним из основных положений механики является принцип ***освобождаемости твердых тел от связей***, согласно которому всякое несвободное тело условно можно считать свободным, если мысленно отбросить связь, наложенную на тело, заменив ее действие **реакцией связи**.

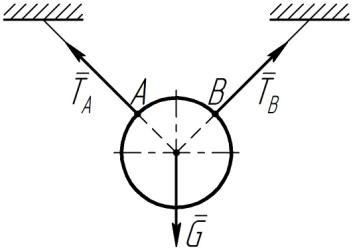
***Реакция связи*** – сила, с которой связь действует на данное тело; по модулю она равняется силе, с которой рассматриваемое тело действует на связь.

Направление реакции связи зависит от характера связи.

* 1. Основные виды связей без трения

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***1. Идеальная гладкая поверхность*** (рисунок 1.7)  Реакция направлена по общей нормали к поверхности  соприкасающихся тел. |
| Рисунок 1.7 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *а)* | *б)* | ***2. Ребро (связь в виде острия)*** (рисунок 1.8 *а*, *б*)  Реакция направлена по нормали к поверхности тела. |
| Рисунок 1.8 | |  |

Рисунок 1.9

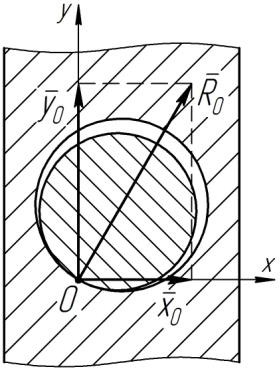
1. Гибкая связь (нерастяжимая нить, трос, канат, цепь) (рисунок 1.9)

Реакция (натяжение *T* ) направлена вдоль связи, от рассматриваемого тела.

1. ***Цилиндрический шарнир*** (рисунок 1.10)

Реакция *RO*

цилиндрического шарнира лежит в

плоскости перпендикулярной оси шарнира. Она проходит через центр *C* шарнира и точку *O* контакта соприкасающихся поверхностей, положение которой обычно не известно, поэтому реакцию шарнира

раскладывают на две неизвестные составляющие

*xO* и

*yO* , которые, обычно направляют вдоль взаимно

Рисунок 1.10

*x*2  *y*2

*O O*

перпендикулярных осей *x* и *y* . Тогда полная реакция *RO*

определится уравнением:

*RO*  .

1. ***Неподвижный цилиндрический шарнир*** (рисунок 1.11)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | → |  | → |  | *RA*  *xA*  *yA* , или по величине:  *R*  *x*2  *y*2 .  *A A A* |
|  |  | Рисунок 1.11 | |  |  |

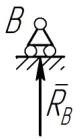


Рисунок 1.12

1. ***Подвижная шарнирная опора или шарнирная опора на катках*** (рисунок 1.12). Реакция всегда будет направлена перпендикулярно направляющей поверхности. Применяются в мостовых и других конструкциях для снятия температурных напряжений.
2. ***Неподвижный сферический шарнир*** (рисунок 1.13)**. *Подпятник***

(рисунок 1.14). Полная реакция

*RO* раскладывается на три неизвестные

составляющие

*xO* ,

*yO* ,

*zO* , направленные вдоль трех взаимно

перпендикулярных осей *x* , *y* , *z* .

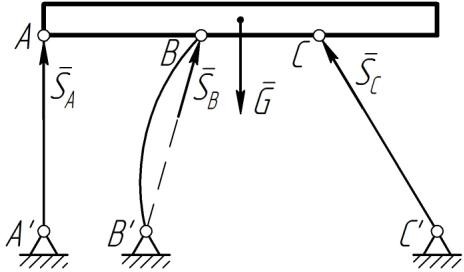
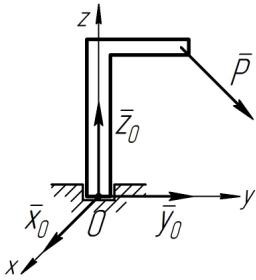
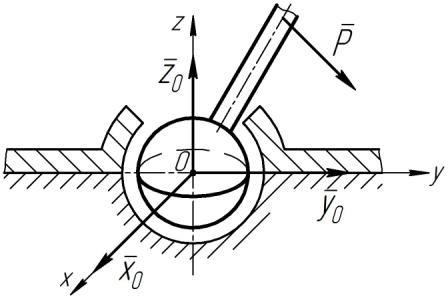


Рисунок 1.13 Рисунок 1.14 Рисунок 1.15

1. ***Жесткий невесомый стержень*** (рисунок 1.15)

Реакция *S* невесомого стержня направлена вдоль прямой,

проходящей через оси шарниров, соответственно стержня.

*A*, *A*,

*B*, *B*,

*C*, *C*,

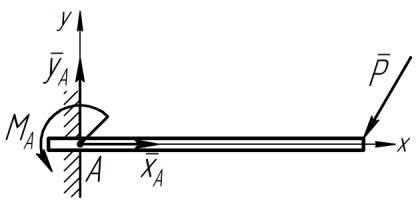


Рисунок 1.16

1. Жесткая заделка (защемление)

(рисунок 1.16)

Реактивные факторы в плоскости сводятся к двум неизвестным составляющим реакции –

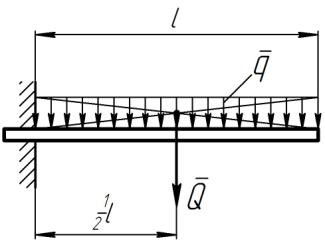
*xA* и

*yA* , и к реактивному моменту заделки

*MA* .

* 1. Распределенные силы

1. ***Равномерно-распределенная нагрузка*** (рисунок 1.17)

Характеризуется интенсивностью *q* распреде-

ленной нагрузки, *q*  H  . Для удобства расчета

 

 м 

заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной

Рисунок 1.17

силой *Q* , приложенной в центре участка приложения

распределенной нагрузки и направленной в ту же сторону, что и

распределенная нагрузка:

*Q*  *ql* ; *Q*  H.

Если нагрузка будет равномерно распределена по площади, тогда

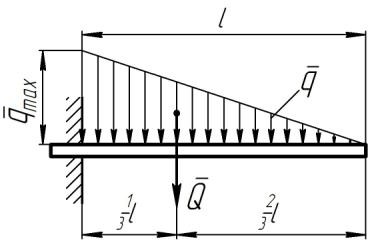
размерность *q*   H  .

 2 

м 

1. ***Линейно-распределенная нагрузка*** (рисунок 1.18)

Характеризуется максимальным значением

*q*max

интенсивности *q* распределенной нагрузки,

Рисунок 1.18

которая заменяется сосредоточенной силой *Q* ,

приложенной на расстоянии 1 *l* от максимального

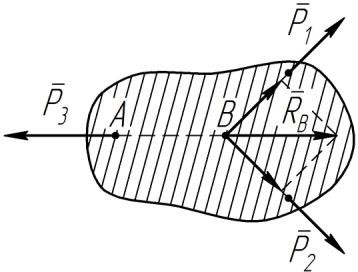
3

значения интенсивности *q* :

*Q*  1 *q l* .

2 max

* 1. еорема о равновесии трех непараллельных сил

Если свободное тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.

*Доказательство* (рисунок 2.3). Пусть на тело,

Рисунок 2.3

находящееся в равновесии, действуют система из

трех непараллельных сил

*P*1 ,

*P*2 ,

*P*3 . Следовательно

*P*1  *P*2  *P*3  0 .

Заменим силы

*P*1 и *P*2

силой

*RB* . Тогда получим уравновешенную систему

двух сил *P*3 , *R* 

эквивалентную нулю. Согласно второй аксиоме силы

*P*3 и

*RB* уравновешены в том случае, если они равны по модулю и направлены

по одной прямой в противоположные стороны, т.е.

*Р*3  *RB*

, *Р*3  *RB* .

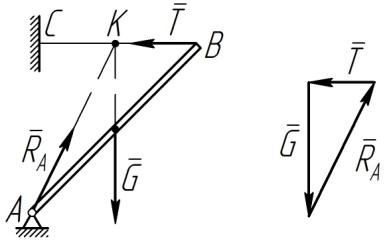


Рисунок 2.4

***Пример***. Определить реакцию в опоре балки (точке *A* ) весом *G* и натяжение нити *BC* (рисунок 2.4).

Балка *AB* закреплена в точке *A* непод- вижным шарниром и в точке *B* нитью *BC* .

Показываем вес балки. Связи заменяем реакциями связей. Реакция нити будет направлена вдоль прямой *BC* . Согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил линия действия реакции шарнира в точке *A* будет проходить через точку пересечения линий действий сил *G* и *T* (точку *K* ).

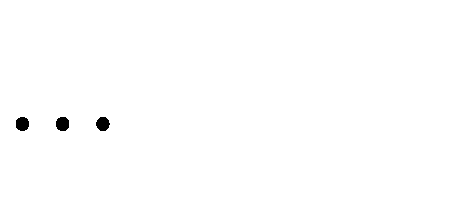
* 1. Проекция силы на ось

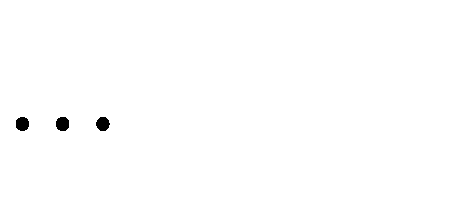
***Проекция силы на ось*** – алгебраическая величина, равная произведе- нию модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси (см. таблицу 2.1).Таблица 2.1 – Проекция силы на ось *x* при различном расположении вектора *P* относительно оси

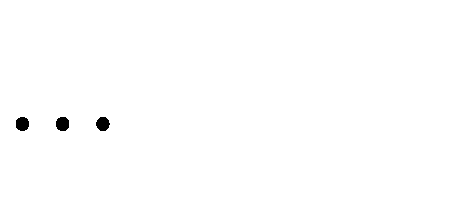
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| **  0 | 0  **  90 | **  90 | 90  ** 180 |
| *Px*  *P*cos**  *P* | *Px*  *P*cos** | *Px*  *P*cos**  0 | *Px*  *P*cos**  *P*cos ** |

* 1. Аналитическое определение равнодействующей сходящейся системы сил

Проекция равнодействующей *сходящейся системы сил* на ось равна сумме проекций всех сил, входящих в эту систему, на ту же ось, т.е.

*Rx*  *P*1*x*  *P*2 *x*   *Pnx*  *Pix* ;

*Ry*  *P*1*y*  *P*2 *y*   *Pny*  *Piy* ;

*Rz*  *P*1*z*  *P*2 *z*   *Pnz*  *Piz* .

*R*   ;

*R*2  *R*2  *R*2

*x y z*





*P* 



2





*iy*



2

*ix*

*P* 





*P*

*iz*



2

Направление вектора равнодействующей *R* сходящейся системы сил по отношению к координатным осям определяется направляющими

косинусами:

ен

в центре *O* и направлен перпендикулярно плоскости *OAB* , в такую сторону, чтобы, смотря ему навстречу, видеть силу *P* стремящуюся вращать плоскость *OAB* против хода часовой стрелки.

По модулю момент силы *P* относительно центра *O* будет равен:

где *h* – плечо, м.

*MO* *P*   *r*  *P*

 *rP*sin*r* , *P*   *Pr* sin**  *Ph* ,

Размерность момента силы H  м.

***Момент силы относительно точки*** – произведение модуля силы на

плечо:

*MA* *P*   *Ph*

* момент силы *P* относительно точки *A* .

***Плечом*** ( *h* ) называется кратчайшее расстояние от точки (полюса), относительно которой определяем момент, до линии действия силы.

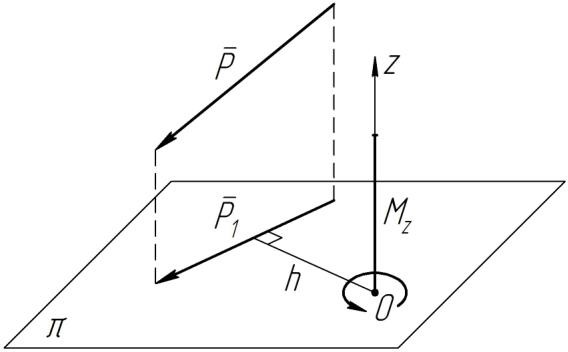
Момент силы считается положительным «  », если мы условно видим обход заданного вектора силы *P* вокруг полюса (точки *A* ) против хода часовой стрелки, и отрицательным « » – если по ходу часовой стрелки.

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 3.2 | ***Пример***. Определить моменты сил *P*1 и *P*2 относи- тельно точки *A* (рисунок 3.2).  *MA* *P*1   *P*1*h*1 ;  *MA* *P*2   *P*2*h*2 . |

Свойства момента силы относительно точки (центра):

1. значение момента силы не изменится, если силу переместить вдоль линии ее действия в любую точку;
2. момент силы относительно точки (центра) равен нулю, если линия действия силы проходит через полюс.

***Момент силы относительно оси*** (рисунок 3.3). Чтобы найти момент

силы *P* относительно оси *z* , необходимо спроецировать силу на плоскость ** (плоскость вращения), перпендикулярную оси вращения *z* , и

найти момент полученной проекции *P*1

Рисунок 3.3сительно точки *O* пересечения оси с плоскостью.

***Момент силы относительно оси*** – произведение модуля проекции

*P*1 силы *P* на плоскость ** , перпендикулярную оси *z* , на ее плечо *h* ,

относительно точки *O* пересечения оси с плоскостью:

*Mz*  *P*1*h* .

Момент силы относительно оси равен нулю, когда:

1. линия действия силы параллельна оси, относительно которой определяется момент силы;
2. линия действия силы пресекает ось, относительно которой определяется момент силы;

т.е. *момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось лежат в одной плоскости*.

* 1. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

*Момент равнодействующей системы сил относительно какого-либо центра равняется геометрической сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно того же центра:*

*MO* *R*   *MO* *Pi* 

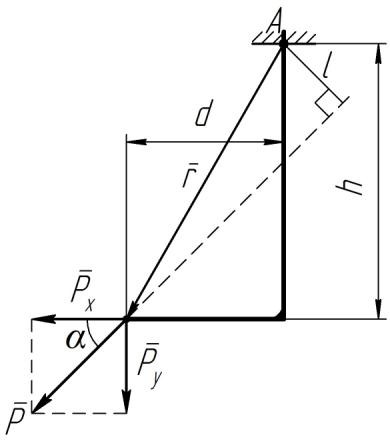
* относительно центра *O* .

*Момент равнодействующей системы сил относительно точки или оси равен алгебраической сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно той же точки или оси:*

*MA* *R*   *MA* *Pi*  – относительно точки *A* ;

*Mx* *R*   *Mx* *Pi* 

* относительно оси *x* .

***Пример*** (рисунок 3.4). Пусть к телу приложена сила *P* . Определить момент этой силы относительно точки *A* .

Момент силы *P* относительно точки *A*

будет равен:

Рисунок 3.4

Так как

*MA* *P*   *r*  *P* .

*P*  *Px*  *Py* , то

*MA* *P*  *r*  *Px*  *r*  *Py* .

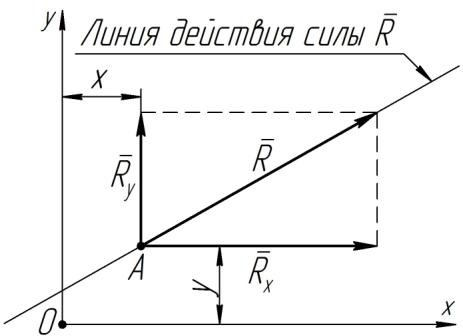
По модулю момент силы *P* относительно точки *A* будет равен:

*MA* *P*   *P*  *l* .

Если силу *P* разложить на составляющие, то момент этой силы относительно точки *A* будет равен алгебраической сумме моментов этих составляющих относительно той же точки:

*MA* *P*  *Px*  *h*  *Py*  *d*  *P* cos**  *h*  *P*sin**  *d* .

* 1. Уравнение линии действия равнодействующей плоской системы сил

Пусть равнодействующая *R* плоской системы сил приложена в точке *A* (рисунок 3.5). Вектор *R* расположен таким

образом, что его проекции

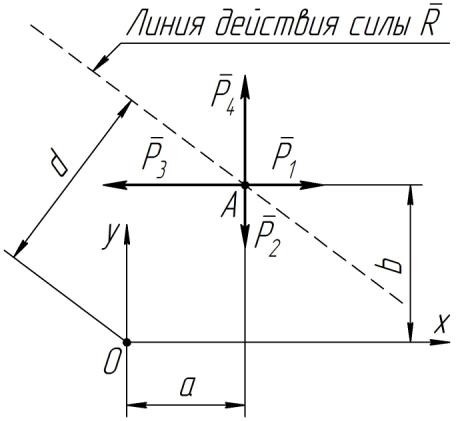
*Rx* и *Ry* на

Рисунок 3.5

координатные оси *x* и *y* направлены в стороны положительных направлений соответствующих осей.

Согласно теореме Вариньона:

*MO* *R*   *Ry x*  *Rx y* ; (3.1)*Ry x*  *Rx y*  *MO* *R*   0 . (3.2) Уравнение (3.2) есть уравнение линии действия равнодействующей.

***Пример***. Определить уравнение линии действия равнодействующей *R* плоской

сходящейся системы сил *P*1, *P*2 , *P*3 , *P*4 ,

приложенных в точке *A* (рисунок 3.6), если

2

4

*P*1 10 Н ,

*P*  8 Н ,

*P*3 18 Н,

*P* 14 Н ,

Рисунок 3.6

*a*  3 м , *b*  4 м.

Сначала определяем проекции равно- действующей на координатные оси:

*Rx*  *Pix*  *P*1  *P*3 10 18  8 Н;

*Ry*  *Piy*  *P*2  *P*4  8 14  6 Н .

Далее определяем сумму моментов всех сил относительно произволь- ной точки, например, относительно начала координат (точки *O* ):

*MO* *Pi*   *P*1*b*  *P*2*a*  *P*3*b*  *P*4*a* ;

*MO* *Pi*   10  4  8 3 18 4 14  3  50 Н м .

Так как*MO* *Pi*   *MO* *R* , согласно формуле (3.1), получим:

*MO* *Pi*   *Ry x*  *Rx y* ;

50  6*x*  8 *y* ;

Таким образом, получили уравнение (3.3) линии действия равнодействующей *R* , которая находится на расстоянии *d* от моментной точки *O* :

*MO* *R* 



*d* .

*R*

По величине сила *R* будет равна:

*R*    10 Н .

*R*2  *R*2

*x y*

82  62

Тогда кратчайшее расстояние *d* от моментной точки *O* до линии

действия силы *R* составит:

*MO* *R*  50

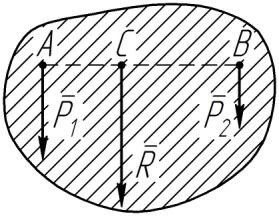
 . 

*d* 5 м

*R* 10

4 ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

* 1. Сложение двух параллельных сил

Равнодействующая *R* двух параллельных сил

*P*1 и

*P*2 одного направления (рисунок 4.1) имеет такое же

Рисунок 4.1

направление, а ее модуль равен алгебраической сумме модулей слагаемых сил:

*R*  *P*1  *P*2 .

Точка *C* приложения равнодействующей делит отрезок *AB* на части обратно пропорциональные модулям сил:

*AC*  *P*2 .

*BC P*1

По свойству пропорций:

*P*1

 *P*2 

*P*1  *P*2

*BC AC BC*  *AC*

Откуда следует равенство:

*P*1  *P*2

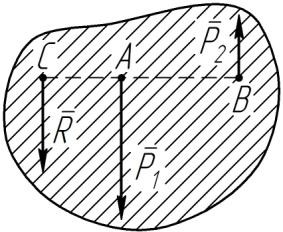
 *R* . (4.1)

*BC AC AB*

Равнодействующая *R* двух параллельных сил

*P*1 и

*P*2 противоположного направления (рисунок 4.2) имеет

Рисунок 4.2

направление силы, большей по модулю, и модуль, равный разности модулей этих сил:

*R*  *P*1  *P*2 .

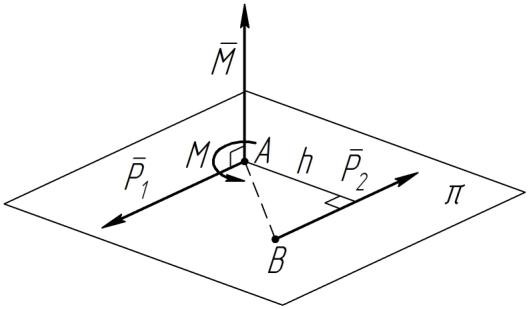
Точка *C* приложения равнодействующей лежит на продолжении отрезка *AB* за точкой приложения большей силы:

*P*1  *P*2

 *R* . (4.2)

*BC AC AB*

* 1. Пара сил. Момент пары сил

***Пара сил*** – совокупность двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рисунок 4.3).

*Пара сил* – это самостоятельный, не

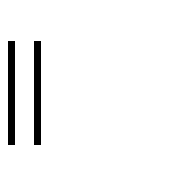
Рисунок 4.3

1. плоскостью действия;
2. направлением вращения;

упрощаемый элемент статики, харак- теризующийся:

1. модулем (величиной) момента пары.

*P*2  *P*1 ; *P*1 *P*2 .



*M* *P*1, *P*2   *AB*  *P*2  *BA* *P*1 ;

*M* *P*1, *P*2   *P*1*h*  *P*2*h* ,

где *h* – кратчайшее расстояние между линиями действия сил, состав- ляющих пару, м.

Размерность момента пары сил H  м.

Момент пары сил *P*1, *P*2 

изображают вектором *M* , который

перпендикулярен плоскости действия пары и направлен в ту сторону, откуда видно пару сил стремящуюся вращать плоскость ее действия против хода часовой стрелки.

Момент пары сил считается положительным «  », если пара сил

стремится вращать плоскость в сторону противоположную ходу часовой стрелки, и отрицательным « » – если в сторону хода часовой стрелки.

|  |  |
| --- | --- |
| Момент положителен « **+** »   | Момент отрицателен « **–** »   |

* 1. Свойства пар

Проекция пары на любую ось равна нулю, что следует из определения пары сил.

Не изменяя действия пары на твердое тело, пару можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары, а так же изменять ее силы и плечо, сохраняя неизменным модуль и направление момента пары.

Таким образом, момент пары сил, есть вектор свободный, т.е. не имеющий определенной точки приложения.

6 АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

1. ***Равновесие пространственной произвольной системы сил***, т.е. системы сил, линии действия которых произвольно расположены в пространстве (рисунок 6.1).

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 6.1 |  *Pix*  0; *Mx* *Pi*   0;   *Piy*  0; *M y* *Pi*   0;   *Piz*  0; *Mz* *Pi*   0. |

*Для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси ( x , y , z ) и суммы моментов всех сил относительно*

*этих осей равнялись нулю*.

Примечание. Оси, относительно которых составляются уравнения, не должны лежать в одной плоскости и быть параллельны.

1. ***Равновесие пространственной параллельной системы сил***, т.е. системы сил расположенных в пространстве, линии действия которых параллельны (рисунок 6.2).

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 6.2 | Пусть линии действия всех сил параллельны оси *Oz* , тогда:   *Piz*  0;  *Mx* *Pi*   0;  *M y* *Pi*   0. |

См. рисунок 6.2

*Для равновесия пространственной параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось параллельную линиям действия сил (ось Oz ) равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух оставшихся осей ( x , y ) также*

*равнялись нулю*.

1. ***Равновесие сходящихся систем сил***, т.е. систем сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рисунки 6.3 и 6.4).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Пространственная сходящаяся* | | *Плоская сходящаяся* | |
| Рисунок 6.3 |  *Pix*  0;   *Piy*  0;   *Piz*  0. | Рисунок 6.4 |  *Pix*  0;   *Piy*  0. |

См. рисунок 6.3

*Для равновесия пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси ( x , y , z ) равнялись нулю*.

См. рисунок 6.4

*Для равновесия плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две координатные оси ( x , y или x , z или y , z ) равнялись нулю*.

1. ***Равновесие плоской произвольной системы сил***, т.е. системы сил произвольно расположенных на плоскости (рисунок 6.5).

Существует III вида (формы) условий равновесия плоской произвольной системы сил.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Рисунок 6.5 | Первый вид (основной):   *Pix*  0;   *Piy*  0;  *MO* *Pi*   0. | Второй вид:   *Pix*  0;  *M A* *Pi*   0;  *MB* *Pi*   0,  прямая  *AB*  *Ox* . | Третий вид:  *M A* *Pi*   0;  *MB* *Pi*   0;  *MC* *Pi*   0,  точки *A* , *B* и *C*   одной прямой. |

* 1. *Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две оси, лежащие в плоскости действия системы сил, равнялись нулю, и сумма моментов относительно любой точки (например точки O ), принадлежащей данной плоскости, также равнялась нулю*.
  2. *Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на любую ось, принадлежащую плоскости действия системы сил (например ось Ox ), равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух любых точек, принадлежащих данной плоскости (например точки A и B ), также равнялись нулю*.

Примечание. Прямая *AB* не должна быть перпендикулярна оси *Ox* .

* 1. *Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно трех произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точек A, B и C ), равнялись нулю*.

Примечание. Точки *A* , *B* и *C* не должны лежать на одной прямой.

1. ***Равновесие плоской параллельной системы сил***, т.е. системы сил расположенных на плоскости, линии действия которых параллельны (рисунок 6.6).

Существуют II вида (формы) условий равновесия плоской параллельной системы сил.

Пусть линии действия всех сил параллельны оси *Oy* .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рисунок 6.6 | Первый вид (основной):  *Piy*  0;  *MO* *Pi*   0. | Второй вид:  *MA* *Pi*   0;  *MB* *Pi*   0,  прямая *AB Oy* . |

* 1. *Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил (например Oy ), равнялась нулю, и сумма моментов всех сил*

*относительно какой-либо точки, принадлежащей плоскости действия системы сил (например точки O ), также равнялась нулю*.

* 1. *Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точек A и B ), равнялись нулю*.

Примечание. Точки *A* и *B* не должны лежать на прямой параллель- ной линиям действия сил.

7 ФЕРМА

***Ферма*** – это шарнирно-стержневая, геометрически неизменяемая конструкция. Фермы бывают *плоские* и *пространственные*.

Ферма состоит из стержней (обозначенных цифрами) и узлов (обозначенных буквами). Рассмотрим плоскую ферму (рисунок 7.1).

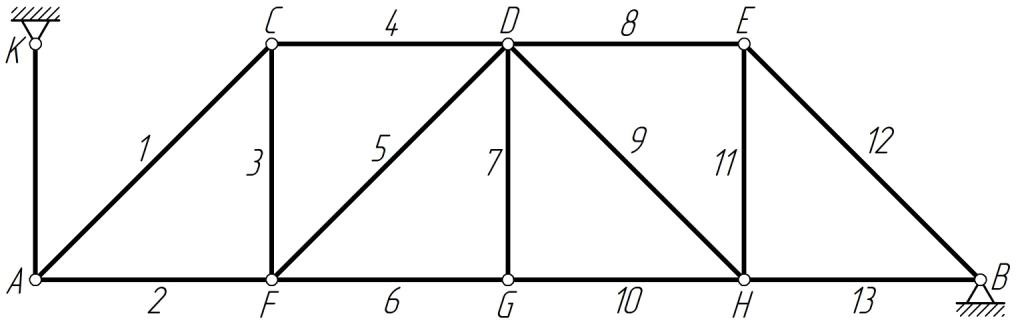


Рисунок 7.1

*1*, *4*, *8*, *12* – *стержни верхнего пояса*.

*2*, *6*, *10*, *13* – *стержни нижнего пояса*.

*3*, *7*, *11* – *стойки*.

*5*, *9* – *раскосы*.

Стержень *AK* называется *опорным*. Расстояние *AB* – *пролет фермы*.

Расчет фермы сводится к определению усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок. Для упрощения расчета фермы принимаем некоторые допущения:

1. стержни, из которых состоит ферма, прямолинейны и невесомы;
2. узлы выполнены в виде шарниров без трения;
3. внешние нагрузки приложены к узлам.

Вследствие этих допущений, усилия в стержнях направлены вдоль осей стержней, т.е. стержни работают только на растяжение или на сжатие.

Перед началом расчета фермы необходимо вычислить ***статическую определимость фермы***:

*k*  2*m*  3,

где *k* – число стержней (опорные стержни не учитываются);

*m* – число узлов.

Если Если

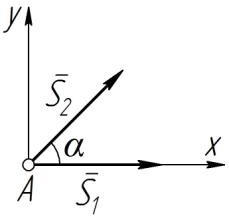
*k*  2*m*  3, то ферма нежесткая.

*k*  2*m*  3, то ферма статически неопределима.

Существует несколько методов (способов) расчета ферм:

1. метод вырезания узлов (аналитический и графический);
2. метод Риттера (метод сечений);
3. метод Максвелла-Кремоны.

7.1 Леммы о нулевых стержнях

Существуют способы позволяющие определить нагрузку в некоторых стержнях фермы без расчета.

1. Если в незагруженном узле сходятся два стержня

под углом

**  180 , то усилия в них равны нулю

Рисунок 7.2

(рисунок 7.2):

*S*1  0 ;

*S*2  0 .

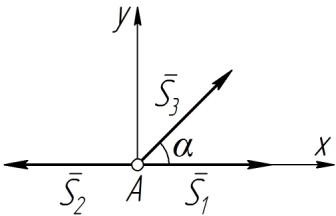
1. Если в незагруженном узле сходятся три стержня, причем два из них лежат на одной прямой, а третий под углом к ним (**  180 ), то усилие в третьем равно нулю, а усилия в первых двух будут

Рисунок 7.3

равны между собой (рисунок 7.3):

*S*1  *S*2 ;

*S*3  0 .

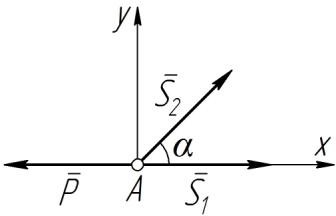
1. Если в загруженном узле сходятся два стержня под углом **  180 , причем линия действия внешней силы совпадает с осью одного из стержней, то усилие во втором будет равно нулю, а в первом равно

Рисунок 7.4

внешней силе (рисунок 7.4):

*S*1  *P* ;

*S*2  0 .

***Пример***. Определить нулевые стержни с помощью лемм (рисунок 7.5).

*BK* – опорный стержень.

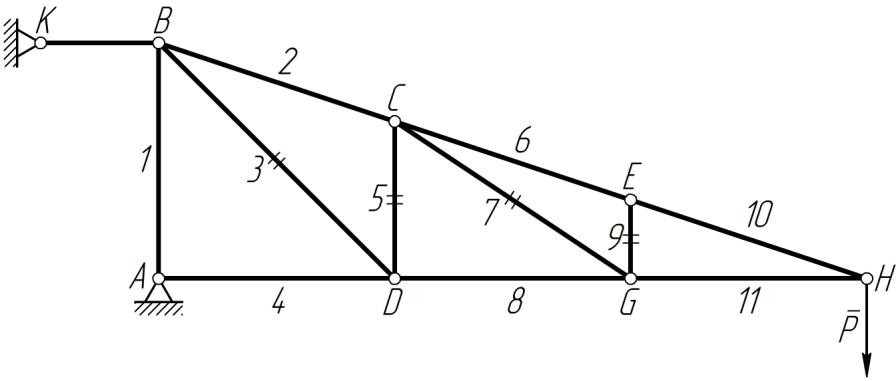


Рисунок 7.5

Рассматривая поочередно узлы *E* , *G* , *C* , и *D* получим, что стержни

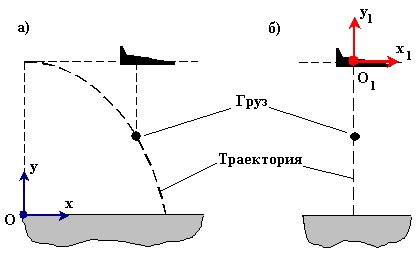
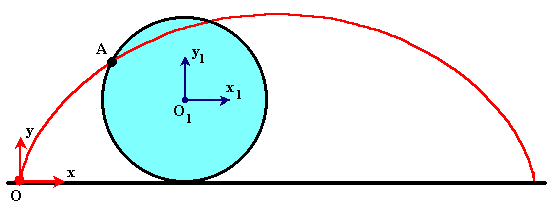
*9*, *7*, *5*, *3* – нулевые, согласно второй лемме.

1. КИНЕМАТИКА

# **Лекция 1**

1. Краткое содержание: Введение в кинематику. Кинематика точки. Понятие траектории. Способы задания движения: векторный, координатный и естественный. Скорость точки при различных способах задания движения.
2. **Введение.** Кинематикой называется раздел теоретической механики в котором изучаются движения материальных объектов таких как точка и твердое тело, без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих это движение.
3. Такое изучение движения материальных объектов не требует учета материальных характеристик этих объектов - массы, моментов инерции и пр.
4. Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.
5. Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.
6. В курсе теоретической механики кинематика делится на кинематику точки и кинематику твердого тела.

## **Кинематика точки**

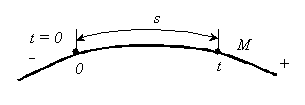
1. В кинематике точки рассматриваются характеристики движения точки, такие, как скорость и ускорение и методы их определения при различных способах задания движения.
2. **Траекторией точки** называется геометрическое место ее последовательных положений в пространстве с течением времени относительно рассматриваемой системы отсчета.
3. Форма траектории может быть прямолинейной или криволинейной и зависит от выбранной системы координат.
4. **Пример 1.**
5. С горизонтально летящего относительно Земли самолета сброшен груз. Сопротивление воздуха отсутствует.
6. Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета Oxy, жестко связанной с Землей, будет парабола. Рис. 1.1а).
7. Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета O1x1y1, жестко связанной с летящим самолетом, будет прямая линия. Рис. 1.1б).
8. Рис. 1-1
9. **Пример 2.**
10. Колесо радиуса R катится по горизонтальной прямой без скольжения. Точка А на ободе колеса совершает сложное движение.
11. Траекторией точки А относительно системы отсчета Oxy, жестко связанной с прямой, будет кривая под названием циклоида.
12. Траекторией точки А относительно системы отсчета O1x1y1, которая движется поступательно и начало отсчета которой находится в центре масс колеса, будет окружность радиуса R, центр которой находится в точке O1.
13. Рис. 1-2
14. **Способы задания движения.**
15. Движение точки можно изучать, используя любую систему координат. Рассмотрим три способа задания движения: векторный, координатный и естественный.
16. **Векторный способ.**
17. Будем рассматривать случай декартовой прямоугольной системы координат. Движение точки относительно рассматриваемой системы отсчета задано, если известен радиус-вектор  этой точки как функция времени, т.е.
18. (1-1)
19. Векторный способ обычно применяется для теоретического изложения кинематики точки.

### **Координатный способ.**

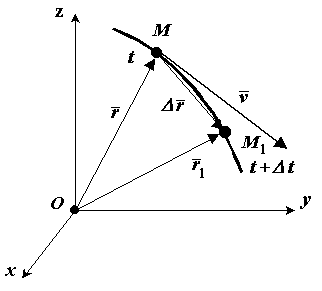
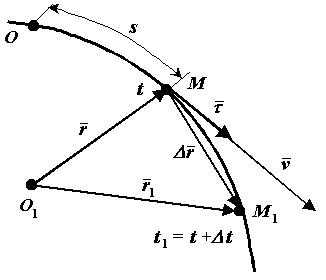
#### Движение точки можно изучать используя любую систему координат. Рассмотрим случай декартовой прямоугольной системы координат.

#### Движение точки задано, если известны координаты точки, как непрерывные, дважды дифференцируемые функции времени, т.е.

#### , , (1-2)

1. Уравнения движения есть также уравнения траектории точки в параметрической форме. Параметром является время *t*.
2.  (1-3)
3. Уравнения траектории в координатной форме получаются из уравнений (1-2) исключением параметра *t*. Получаются уравнения двух поверхностей , . Пересечение этих поверхностей дает кривую в пространстве – траекторию точки.
4. **Примеры:**
5. **Естественный способ задания движения.**
6. При естественном способе задания движения задаются траектория точки и закон движения точки по траектории. Движение точки рассматривается относительно фиксированной системы отсчета.
7. Для задания закона движения точки по траектории необходимо выбрать на траектории точку О, принимаемую за начало отсчета. Кроме того, необходимо задать начало отсчета времени.
8. Рис. 1.3
9.  - закон движения точки по траектории.
10. Функция  должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой.
11. От задания движения в декартовых координатах можно перейти к его заданию естественным способом. Закон движения точки по траектории в дифференциальной форме через декартовы координаты выражается в виде
12. 
13. и после интегрирования - в конечной форме
14. 
15. если 
16. **Примеры:**

## **Скорость точки**

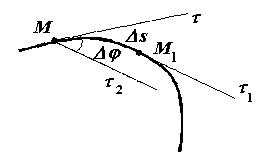
1. Одной из основных характеристик движения точки является ее скорость относительно выбранной системы отсчета.
2. **Скорость точки при векторном способе задания движения**
3. Положение движущейся точки *М* относительно системы отсчета в момент времени  определяется радиус-вектором . В другой момент времени  точка займет положение *М*1 с радиус-вектором . За время  радиус-вектор движущейся точки изменится на .
4. Средней скоростью  называется отношение изменения радиус-вектора  к изменению времени .
5. Рис. 1.4  (1-4)
6. Скорость точки равна первой производной по времени от ее радиус-вектора.
7.  (1-5)
8. **Скорость точки при координатном способе задания движения**
9. Разложим радиус-вектор и скорость на составляющие, параллельные осям координат. Получим
10. 
11.  (1-6)
12. После дифференцирования
13.  (1-7)
14. Отсуда следует
15.    (1-8)
16. Проекция скорости точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки.
17. Модуль скорости и направляющие косинусы равны:
18. 
19.   
20. Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат *Ox*  и *Oy* в этой плоскости, получим:
21.  
22. Для прямолинейного движения точки координатную ось, например ось *Ox*, направляем по траектории. Тогда
23.  
24. **Скорость точки при естественном способе задания движения.**
25. Пусть скорость точки задана естественным способом, т.е. заданы траектория точки и закон ее движения по траектории .
26. Вычислим скорость точки.
27. Используем радиус-вектор . движущейся точки, начало которого находится в неподвижной точке 
28. 
29.  - единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону возрастающих расстояний.
30. Рис. 1.5
31.  (1-9)
32. При  направления векторов  и  совпадают. Если точка движется в сторону убывающих расстояний, то  и направления векторов  и  противоположны.
33. При  вектор скорости направлен по , т.е. в сторону возрастающих расстояний; при  он имеет направление, противоположное , т.е. в сторону убывающих расстояний.
34.  - алгебраическая скорость точки, проекция скорости  на положительное направление касательной к траектории.
35. Естественное задание движения точки полностью определяет скорость по величине и направлению.

# **Лекция 2**

Краткое содержание: Геометрические понятия: кривизна кривой, радиус кривизны, оси естественного трехгранника. Дифференцирование единичного вектора. Ускорение точки при различных способах задания движения. Частные случаи движения точки.

**Геометрические понятия**

В точке *М* кривой линии проведем касательную *М*. В точке *М1* построим касательную *М1.* Между точками *М* и *М1* расстояние *s*.

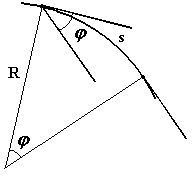
В общем случае пространственной кривой касательные *М* и *М1* будут скрещиваться. Проводим в точке *М* прямую линию *М2* параллельную *М1.* Угол ** между линиями *М* и *М2* называется *углом смежности*.

**Кривизной кривой k** в точке М называется предел, к которому стремится угол смежности, приходящийся на единицу расстояния s, при s , стремящемся к нулю, т.е.

Рис. 2-1

 (2-1)

**Радиусом кривизны кривой ** в точке *М* называется величина, обратная кривизне кривой в этой точке, т.е.

 (2-2)

Вычислим радиус кривизны дуги окружности радиуса R. Дуга окружности длиной *s*, опирающаяся на центральный угол **, выражается зависимостью  

Рис. 2-2

Через пересекающиеся прямые *М* и *М2* проводим плоскость. Предельное положение этой плоскости при совпадении в пределе точек *М* и *М1* называется соприкасающейся плоскостью кривой в точке *М.*

В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость для всех точек кривой является сама плоскость, в которой расположена эта кривая.

### **Естественный трехгранник**

Построим в точке *М* кривой линии естественные оси этой кривой.

Первой естественной осью является касательная *М*. Ее положительное направление совпадает с направлением единичного вектора .

Перпендикулярно касательной *М*располагается нормальная плоскость кривой. Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости называется главной нормалью. По главной нормали *Мn* внутрь вогнутости кривой направим единичный вектор . Он определяет положительное направление второй оси. Нормаль, перпендикулярная главной нормали называется бинормалью. Положительное направление бинормали определяется единичным вектором 

Три взаимноперпендикулярные оси *М* *Мn* и *Мb* называются естественными осями кривой. Эти оси образуют в точке *М* естественный трехгранник.

### **Дифференцирование единичного вектора**

Вычисление производной от единичного вектора  по времени дает следующий результат  Радиус кривизны считаем положительным.

Единичный вектор  перпендикулярен вектору , направ-ленному по касательной к кривой и лежит в соприкасающейся плоскости. Вектор  направлен по главной нормали кривой в сторону ее вогнутости.

**Ускорение точки**

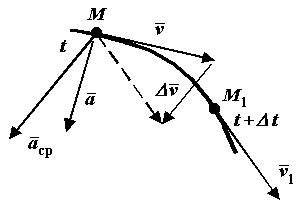
Пусть движущаяся точка *М* в момент времени имеет скорость . В другой момент времени  эта точка будет занимать положение *М1* и иметь скорость . Чтобы изобразить прираще-ние скорости  за время , перенесем вектор  параллельно самому себе в точку *М*.

Рис. 2-3

Средним ускорением точки  за время  называется отношение вектора приращения скорости  к изменению времени .

 (2-3)

Ускорением точки  в момент времени  называется предел к которому стремится среднее ускорение при , стремящемся к нулю. Ускорение точки равно первой производной по времени от скорости точки или второй производной по времени от радиус-вектора.

 (2-4)

**Ускорение точки в декартовых координатах**

Разложим ускорение и скорость точки на составляющие, параллельные осям декартовой системы координат. Получим



 (2-5)

После дифференцирования

 (2-6)

Отсуда следует

   (2-7)

Проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль ускорения и направляющие косинусы равны:

 (2-8)

   (2-9)

Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат *Ox*  и *Oy* в этой плоскости, получим:

 ****

Для прямолинейного движения точки координатную ось, например ось *Ox*, направляем по траектории. Тогда

**Ускорение точки при естественном способе задания движения.**

Скорость точки равна .

В соответствии с определением ускорения

.

Или  (2-10)

Таким образом получено разложение вектора ускорения точки по осям естественного трехгранника.

Часть ускорения  (2-11)

называется **касательной составляющей ускорения***.*

Другая часть ускорения  (2-12)

называется **нормальной составляющей ускорения.**  Она направлена внутрь вогнутости траектории, т.е. в сторону положительного направления единичного вектора главной нормали .

Формулы для проекции ускорения на естественные оси:

Касательная составляющая , при  направлена по направлению вектора , при  противоположно .

**Вычисление проекций ускорения точки на естественные оси**

Пусть движение точки задано в координатной форме. Проекция ускорения на касательную к траектории равна , алгебраическая скорость с точностью до знака равна модулю скорости , а модуль скорости равен

. Вычислим первую производную по времени от этого выражения, получим



Проекция ускорения на нормаль к траектории равна .

Радиус кривизны траектории в текущей точке равен .

**Частные случаи движения точки**

##### ***Равномерное движение***

При равномерном движении точки по траектории любой формы модуль скорости *v=const*, следовательно постоянна и алгебраическая скорость *v*, которая может отличаться от *v* только знаком.

Так как , то . Если принять при  , то после интегрирования получим

 или 

Можно также записать  

##### ***Равнопеременное движение***

Равнопеременным движением называется такое движение точки по траектории любой формы, при котором касательное ускорение постоянно, т.е. *a* =*const* Движение называется *равноускоренным* если алгебраическая скорость *v* и касательное ускорение *a* имеют одинаковые знаки. Если *v* и *a* имеют разные знаки, то назыется *равнозамедленным* . Получим формулы для алгебраической скорости и расстояния при равнопеременном движении.

Имеем:

, .

Если принять при , то после интегрирования получим

 или .

Можно также записать  

Далее  и после интегрирования



или .

Можно также записать 



Если решить квадратное уравнение, то можно найти .

# **Лекция 3**

Краткое содержание: Скорость и ускорение точки в полярных координатах.

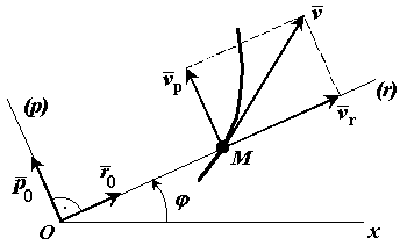
**Скорость и ускорение точки в полярных координатах**

Рассмотрим движение точки в плоскости. В этом случае движение можно задать в полярных координатах. Для этого примем какую-либо точку *О* плоскости за полюс и проведем из нее полярную ось, например ось *Ox*. Положение движущейся точки *М* на плоскости известно, если заданы радиус *r* и полярный угол ** как функции времени, т.е.

 и . (3-1)

Эти уравнения называются ***уравнениями движения точки в полярных координатах***. Если из уравнений (3-1) исключить параметр - время *t*, то получим уравнение траектории в полярных координатах: .

Введем единичный вектор , направленный по радиус-вектору от полюса *О*  к точке *М*. Тогда .

Для скорости  получаем выра-жение

Производная от единичного вектора по времени равна 

(без доказательства)

 - единичный вектор,направление которого получается поворотом вектора  на 900 в положительном направлении угла  .

После этого для скорости  получаем выражение 

Это разложение скорости точки на радиальную  и трансверсальную (поперечную)  составляющие, т.е.

 - радиальная скорость;  - трансверсальная скорость.

Модуль скорости равен .

Определим ускорение точки 

После дифференцирования получаем 

Получили разложение ускорения точки на радиальную **** и трансверсальную (поперечную)  составляющие, т.е.

 - радиальная скорость;

 - трансверсальная скорость.

Модуль ускорения равен .

**Частные случаи:**

1. Если , то имеем прямолинейное движение по прямой ***Or*** .

В этом случае  и

2. Если , то имеем движение по окружности .

В этом случае  и

 - угловая скорость вращения радиус-вектора,  - его угловое ускорение.

# **Лекция 4**

Краткое содержание: Задачи кинематики твердого тела. Виды движения твердого тела. Число степеней свободы твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела.

## **КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Абсолютно твердым телом** называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;
2. определение кинематических характеристик (траектория, скорость и ускорение) движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

1. поступательное движение;
2. вращение вокруг неподвижной оси;
3. плоское движение;
4. вращение вокруг неподвижной точки;
5. свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела:

### Степени свободы твердого тела

Числом степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета.

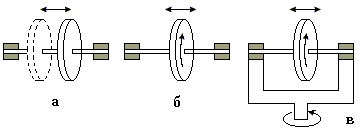
Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.

Рис. 4-1

Рассмотрим пример. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис. а), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы - положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис. б), то он приобретает еще одну [степень свободы](/db/search.html?not_mid=1177773&words=%F1%F2%E5%EF%E5%ED%FC%20%F1%E2%EE%E1%EE%E4%FB) - к координате x добавляется угол поворота  диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис. в), то число степеней свободы становится равным трем – к x и  добавляется угол поворота рамки .

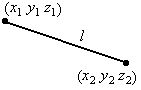
Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы: например декартовы координаты ***x, y*** и ***z***. Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (***r, , z***) и сферической (***r, , ***) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат ***xОy,*** то координаты ***x*** и ***y*** определяют положение точки на плоскости, акоордината  ***z*** тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины ***l.*** Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.

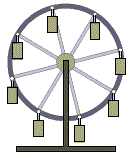
Уравнение  является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют () пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно () шести.

Свободное твёрдое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащие на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

**Поступательное движение твердого тела.**

**Поступательным движением** твёрдого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жёстко скреплённая с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени.

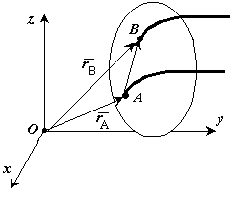
Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках относительно Земли.

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и кривыми, в том числе окружностями.

Рис. 4-2

**Теорема.** При поступательном движении твёрдого тела траектории, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы.

Если выбрать две точки твердого тела А и В, то радиус-векторы этих точек связаны соотношением . Траектория точки А это кривая, которая задается функцией , а траектория точки В это кривая, которая задается функцией . Траектория точки В получается переносом траектории точки А в пространстве вдоль вектора , который не меняет своей величины и направления во времени. Следовательно, траектории всех точек твердого тела одинаковы.

Продифференцируем по времени выражение .

Получаем , так как . Продифференцируем по времени скорости и получим выражение .

Рис. 4-3

Следовательно, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы. Что и требовалось доказать.

Поступательное движение твёрдого тела полностью характеризуется движением одной любой его точки.

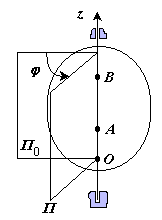
Твёрдое тело при поступательном движении имеет три степени свободы.

Для задания движения твердого тела в декартовой системе координат достаточно знать координаты  любой его точки.

Функции  называются **уравнениями поступательного движения твердого тела**.

**Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси**

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки. Эта прямая называется **осью вращения тела**.

Пусть точки A и B неподвижны. Вдоль оси вращения направим ось . Через ось вращения проведём неподвижную плоскость  и подвижную , скреплённую с вращающимся телом (при  ).

Положение плоскости  и самого тела определяется двугранным углом между плоскостями  и . Обозначим его . Угол  называется **углом поворота тела**.

Положение тела относительно выбранной системы отсчета однозначно определяется в любой момент времени, если задано уравнение , где  - любая дважды дифференцируемая функция времени. Это уравнение называется **уравнением вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси**.

Рис. 4-4

У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра – угла .

Угол  считается положительным, если он откладывается против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном направлении. Траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях перпендикулярных оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси введём понятия угловой скорости и углового ускорения.

**Алгебраической угловой скоростью** тела в какой-либо момент времени называется первая производная по времени от угла поворота в этот момент, то есть .

Угловая скорость является положительной величиной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелке, потому что угол поворота при этом убывает.

Размерность угловой скорости по определению: 

В технике угловая скорость – это частота вращения, выраженная в оборотах в минуту. За одну минуту тело повернётся на угол , где n - число оборотов в минуту. Разделив этот угол на число секунд в минуте, получим



**Алгебраическим угловым ускорением тела** называется первая производная по времени от угловой скорости, то есть вторая производная от угла поворота т.е. 

Размерность углового ускорения по определению: 

Введем понятия векторов угловой скорости и углового ускорения тела.

 и , где  - единичный вектор оси вращения. Векторы  и  можно изображать в любых точках оси вращения, они являются скользящими векторами.

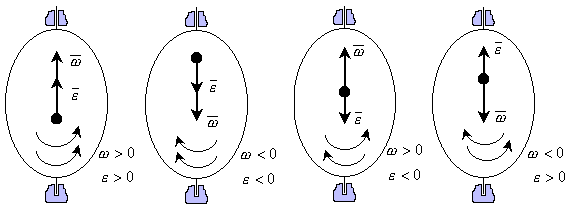
Алгебраическая угловая скорость это проекция вектора угловой скорости на ось вращения. Алгебраическое угловое ускорение это проекция вектора углового ускорения скорости на ось вращения.

Рис. 4-5

Если  при , то алгебраическая угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается ускоренно в рассматриваемый момент времени в положительную сторону. Направление векторов  и  совпадают, оба они направлены в положительную сторону оси вращения .

При  и  тело вращается ускоренно в отрицательную сторону. Направление векторов  и  совпадают, оба они направлены в отрицательную сторону оси вращения .

Если  при , то имеем замедленное вращение в положительную сторону. Векторы  и  направлены в противоположные стороны.

Если  при , то имеем замедленное вращение в отрицательную сторону. Векторы  и  направлены в противоположные стороны.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (если нельзя изобразить вектора). Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела, а дуговая стрелка для углового ускорения – направление, в котором увеличивается алгебраическая угловая скорость. Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного их направления противоположны.

**Частные случаи вращения твердого тела**

##### ***Равномерное вращение***

Вращение называется равномерным, если его угловая скорость постоянна, т.е. .

Так как , то . Начальные условия: , то после интегрирования получим

 или 



##### ***Равнопеременное вращение***

Вращение называется равноускоренным, если его угловое ускорение постоянно и больше нуля, т.е. .

Вращение называется равнозамедленным, если его угловое ускорение постоянно и меньше нуля, т.е. .

Так как , то . Начальные условия: , то после интегрирования получим

 или 



далее ,  и после интегрирования,



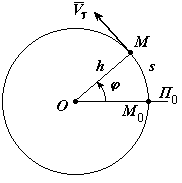
или 

# **Лекция 5**

Краткое содержание: Скорости и ускорения точек тела при вращении. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Сложение скоростей. Сложение ускорений при поступательном движении твердого тела.

**Скорости и ускорения точек тела при вращении.**

Перейдем к изучению движения отдельных точек твердого тела. Известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси ****.

Рассмотрим какою-нибудь точку *М* твердого тела, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения. При вращении твердого тела точка *М* будет описывать окружность радиуса *h,* плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр О лежит на самой оси. Если за время происходит элементарный поворот тела на угол , то точка *М* при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение ****.

Тогда алгебраическая скорость будет равна

**** или **** (5-1)

Рис. 5-1

Скорость точки равна ****. Скорость **** в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще **линейной** или **окружной скоростью**.

Модуль скорости равен

****. (5-2)

Величины скоростей точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость ****. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Ускорение точки раскладываем на касательную и нормальную составляющие, т.е.

****.

Касательное и нормальное ускорения вычисляются по формулам

****, ****.

Таким образом ****, **** и модуль ускорения вычисляется по формуле ****.

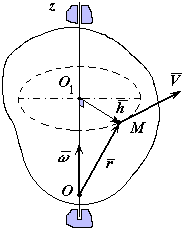
Касательные, нормальные и полные ускорения точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, как и скорости, так же пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака углового ускорения.

**Векторные скорости и ускорения точек тела**

Скорость точки по модулю и направлению можно представить векторным произведением

****, (5-3)

где **** - радиус-вектор точки М, проведенный из произвольной точки оси вращения ****.

Это выражение называется **векторной формулой Эйлера.**

Доказательство. Вектор **** перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы **** и ****, следовательно, по направлению он совпадает со скоростью ****. Модуль векторного произведения **** Таким образом, векторное произведение **** по модулю и направлению определяет скорость точки.

Рис. 5-2

Определим ускорение точки продифференцировав формулу Эйлера.

****, или

****

Первое слагаемое является касательным ускорением, а второе – нормальным.

**** ****.

Сопоставление двух формул для скорости точки (**** и ****) дает формулу для вычисления производной по времени от вектора ****:

****.

В этой формуле вектор **** имеет постоянный модуль, так как соединяет все время две точки твердого тела.

**Сложное движение точки**

**Основные понятия**

Во многих задачах движение точки приходится рассматривать относительно двух (и более) систем отсчета, движущихся друг относительно друга.

В простейшем случае сложное движение точки состоит из **относительного** и **переносного** движений. Определим эти движения.

Рассмотрим две системы отсчета движущиеся друг относительно друга. Одну систему отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1 примем за основную и неподвижную. Вторая система отсчета ***Oxyz*** будет двигаться относительно первой.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета ***Oxyz*** называется **относительным.** Характеристики этого движения, такие как, траектория, скорость и ускорение, называются **относительными.** Их обозначают индексом *r*.

Движение точки относительно основной неподвижной системы отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1называется **абсолютным** (или сложным). Траектория, скорость и ускорение этого движения называются **абсолютными.** Их обозначают без индекса.

**Переносным** движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Вследствие относительного движения движущаяся точка в различные моменты времени совпадает с различными точками тела S, с которым скреплена подвижная система отсчета. **Переносной** скоростью и **переносным** ускорением являются скорость и ускорение той точки тела S, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. **Переносные** скорость и ускорение обозначают индексом  *e*.

Если траектории всех точек тела S, скрепленного с подвижной системой отсчета, изобразить на рисунке, то получим семейство линий – семейство траекторий переносного движения точки М. Вследствие относительного движения точки М в каждый момент времени она находится на одной из траекторий переносного движения.

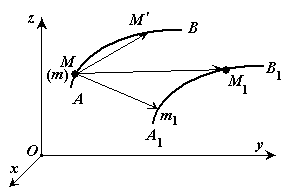
Одно и то же абсолютное движение, выбирая различные подвижные системы отсчета, можно считать состоящим из разных переносных и соответственно относительных движений.

**Пример.**

Имеется круглый диск, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси перпендикулярной плоскости диска. На диске имеется канавка, направленная вдоль радиуса диска. Вдоль канавки перемещается материальная точка. Материальная точка совершает сложное движение. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета является абсолютным. Подвижную систему отсчета жестко свяжем с вращающимся диском, одну из осей (например, x) направим вдоль канавки. Движение точки вдоль оси x будет относительным, движение точки вместе с подвижной системой отсчета (вместе с диском) будет переносным движением.

**Сложение скоростей**

Определим скорость абсолютного движения точки М, если известны скорости абсолютного и переносного движений этой точки.

За малый промежуток времени **** вдоль траектории **** точка М совершит относительное перемещение, определяемое вектором ****. Сама кривая ****, двигаясь вместе с подвижными осями, перейдет за тот же промежуток времени в новое положение **** Одновременно та точка **** кривой ****, с которой совпадала точка М, совершит переносное перемещение ****. В результате точка **** совершит перемещение ****.

****

Деля обе части равенства на **** и переходя к пределу, получим

****

**Сложение ускорений при поступательном переносном движении.**

Определим ускорение абсолютного движения точки в частном случае поступательного переносного движения.

Справедлива теорема ****. Если подвижная система отсчета **** движется поступательно относительно неподвижной ****, то все точки тела, скрепленного с этой системой, имеют одинаковые скорости и ускорения, равные скорости и ускорению начала координат подвижной системы О. Следовательно, для скорости и ускорения переносного движения имеем

****, ****

Выразим относительную скорость в декартовых координатах

****

Подставляя в теорему о сложении скоростей значения переносной и относительной скоростей получаем ****

По определению ****

****, ****, ****.

Следовательно, ****

Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении равно векторной сумме ускорений переносного и относительного движений.

****

# **Лекция 6**

Краткое содержание: Плоское движение твердого тела. Уравнения плоского движения. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Угловая скорость и угловое ускорение при плоском движении. Скорости точек тела при плоском движении. Мгновенный центр скоростей. Методы нахождения положения мгновенного центра скоростей.

**Плоское движение твердого тела**

**Плоским движением** твердого тела называется такое его движение, при котором каждая его точка все время движется в одной и той же плоскости.

Плоскости, в которых движутся отдельные точки тела, параллельны между собой и параллельны одной и той же неподвижной плоскости. Плоское движение твердого тела часто называют плоскопараллельным. Траектории точек тела при плоском движении являются плоскими кривыми.

Плоское движение твердого тела имеет большое значение в технике. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем движения твердого тела.

При изучении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также приемы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

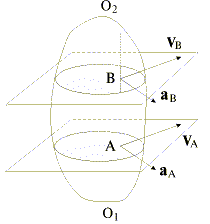
Если в теле провести некоторую прямую О1О2, перпендикулярную плоскостям, в которых происходит движение точек, то все точки этой прямой будут двигаться по одинаковым [траекториям](/db/search.html?not_mid=1176373&words=%D4%D2%C1%C5%CB%D4%CF%D2%C9%D1%CD) с одинаковыми [скоростями](/db/search.html?not_mid=1176373&words=%D3%CB%CF%D2%CF%D3%D4%D1%CD%C9) и [ускорениями](/db/search.html?not_mid=1176373&words=%D5%D3%CB%CF%D2%C5%CE%C9%D1%CD%C9); сама прямая будет, естественно, сохранять свою ориентацию в пространстве. Таким образом, при плоском, движении твердого тела достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела.

Рис. 6-1

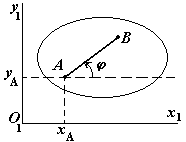
Сечение твердого тела будем называть плоской фигурой. Положение фигуры на ее плоскости полностью определяется положением отрезка прямой линии, жестко скрепленной с этой плоской фигурой.

**Уравнения плоского движения твердого тела**

Для задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат , лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка АВ, скрепленного с фигурой.

Положение отрезка АВ, относительно системы координат определяется заданием координат какой-нибудь точки этого отрезка и его направления. Например, координаты точки А () и направление, заданное углом .

Уравнения движения плоской фигуры относительно системы координат  имеют вид: .

Твердое тело при плоском движении имеет три степени свободы.

Функции



называются **уравнениями плоского движения твердого тела**.

Рис. 6-2

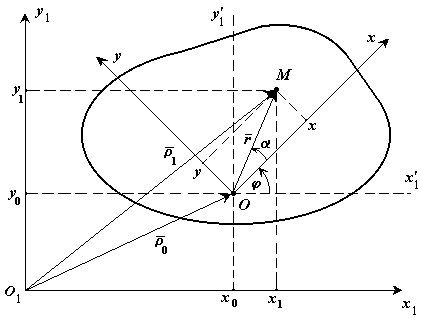
Перейдем к изучению движения отдельной точки твердого тела. Положение любой точки М плоской фигуры относительно подвижной системы отсчета **,** скрепленной с этой движущейся фигурой и лежащей в ее плоскости, полностью определяется заданием координат x и y точки М (Рис.6-3).

Рис. 6-3

Между координатами точки М в различных системах отсчета существует связь:

, (6-1)

где  - длина отрезка ОМ,  - постоянный угол между ОМ и осью . С учетом выражений  и  получаем

, (6-2)

Формулы (6-2) являются уравнениями движения точки М плоской фигуры относительно координат . Эти формулы позволяют определить координаты любой точки плоской фигуры по заданным уравнениям движения этой фигуры и координатам этой точки относительно подвижной системы отсчета, скрепленной с движущейся фигурой.

Используя матрично-векторные обозначения уравнения (6-2) можно записать в такой форме:

, (6-3)

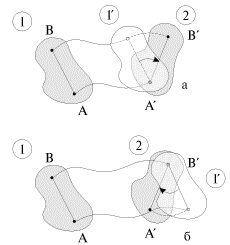
где А – матрица поворота на плоскости:

, , , .

**Разложение плоского движения на поступательное**

**и вращательное движения.**

**Теорема**. Любое движение твердого тела, в том числе и движение плоской фигуры в ее плоскости, бесчисленным множеством способов можно разложить на два движения, одно из которых переносное, а другое – относительное.

В частности, движение плоской фигуры в ее плоскости относительно системы , расположенной в той же плоскости, можно разложить на переносное и относительное движения следующим образом. Примем за переносное движение фигуры ее движение вместе с поступательно движущейся системой координат , начало которой скреплено с точкой О фигуры, принятой за полюс. Тогда относительное движение фигуры будет по отношению к подвижной системе координат  вращением вокруг подвижной оси, перпендикулярной плоской фигуре и проходящей через выбранный полюс.

Для доказательства этого достаточно показать, что плоскую фигуру в ее плоскости из одного положения в любое другое можно перевести двумя перемещениями – поступательным перемещением в плоскости фигуры вместе с каким –либо полюсом и поворотом в той же плоскости вокруг этого полюса.

Рис. 6-4

Рассмотрим два любых положения плоской фигуры 1 и 2. Выделим отрезок АB в рассматриваемой фигуре. Перевод фигуры из положения 1 в положение 2 можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного из 1 в 1' и вращательного из 1' в 2 вокруг точки A', называемой обычно полюсом (рис. 6-4а). Существенно, что в качестве полюса можно выбрать любую точку, принадлежащую фигуре или даже лежащую в плоскости вне фигуры. На рис. 6-4б, к примеру, в качестве полюса выбрана точка В. Обратите внимание: длина пути при поступательном перемещении изменилась (в данном случае увеличилась), но угол поворота остался прежним!

**Угловая скорость и угловое ускорение тела при плоском движении.**

Для характеристики вращательной части плоского движения твердого тела вокруг подвижной оси, проходящей через выбранный полюс, вводится понятие угловой скорости  и углового ускорения .

 и , где  - единичный вектор, направленный по оси вращения.

Если угол поворота вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, обозначить , то , а 

Векторы  и  можно изображать в любых точках подвижной оси вращения, т.е. они являются свободными векторами.

**Скорости точек тела при плоском движении**

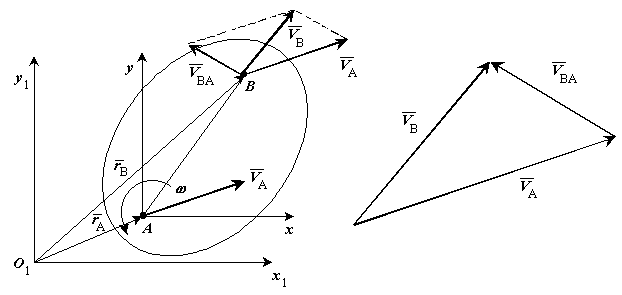
**Теорема.** Скорость какой-либо точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки от вращения фигуры вокруг полюса.

Рис. 6-5

Применяя к плоскому движению теорему о сложении скоростей для какой-либо точки В фигуры, получаем , где  - абсолютная скорость точки В плоской фигуры;  - скорость точки В переносного поступательного движения плоской фигуры вместе, например, с точкой А этой фигуры;  - скорость точки B в относительном движении, которым является вращение плоской фигуры вокруг точки А с угловой скоростью 

Так как за переносное движение выбрано поступательное движение вместе с точкой А, то у всех точек плоской фигуры одинаковые переносные скорости, совпадающие с абсолютной скоростью точки А, т.е. 

Скорость относительного движения, в случае когда оно является вращательным движением, равна 

Скорость **** расположена в плоскости движущейся фигуры и направлена перпендикулярно отрезку АВ, соединяющему точку В с полюсом А. Эту относительную скорость можно выразить в виде векторного произведения , где угловая скорость  считается направленной по подвижной оси вращения, проходящей через точку А и перпендикулярной плоскости фигуры. Относительную скорость **** обозначим ****. Это обозначение показывает, что скорость относительного движения точки В получается от вращения плоской фигуры вокруг подвижной оси, проходящей через точку А, или просто вокруг точки А.

, где 

Что и требовалось доказать.

**Мгновенный центр скоростей**

**Мгновенным центром скоростей** называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

**Теорема**. В каждый момент времени при плоском движении фигуры в ее плоскости при  (непоступательное движение), имеется один единственный центр скоростей.

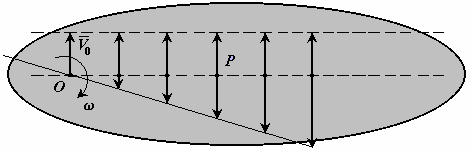
Для доказательства достаточно указать способ нахождения мгновенного центра скоростей, если известны скорость какой-либо точки О плоской фигуры и ее угловая скорость в рассматриваемый момент времени.

Рис. 6-6

, , , следовательно

.

Мгновенный центр скоростей находится на перпендикуляре к скорости , проведенном из точки О, на расстоянии .

Мгновенный центр скоростей это единственная точка плоской фигуры для данного момента времени. В другой момент времени мгновенным центром скоростей будет уже другая точка.

Возьмем точку Р за полюс 

Так как , то . Аналогичный результат получается для любой другой точки плоской фигуры.

  .

  .

Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

**Методы нахождения положения МЦС**

|  |  |
| --- | --- |
| *1). Известен вектор скорости*  *какой -либо точки A плоской фигуры и ее угловая скорость* . |  |
| МЦС (точка P) находится на перпендикуляре к вектору , проведенном через точку A. Расстояние  и откладывается в сторону, которую указывает вектор после поворота на угол  в направлении дуговой стрелки . При этом получается, что скорость  () | |
| *2). Известны не параллельные друг другу скорости*  *и*  *двух точек плоской фигуры.* |  |
| МЦС (точка P) находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через точки A и B к скоростям этих точек. Угловая скорость плоской фигуры равна . Отметим, что для нахождения только положения МЦС достаточно знать лишь *направления* скоростей двух точек . | |
| *3). Известны параллельные друг другу скорости*  *и*  *точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB, направленные в одну сторону и не равные по модулю*  (). |  |
| МЦС (точка P) находится в точке пересечения продолжения отрезка *AB* и прямой, проведенной через концы векторов и. При заданной длине отрезка *AB* расстояния от МЦС до точек *A* и *B* определяются из пропорции . Угловая скорость фигуры . Случай равенства () см. п. 6. | |

**Методы нахождения положения МЦС**

|  |  |
| --- | --- |
| *4). Известны параллельные друг другу скорости  и*  *точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB, направленные в разные стороны.* |  |
| МЦС (точка P) находится в точке пересечения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов  *и* . При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции: . Угловая скорость фигуры . | |
| *5). Плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.* |  |
| МЦС (точка P) находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорости точек фигуры и неподвижной кривой, находящиеся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. Если известна скорость какой-либо точки *A* фигуры, то угловая скорость . | |
| *6). Известно, что скорости*  *и*  *двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны отрезку AB.* |  |
| МЦС в данный момент времени *не существует* или, другими словами, *находится в бесконечности.* Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю. Движение фигуры называется *мгновенно-поступательным*. Скорости всех точек фигуры равны . Аналогичный результат показан в п. 4. | |

### ДИНАМИКА

# **Лекция**

Краткое содержание: Введение в динамику. Аксиомы классической механики. Системы единиц. Дифференциальные уравнения движения точки. Основные задачи динамики. Основные виды прямолинейного движения точки.

### Введение

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка.

**Материальная точка** это модель материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Более сложные материальные объекты – **механические системы** и **твердые тела**, состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

# **Аксиомы классической механики**

**Первая аксиома или закон инерции**. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Материальная точка, на которую действует равновесная система сил, называется **изолированной материальной точкой**.

Равномерное и прямолинейное движение точки называется **движением по инерции**.

**Вторая аксиома или основной закон динамики.** Ускорение материальной точки относительно инерционной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе.



*m*





Положительный коэффициент пропорциональности ***m***, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Рис. 1-1

Масса не зависит от характеристик движения точки и от природы сил. Масса считается постоянной величиной и зависит только от самой материальной точки.

Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей.

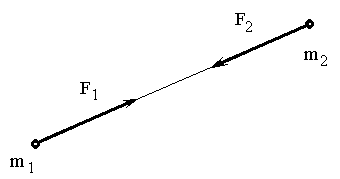
**Третья аксиома или закон о равенстве сил действия и противодействия.** Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению. 

Рис. 1-2

**Четвертая аксиома или закон независимого действия сил.** При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

Аксиомы классической механики хорошо согласуются с результатами опытов.

###### Системы единиц

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | СГС | Си | Техническая |
| [L] | см | м | м |
| [M] | г | кг | Т.е.м. |
| [T] | сек | сек | сек |
| [F] | дина | Н | кГ |
| [v] | см/сек | м/сек | м/сек |
| [a] | см/сек2 | м/сек2 | м/сек2 |
| [L] |  |  |  |

1 кГ = 9.8 Н, 36 км/час = 10 м/сек, 1 Т.е.м. = 9.8 кг

**Дифференциальные уравнения движения точки.**

Основное уравнение динамики 

можно записать так  или так 

Проецируя уравнение  на оси координат получаем

так как , , , то

**Частные случаи:**

А) Точка движется в плоскости. Выбираем в плоскости координаты xOy получаем   

Б) Точка движется по прямой. Выбираем на прямой координату Ox получаем   

Основное уравнение динамики  можно спроецировать на естественные подвижные оси.

Эта форма уравнений удобна для исследования некоторых случаев полета снарядов и ракет.

**Основные задачи динамики**

**Первая или прямая задача:**

Известна масса точки и закон ее движения, необходимо найти действующую на точку силу.

***m***   

Вычисляем вторые производные по времени от координат точки, умножаем их на массу и получаем проекции силы на оси координат

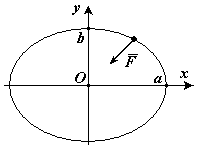
Зная проекции силы на оси координат, определяем модуль силы и ее направляющие косинусы:

**Пример 1:** Движение точки в плоскости *xOy* определяется уравнениями:

; ; ; время.

Решение: ;

;

; .

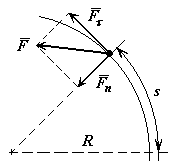
 - Уравнение траектории в координатной форме (эллипс).



; 

**Пример 2:** Точка, имеющая массу , движется из состояния покоя по окружности радиуса  с постоянным касательным ускорением . Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние .

Решение: Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

; ; ;

Так как , то , 

; ;



; следовательно ;

; следовательно





**Вторая или обратная задача:**

Известна масса точки и действующая на точку сила, необходимо определить закон движение этой точки.

Рассмотрим решение этой задачи в декартовой системе координат. Сила зависит от времени, координат точки, ее скорости и других причин.

, ,



Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: 

Каждая из координат  движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени и всех шести произвольных постоянных, т.е.







К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия:

,  

,  

Используя эти начальные условия можно получить шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных .

**Основные виды прямолинейного движения точки**

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Оx имеет вид:

, Начальные условия , .

**Наиболее важные случаи.**

1. Сила постоянна.   

Имеем равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением)

2. Сила зависит от времени.  

3. Сила зависит от координаты или скорости.

Силу, зависящую от координаты х , создают упругие тела при их деформации (например, сжатая или растянутая пружина). 

Сила, зависящая от скорости движения , это сила сопротивления (воздуха, воды и т.д.)

В этих случаях решение задачи упрощается.

**Методическое пособие**

* + **практическим занятиям**
* **самостоятельной работе студентов по теоретической механики направления подготовки**

**«Горное дело»**

|  |  |
| --- | --- |
| **ОДЕРЖАНИЕ** |  |
|  | стр. |
| ВВЕДЕНИЕ ………………………………………………… | 4 |
| 1. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ, ИХ |  |
| НАИМЕНОВАНИЕ …..……………………………………. | 5 |
| Практическое занятие № 1. *Произвольная плоская* |  |
| *система сил .*………………………………………………... | 6 |
| Практическое занятие № 2. *Пространственная система* |  |
| *сил* …………………………………………………………... | 23 |
| Практическое занятие № 3. *Определение уравнений* |  |
| *движения, траектории, скорости и ускорения точки* …. | 37 |
| Практическое занятие № 4. *Вращательное движение* |  |
| *тела* ………………………………………………………… | 49 |
| Практическое занятие № 5. *Определение скоростей и* |  |
| *ускорений точек плоской фигуры* ………………………… | 54 |
| Практическое занятие № 6. *Сложное движение точки* … | 70 |
| Практическое занятие № 7. *Исследование движения* |  |
| *материальной точки* ……………………………………… | 75 |
| Практическое занятие № 8. *Исследование движения* |  |
| *механических систем с помощью общих теорем* |  |
| *динамики* …………………….……………………………... | 89 |
| 2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ (СРС) | 99 |
| 3. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ …… | 101 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК …………………….. | 103 |

**ВЕДЕНИЕ**

Учебно-методическое пособие для студентов по выполнению контрольных работ по курсу «Теоретическая механика».

Целью освоения дисциплины является:

– изучение технических законов, которым подчиняются движе-ние и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимо-действия между телами, а также овладение основными алгоритмами исследования равновесия и движения механических систем;

– построение и исследование механико-математических моделей, адекватно описывающих разнообразные механические явления;

– выработать навыки практического использования методов, предназначенных для математического моделирования движения тел различных механических систем.

Основными задачами при изучении дисциплины являются:

– изучение механической компоненты современной естественно-научной картины мира, понятий и законов теоретической механики;

– овладение важнейшими методами решения научно-технических задач в области механики, основными алгоритмами математического моделирования механических явлений;

– формирование устойчивых навыков по применению фундамен-тальных положений теоретической механики при научном анализе ситуаций, с которыми инженеру приходиться сталкиваться в ходе со-здания новой техники и новых технологий;

– ознакомление студентов с историей и логикой развития теоре-тической механики.

Теоретическая механика является научной основой важнейших разделов современной техники. В ее основе лежат законы, отражаю-щие определённый класс явлений природы, связанных с движением материальных тел. Роль и значение теоретической механики состоит в том, что она является научной базой многих областей современной техники.

При изучении курса рассматриваются три раздела теоретической механики:

 СТАТИКА, задачей которой является изучение вопросов заме-ны данной системы сил другой, эквивалентной ей по механическому воздействию на твёрдое тело, а также установление необходимых и достаточных условий равновесия различных систем сил;

* КИНЕМАТИКА, задачей которой является исследование дви-жения материальных тел в пространстве и во времени с геометриче-ской точки зрения, без рассмотрения причин, вызывающих это дви-жение;
* ДИНАМИКА, задачей которой является изучение движения ма-териальных тел в связи с действующими силами.

Теоретическая механика служит научным фундаментом и являет-ся необходимой основой для изучения таких дисциплин как приклад-ная механика, геотектоника и геодинамика, буровые станки и буре-ние скважин, и другие.

1. **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ, ИХ НАИМЕНОВАНИЕ**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование | Форма | Номер | Литература |  |
| тем занятий | контроля | компетенции |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | Произвольная плоская си- | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | стема сил |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 2 | Пространственная система | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | сил |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 3 | Определение уравнений | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | движения, траектории, ско- |  |  |  |  |
|  | рости и ускорения точки |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 4 | Вращательное движение те- | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | ла |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 5 | Определение скоростей и | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | ускорений точек плоской |  |  |  |  |
|  | фигуры |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 6 | Сложное движение точки | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 7 | Исследование движения ма- | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | териальной точки |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 8 | Исследование движения ме- | Опрос | ПК-2, 10, 11 | 7 [3-6] |  |
|  | ханических систем с помо- |  |  |  |  |
|  | щью общих теорем динами- |  |  |  |  |
|  | ки |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Практическое занятие № 1**

**ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ**

**1.1. Ведение в статику твёрдого тела**

* теоретической механике при расчётах реальные конструкции заменяются их расчётной схемой.

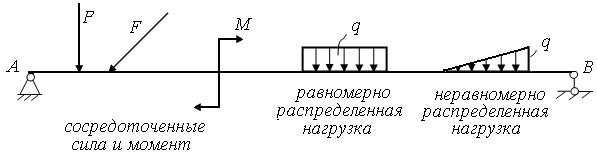
Внешние силы, действующие на элементы конструкций делятся на активные и реактивные – реакции связей. Активные силы принято называть – нагрузки.

Нагрузки, передающиеся от одних элементов конструкции к другим, относятся к числу поверхностных сил.

Поверхностные силы в свою очередь делятся на сосредоточен-ные и распределённые (рис. 1.1).

Сила характеризуется модулем**,** направлением и точкой прило-жения, обозначается *F* от Force (англ.) – сила. Единица измерения си-лы в Международной системе единиц (СИ) – ньютон, килоньютон (Н, кН).

Нагрузки, распределённые по некоторой поверхности, характе-ризуются давлением (1 Па = 1 кН/м2, МПа)*.* Распределённая по длине нагрузка **интенсивностью,** обозначаемой обычно *q* и выражаемой в единицах силы, отнесённой к единице длины (Н/м, кН/м).



**Рис. 1.1. Силы, действующие на балку**

* большинстве задач на равновесие твёрдого тела следует ука-зать направление реакций связей, а затем определить их модули, в хо-де решения задач.

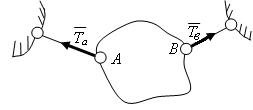
**Реакцией связей** называется сила,с которой данная связь дей-ствует на тело, препятствуя его перемещению**.** Направлена реакция

связи в сторону противоположную той, куда связь не даёт переме-щаться телу. Несвободное твёрдое тело можно рассматривать как сво-бодное, если мысленно, освободить от связей, заменив действие свя-зей реакциями.

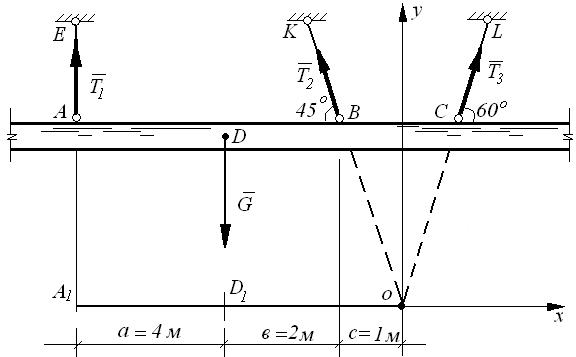
Рассмотрим часто встречающиеся виды связей:

1. Гибкая нерастяжимая нить – реакция направлена вдоль нити

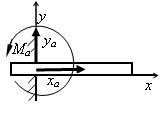
(рис. 1.2).



Например:



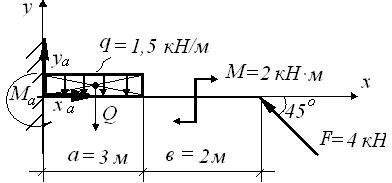
**Рис. 1.2. Расчётная схема трубопровода**



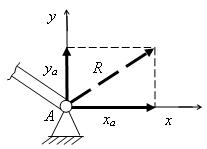
1. Жёсткая заделка – Реакцию представляют в виде двух составляющих с линиями дей-ствия, параллельными осям координат и *Ма*

(рис. 1.3)

пример:



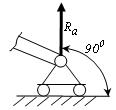
**Рис. 1.3. Расчётная схема консольной балки**



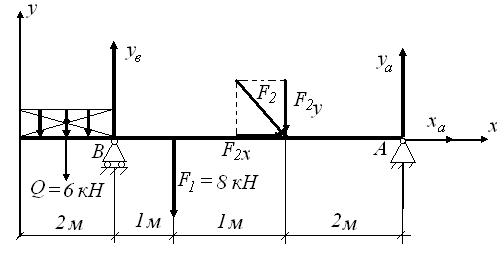
* 1. Шарнирно-неподвижная опора – Ре-акция представляется в виде двух неизвестных составляющих, линии действия которых параллельны или совпадают с осями координат

(рис. 1.4).

1. Шарнирно-подвижная опора – Реак-ция всегда перпендикулярна опор-ной поверхности (рис. 1.4).

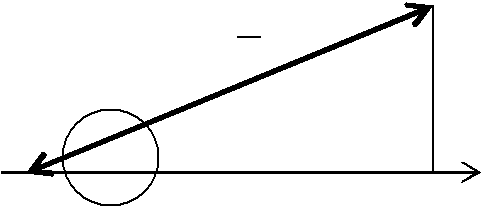


Например:



**Рис. 1.4. Расчётная схема балки**

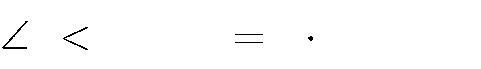
Рассмотрим частные случаи проекции силы *F* на координатную ось Х:



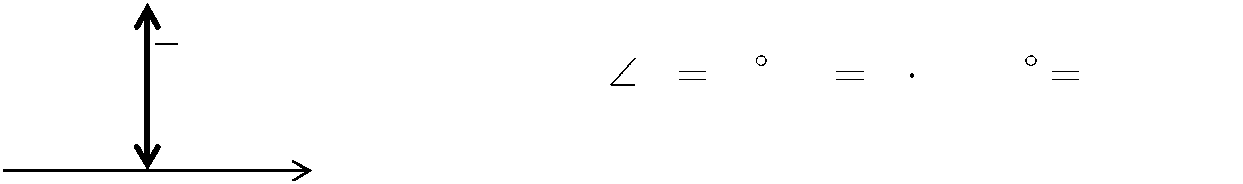
1. Проекция положительна

*F*

|  |  |
| --- | --- |
| 30 A | α 90*о* *X F* cos α |



1. Проекция равна нулю



*α*

B

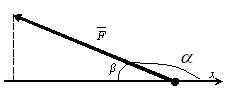
α 90

*X*

*F* cos 90

0

 *х*



*F*

1. Проекция отрицательна



90 *X* *F* cosα *F* cosβ.

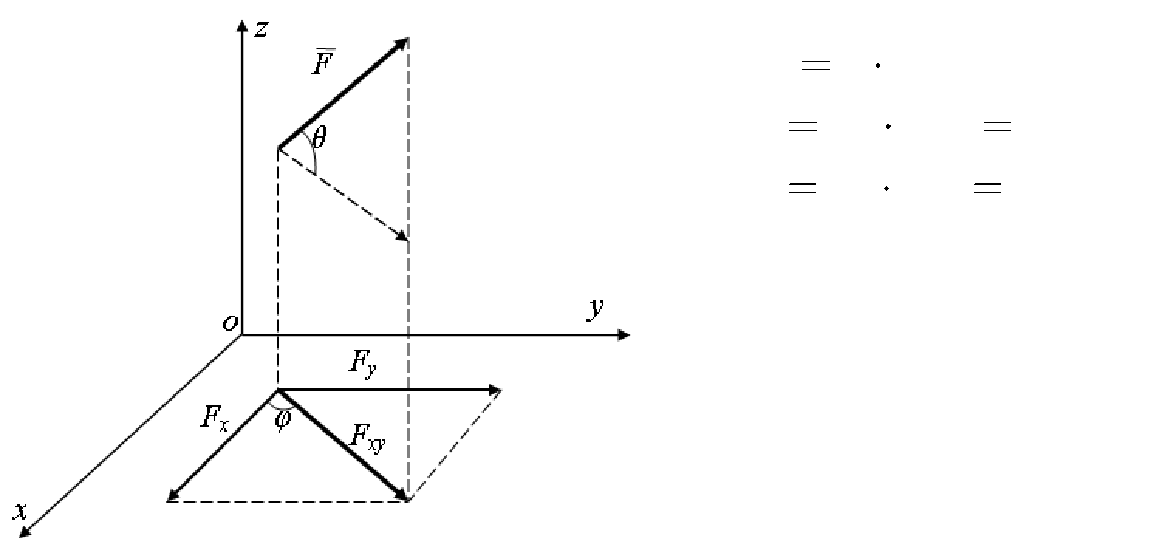
Например, на расчётной схеме балки (рис. 1.4) представлены проекции силы *F* 2 на координатные оси *х* и *у*.



Проекция силы *F* на плоскость *хоу* может быть представлена как векторная сумма двух взаимно перпендикулярных сил *F* *х* и *F* *у* , кото-



рые по модулю равны абсолютным значениям соответствующих про-екций (рис. 1.5).



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Fxy* | *F* cosθ *,* | |  |
| *Fx* | *Fxy* | cosφ | *F*cos θ cosφ, |
| *Fy* | *Fxy* | sinφ | *F*cosθsinφ |

θ – угол между направлением силы *F* и ее проекции *Fxy* .



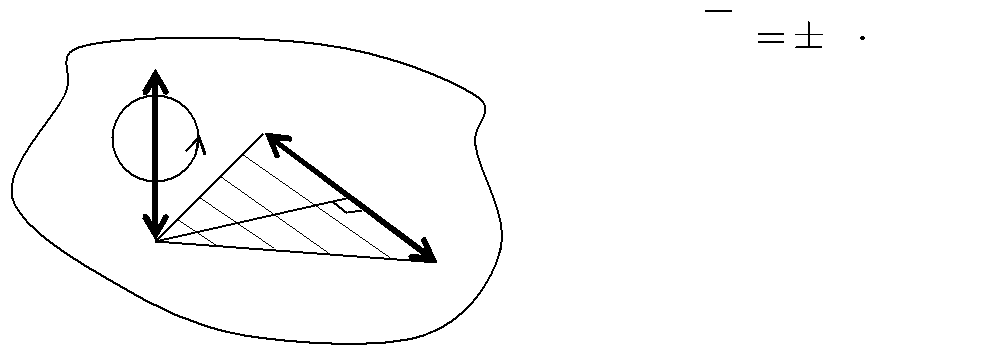
**Рис. 1.5. Проекция силы** *F* **на плоскость *хоу***

**м силы** относительно точки*О*на плоскости называет-

ся произведение модуля (величины) силы *F* на ее плечо *а* относи-тельно этой точки, взятое со знаком плюс или минус (рис. 1.6):



*M* 0( *F* ) *F а ,*



* – плечо силы относительно центра

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *I* |  | *α* |  |  | момента (кратчайшее расстояние |  |
|  |  |  | между этой точкой и линией |  |
|  | *F* | *х* | |  |
|  |  |
| I | |  |  | действия силы); |  |
| *х* | |  |  |  |  |
|  |  |  | *О –* центр момента. |  |

**Рис. 1.6. Момент силы относительно точки**

**План решения задач по теме: Введение в статику твёрдого**

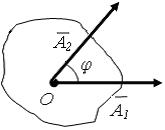
**тела**

1. Для графического решения задачи, необходимо выбрать опре-делённый масштаб.
2. Произвести сложение векторов, используя либо правило па-раллелограмма, либо правило треугольника.
3. Найти модуль неизвестных векторов.

**Задача 1.1.** Произвести сложение двух векторов,если вектор*А*1направлен горизонтально вправо, а *А*2 составляет с *А*1 угол φ равный 60о. Модули векторов: *А*1 = 10, *А*2 = 8 [4].

*Дано:* схема(рис. 1.7), *φ* = 60о, *А1 =* 10*, А2 =* 8.

*Определить:* модуль вектора *Аs –* сумма векторов *А*1и *А*2.



**Рис. 1.7. Схема к задаче 1.1**

*Решение*

1. Выберем масштаб построения векторов, на основе очевидной зависимости: длина отрезка *l* изображающего вектор *А*, прямо про-порциональна его модулю *А*:



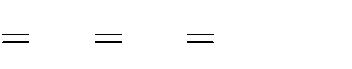
* *В l* ,



где *kВ* – коэффициент пропорциональности, масштаб построения век-торов.

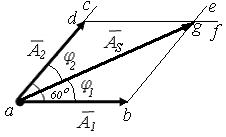
Если для изображения вектора *А*1, модуль которого равен десяти единицам, выберем отрезок длиной *ab* = 40 мм, то получим значение масштаба построения для задачи:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *kB* | *A*1 | 10 | | 0, 25 | 1 |  |
| *ab* |  | 40 | мм |  |
|  |  |  |



(0,25 единицы модуля в 1 мм).

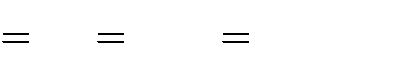
1. Из произвольной точки *а* построим вектор *А*1, изобразив его отрезком *ab* = 40 мм (рис. 1.8).



**Рис. 1.8. Расчетная схема к задаче 1.1**

1. При помощи транспортира из точки *а* – начала построенного вектора под углом φ = 60*о* к линии *ab* проведем линию *ас* – направле-ние вектора *А*2*.*
2. Определим длину отрезка *ad*, который изобразит вектор *А*2:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *ad* | *A*2 |  | 8 | 32 мм. |  |
| *kB* | 0, 25 | |  |
|  |  |  |



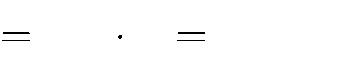
1. Отложим из точки *а* отрезок *ad* = 32 мм и, показав на нем стрелкой направление от *а* к *d*, получим вектор *А2.*
2. Построим прямые *be* *║ad* и *df* *║ab* и, обозначив точку пересе-чения этих прямых *g*, получим параллелограмм *abgd*.
3. Соединив точки *а* и *g*, получим диагональ *аg*, которая по моду-лю и направлению (от *а* к *g*) изображает вектор *Аs* – искомую сумму век-торов *А*1 и *А*2.



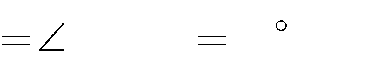
8. Найдем модуль вектора *Аs:* *Аs* *k В ag*.

Путем непосредственного измерения находим, что *аg* 63 мм.

таким образом, *Аs* 0, 25 63 15,8.



1. Углы, образуемые направлением *Аs* с направлением построен-



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ных векторов, найдем при помощи транспортира: φ1 | | | | | | *A*1, *As*26 . |  |
| Следовательно, |  | 2 | *A ,A* |   34*o* | . |  |  |
|  | 2*s* | 1 |  |  |

*Ответ:* два вектора *А1* и *А2* можно заменить одним вектором *Аs*,причем модуль его содержит 15,8 единицы и его направление состав-ляет с направлением первого вектора угол, равный 26*о*.

**Задача 1.2.** Определить модуль и направление суммарного век-тора используя данные предыдущей задачи – вектор *А*1 направлен го-ризонтально вправо, а *А*2 составляет с *А*1 угол φ равный 60. Модули векторов: *А*1 = 10, *А*2 = 8 [5].

*Дано:* схема(рис. 1.7),φ= 60, *А*1 *=* 10*, А*2 *=* 8.

*Определить:* модуль и направление суммарного вектора *Аs*.

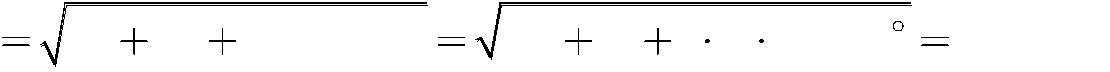
*Решение*

Графический способ выполнения действий с векторами не все-гда удобен, поэтому пи решении задач пользуются графо-аналитическим способом.

1. Изобразим заданные векторы *ab* (вектор *А*1) и *ad* (вектор *А*2) и, нарисовав далее параллелограмм *abgd*, проведём в нем диагональ *аg* (искомый вектор *Аs*), которая разделит угол φ на два искомых φ1 и φ2

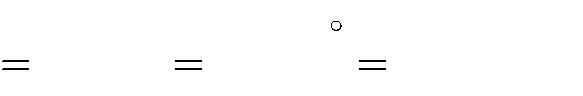
(рис. 1.8).

1. Модуль вектора *Аs* найдём по формуле (*теорема косинусов*):



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *А* | *A*2 | *A*2 | 2 *A A* cos α10 2 | 82 | 2 10 8cos 6015, 6. |
| *s* | 1 | 2 | 1 2 |  |  |

1. Направление вектора *Аs* найдём, определив угол φ1 (или ***φ***2) из формулы (*теорема синусов*):



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *A*2 |  | *As* | , откуда sin φ | |  | *A*2sinα |  | 8sin 60 | 0, 445 . |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | sin φ1 |  | sin α | | 1 | | *As* | 15,6 | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| По таблицам находим φ1 | | | | |  | 2620. | |  |  |  |  |



*Ответ:* суммарный вектор *Аs* = 15,8единицы и его направлениеобразует с *А*1 угол φ1 26 20 .



При решении задач статики на равновесие тел, находящихся под действием любой системы сил, рекомендуется следующий порядок решения:

1. Выделить твёрдое тело, равновесие которого надо рассмот-реть для отыскания неизвестных величин.
2. Изобразить активные силы.
3. вободить твёрдое тело от связей и заменить их действия ре-акциями связей.
4. Выбрать направление осей координат.
5. Составить уравнения равновесия заданной системы сил и определить неизвестные величины.

Хотя выбор направления координатных осей, на которые проек-тируются силы, не имеет принципиального значения, однако при ре-шении задач для получения более простых уравнений равновесия следует направлять координатные оси перпендикулярно неизвестным силам; при этом некоторые уравнения равновесия будут содержать меньше число неизвестных, чем их содержится в задаче.

Все расчёты при решении задач рекомендуется, как правило, производить в общем виде – *алгебраически*. Тогда для искомых вели-чин будут получатся формулы, дающие возможность проанализиро-вать найденные результаты.

Кроме того, решение в общем виде позволяет иногда обнару-жить сделанные ошибки путём проверки размерностей (размерности каждого из слагаемых в обеих частях равенства должны быть одина-ковыми).

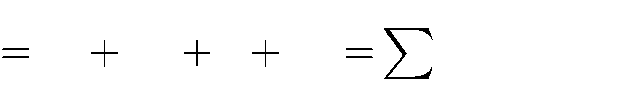
Числа, если решение производится в общем виде, подставляют-ся только в окончательные результаты.

**1.2. Система сходящихся сил**

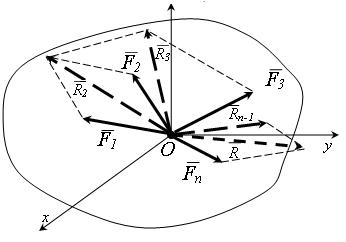
Сходящимися называются силы, линии действия которых пере-секаются в одной точке. Различают плоскую и пространственную си-стемы сходящихся сил (рис. 1.9).

Существует немало практических задач, которые требуют ис-следования систем сходящихся сил, в частности, они возникают при расчётах шарнирно-стержневых систем. Кроме того, изучение систе-мы сходящихся сил необходимо для дальнейших обобщений, относя-щихся к произвольной пространственной системе сил.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Равнодействующая сходящихся сил | | | | | | | | | *F* 1, *F* 2,..., *F n* равна геомет- | | | | | |
| рической сумме этих сил (рис. 1.10): | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | *n* | | | | | |
|  | *R F* 1 *F* 2... *F n* | | | | | | | |  |  | *Fк* , | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | |  |  |  |  |

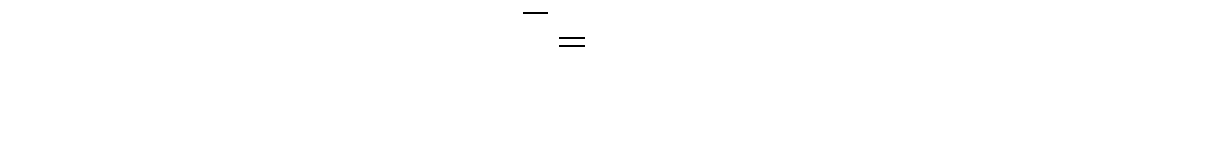


где *R* – главный вектор системы сходящихся сил.



**Рис. 1.9. Система сил сходящихся в одной точке**

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твер-дому телу, необходимо и достаточно равенство нулю равнодействую-



щей системы сходящихся сил *R* 0 .

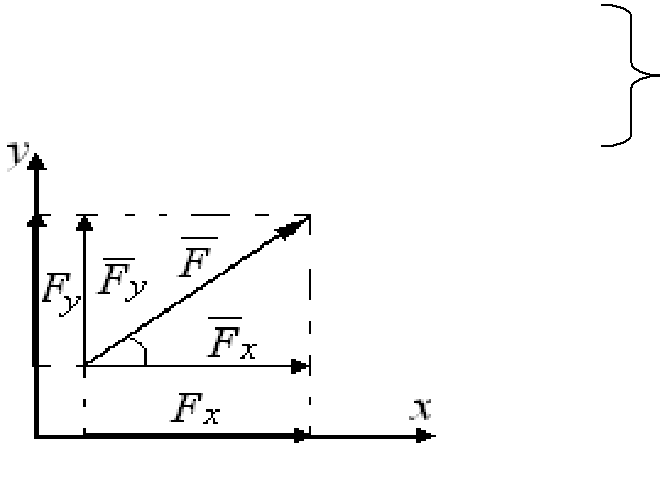
Уравнения равновесия системы сходящихся сил**:**

– для плоской системы координат

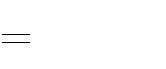
* + *Fкx =* 0;
  + *Fкy =* 0.

– для пространственной системы координат:

* + *Fкx = 0;*
  + *Fкy = 0;*
  + *Fкz = 0.*



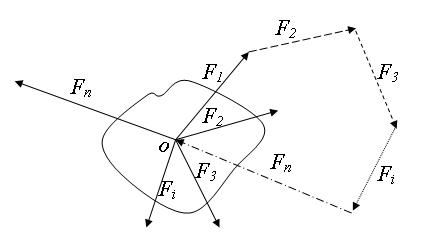
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cos α |  | *Fх* | | *; Fx =* cosα * F,* |  |
|  | *F* | |  |
|  |  |  |  |
| sin α | *Fу* | |  | *; Fy =* sinα *F.* |  |
|  | *F* | |  |
|  |  |  |  |



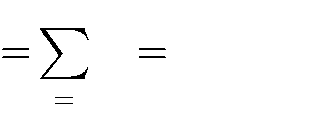
**Рис. 1.10. Разложение силы *F* на две**

**составляющие *Fх* и *Fу***

**Геометрическое условие равновесия** –для равновесия системысходящихся сил в геометрической форме необходимо, чтобы силовой многоугольник построенный из этих сил, был замкнут (рис. 1.11):



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *n* |  |
|  |  |  | *Fi* 0 |  |
| *R* |  |
|  |  | *i* | 1 |  |



**Рис. 1.11. Силовой многоугольник системы сходящихся сил**

**Аналитическое условие равновесия** –для равновесия сходя-щейся системы сил необходимо и достаточно равенство нулю алгеб-раических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из ко-ординатных осей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* |  |  |  |
| *FKX* |  *F*1*X*  *F*2 *X* ... *FnX* 0, | |  |
| 1 |  |  |  |
| *n* |  *F*1*Y*  *F*2*Y* ... *FnY* 0, |  |  |
| *FKY* |  |  |
| 1 |  |  |  |
| *n* |  |  |  |
| *FKZ* |  *F*1*Z*  *F*2*Z* ... *FnZ* 0. |  |  |
| 1 |  |  |  |

**План решения задач по теме: Система сходящихся сил**

1. Рассмотрим равновесие несвободного твердого тела.
2. Покажем на расчетной схеме все действующие силы.
3. Выберем направление осей координат *х* и *у*.
4. Составим уравнения равновесия заданной системы сил и определим неизвестные величины.
5. Выполним проверку и запишем ответ.

**Задача 1.3.** Стержни*АК*и*КО*соединены между собой и с вер-тикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт *К* дей-ствует вертикальная сила *F* =10 H. Определить реакции этих стержней на шарнирный болт *К*, если углы, составляемые стрежнями со стеной, равны: α = 60 и φ = 30.

15

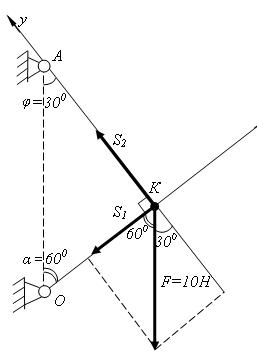
**Рис. 1.13**

*Дано:* схема(рис. 1.12), *F* =10 H,α= 60,φ= 30.

*Определить:* реакции стержней на шарнирный болт *К.*

*Решение*

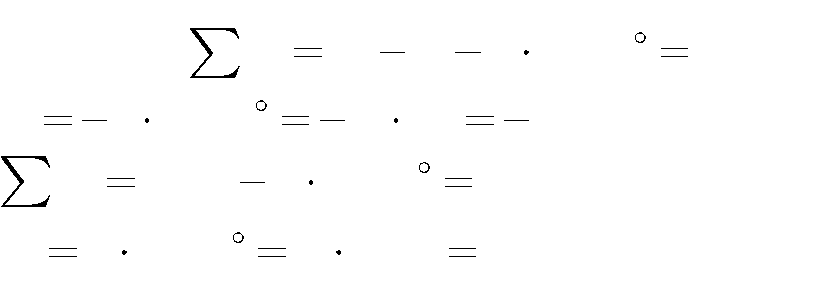
1. *Аналитический способ*

****

Рассмотрим равновесие несвободного болта *К*.

* болту *К* приложена активная сила *F* = 10 Н. На болт действует две связи стержней *АК* и *КО*.Освободим болт от связей и заменим ихдействия реакциями связей *S*1 и *S*2.

Выберем направление осей координат *х* и *у*. Составим уравнения равновесия заданной системы сил и определим неизвестные

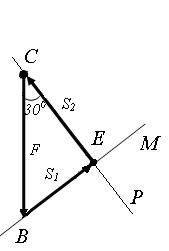
****

величины: *Fх* 0; *S*1 *F* cos60 0,

*S*1 *F* cos 60 10 0,5 5 кН;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *Fу* 0; *S* 2 | *F* cos 30 | 0, |  |
| **Рис. 1.12** | *S* 2 | *F* cos 30 | 10 0,866 | 8, 66 кН. |  |
|  |  |

1. *Геометрический способ*

****

При равновесии болта *К* равнодействующая приложенных сил должна быть равна нулю, следо-вательно, силы *F*, *S*1 и *S*2 образуют замкнутый си-ловой треугольник (рис. 1.13).

Построение силового треугольника начнем с силы *F* известной по величине и направлению. Взяв за начало произвольную точку *С*, приложим

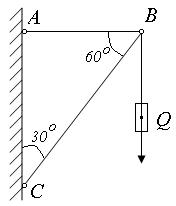
* ней силу *F*. Затем, проводя через начало и ко-нец силы прямые *СР* и *МВ*, соответственно па-раллельные стержням *АК* и *ОК*, получим в пере-

сечении третью вершину *Е* силового треугольни-ка *СЕВ*. В каждой из вершин силового треуголь-ника должен быть расположен конец только од-ной из трех сил.

**Задача 1.4.** Определить усилия в стержнях,пренебрегая их ве-сом, если груз весом *Q* = 1 кН подвешен в точке *В*. Кронштейн состо-ит из стержней *АВ* и *ВС* [3] (рис. 1.14).

*Дано:* схема(рис. 1.14), *Q* = 1кН, *α* =30○, *β* = 60○.

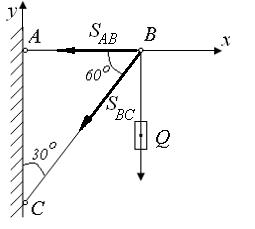
*Определить:* усилия в стержнях.



**Рис. 1.14. Схема к задаче 1.4**

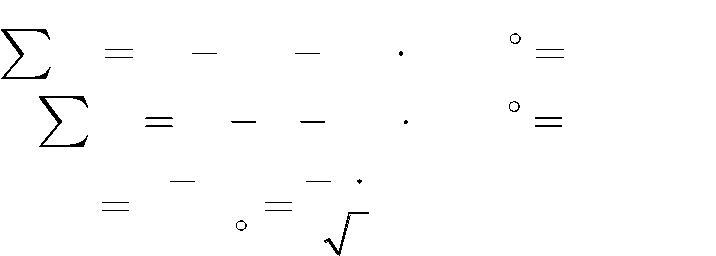
*Решение*

1. *Аналитический способ:*



**Рис. 1.15. Расчётная схема к задаче 1.4**

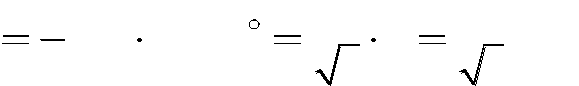
1. Освободим тело от связей и заменим их действия реакциями связей (рис. 1.15) *SАВ* и *SВС*.
2. Выберем направление осей координат *х* и *у*.
3. Составим уравнения равновесия заданной системы сил и определим неизвестные величины:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Fх* | 0; | *SАВ* | | *SBC* | | | | cos60 | 0, | (1.1) |  |
| *Fу* | 0; |  | *Q* | *SBC* | | | | sin 60 | 0, |  |  |
| *SBC* | *Q* | | | 1 |  | 2 | *=* – 1,16кН, | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| sin 60 | | | 3 | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

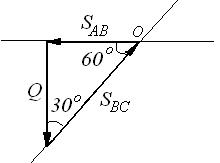
из (1.1) находим

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *S АВ* | *SBC* cos 60 | 2 | |  |  | 1 |  | 1 | |  | = 0,58 кН. |  |
|  |  | 2 | | |  |  |  |  |
| 3 | | 3 | | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |



1. *Геометрический способ:*

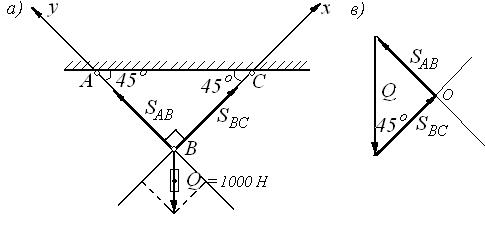
17



При равновесии системы равнодействующая приложенных сил должна быть равна нулю, следовательно, силы *Q*, *SАВ* и *SВС* образуют за-мкнутый силовой треугольник (рис. 1.16).

**Рис. 1.16. Геометрический способ решения задачи 1.4**

**Задача 1.5.**Определить усилия в стержнях,пренебрегая их ве-сом. Стержни *АВ* и *ВС* соединены между собой, с потолком и стенами посредством шарниров (рис. 1.17). К шарнирным болтам подвешен груз весом *Q* = 1000 Н [3].



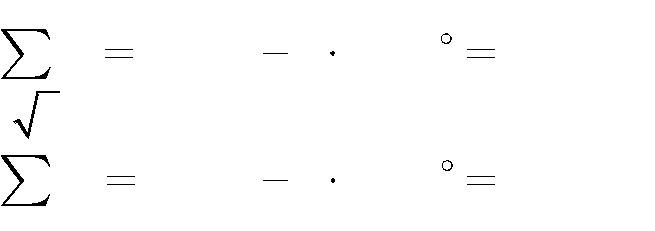
**Рис. 1.17. Расчётная схема к задаче 1.5**

*Дано:* схема(рисунок1.17), *Q* = 1000Н, *α* =*β* = 45○.

*Определить:* усилия в стержнях.

*Решение*

1. Освободим тело от связей и заменим их действия реакциями связей *SАВ* и *SВС*.
2. Выберем направление осей координат *х* и *у*.
3. Составим уравнения равновесия заданной системы сил и определим неизвестные величины:



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Fх* | | 0; | *SВС* | *Q* cos 45 | 0, |
|  |  |  | | |  | |
| *SBC = 500 ∙* 2*=* 707Н*.* | | | | | *SAB = SBC =* ***707******Н.*** | |
|  | *Fу* | | 0; | *S АВ* | *Q* cos 45 | 0, |

*Проверка:* При равновесии системы равнодействующая прило-женных сил должна быть равна нулю, следовательно, силы *Q*, *SАВ* и *SВС* образуют замкнутый силовой треугольник.

*Ответ: SAB = SBC = 707 Н.*

**1.3. Плоская система сил**

Плоской системой сил, приложенной к твердому телу**,** называют такую систему сил, линии, действия которых лежат в одной плоско-сти**.**

Для плоской системы сил следует рассмотреть, прежде всего, две основные задачи статики: замену плоской системы сил простей-шей системой сил, ей эквивалентной (равнодействующей или парой сил); установление необходимых и достаточных условий равновесия плоской системой сил, действующих на абсолютно твердое тело.

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу и не пересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно,



чтобы главный вектор *R* этих сил и их главный момент *М0* относи-тельно произвольной точки *О*, лежащей в плоскости действия этих сил, были равны нулю, т.е.:



* + - *R = ∑ F i =* 0

*∑M0* ( *F i*) *=* 0

* координатной форме эти условия выражают следующими тремя уравнениями:
  + *Fix =* 0



*∑ Fix =* 0 – 1-е условие равновесия (основное)



*∑M0* ( *F i*) *=* 0

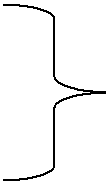
Условие равновесия плоской системы сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выразить ещё в двух других видах.

1. Алгебраическая сумма моментов сил относительно трёх про-извольных точек *А*, *В*, *С*, не лежащих на одной прямой, равно нулю, т.е.
   * *MА* ( *F i* ) *=* 0
   * *MВ* ( *F i* ) *=* 0
   * *MС* ( *F i* ) *=* 0



19

* 1. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно двух произвольных точек *А* и *В* равна нулю и сумма проекций этих сил на какую-либо ось, не перпендикулярную прямой, соединяющей точки *А*
* *В*,равна нулю



*∑MА* ( *F i* ) *=* 0



*∑MВ* ( *F i* ) *= 0*

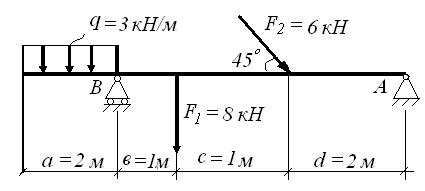


*∑Mix* ( *F i* ) *= 0*

**План решения задач по теме: Плоская система сил**

1. Рассмотрим равновесие несвободного твёрдого тела.
2. Покажем на расчётной схеме все действующие силы.
3. Выберем направление осей координат *х* и *у*.
4. Освободившись от связей заменим их реакциями связей, а за-тем для полученной плоской системы сил составим уравнения равно-весия.
5. Выполним проверку и запишем ответ.

**Задача 1.6.** Определить реакции опор*А*и*В*балки,находящейсяпод действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределён-ной нагрузки. Интенсивность распределённой нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке 1.18. Весом балки пренебречь.



**Рис. 1.18. Силы действующие на балку**

*Дано:* схема(рис. 1.18), *q* = 3кН/м, *F1* = 8кН, *F2* = 6кН, *а* = 2м,

* = 1 м, *с* = 1 м, *d* = 2 м.

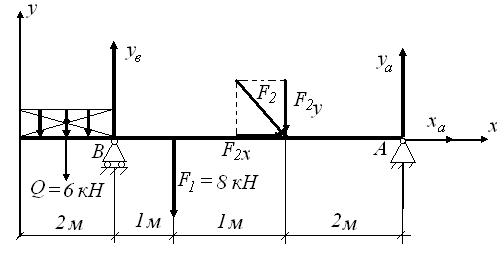
*Определить:* реакции опор.

*Решение*

Покажем на расчётной схеме все действующие силы (рис. 1.19).

Выберем оси координат *уОх*.

1. Распределённую нагрузку заменим сосредоточенной силой *Q = q* ∙2 =3∙2 = 6кH–равнодействующая распределённый нагрузки.
2. Освободившись от связей в шарнирах *А* и *В* заменим их реак-циями связей, а затем для полученной плоской системы сил составим уравнения равновесия:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Рис. 1.19. Расчётная схема к задаче 1.6** | |  |
| *∑Fx =*0; | 6 ∙cos 45*+ xa* *=* 0; |  |
| *xa = −* 6∙cos 45= − 4,2кН. | |  |
| *∑ Fy =*0; | *ya + yв −* 8 *−* 6∙cos 45 *=* 0. | (1.2) |

* *МА =* 0; 6∙sin 452 +8 (2+1)+(−*yв* (2+1+1)) +6(4+1) = 0; *yв =* (6∙ 0,707 ∙ 2 + 24 + 30) ∙ 14 = 15,6кН.

из уравнения (1.2) *ya* *= −yв* *+*8 + 6 + 6∙ sin45 = 2,6 кН.

*Проверка:*

* *МВ =* 0;– *F*11– *F****2****∙*sin452+ *ya*(2+1+1) + *Q* ∙1= 0;

*–* 8∙1– 6∙sin 45о2 + 2,6 (2+1+1) + 6∙1 = 0;

0=0.

*Ответ:* *xa* = − 4,2кН, *ya =* 2,6кН, *yв* = 15,6кН*.*

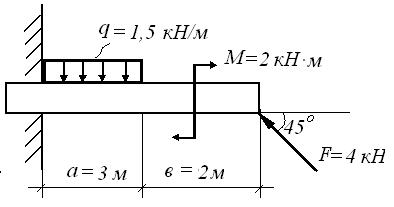
**Задача 1.7.** Определить реакции заделки консольной балки,изображённой на рис. 1.20 и находящейся под действием равномерно распределённый нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

*Дано:* схема(рис. 1.20), *q* = 1,5кН/м, *М* = 2кН∙м, *F* = 4кН,

* = 3 м, *в* = 2 м.

*Определить:* реакции заделки.

21

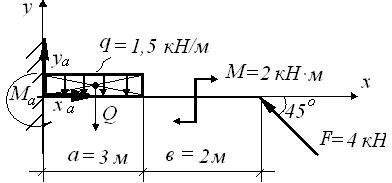


**Рис. 1.20. Силы, действующие на консольную балку**

*Решение*

Покажем на расчётной схеме все действующие силы (рис. 1.21).

Выберем оси координат *уОх*.



**Рис. 1.21. Расчётная схема консольной балки**

Равнодействующая распределённый нагрузки *Q =* 1,5∙3 = 4,5 кН. Для определения опорной реакции следует найти три неизвест-ные: составляющие опорной реакции по осям координат *ха,* *уа* и реак-

тивный момент *Ма* относительно центра тяжести опорного сечения. Для полученной плоской системы сил составим уравнения рав-

новесия: *∑* *Fx* *=* 0; *ха* *−* 4 ∙ cos 45 = 0; *ха =* 4 ∙ 0,707 = 2,83кН.

*∑Fy =* 0; *ya − Q +* 4∙sin45= 0; *ya = Q − +* 4∙sin45 *=* 1,67кН.

* *МА* = 0; *Ма – Q* 1,5 − 2 + 4sin45∙1,5 = 0;

*Ма* = 4,5∙1,5 + 2 –40,707(3 + 2) = − 5,4кНм.

*Проверка:*

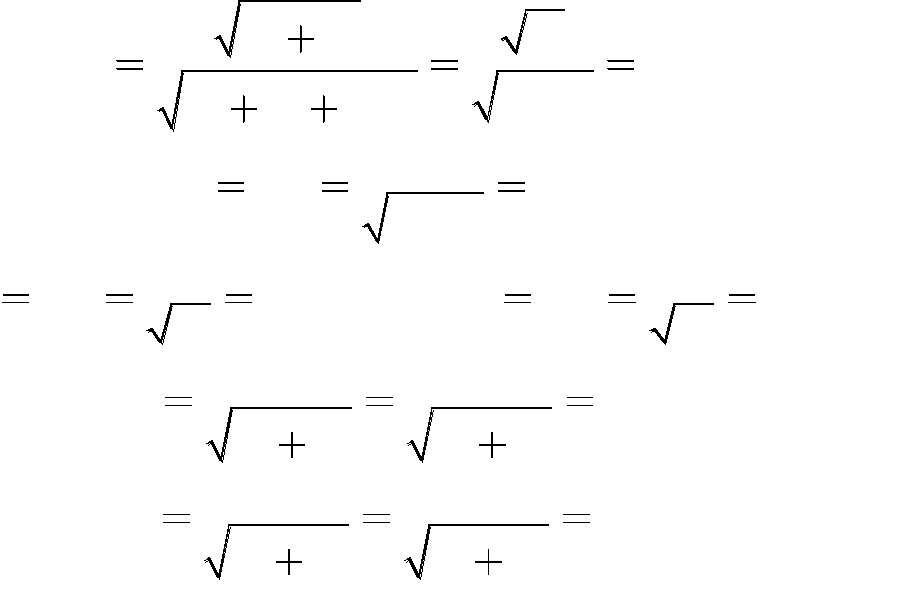
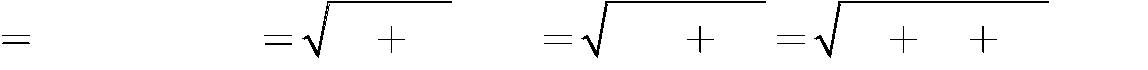
* *МВ =* 0; *Ма + Q* (1,5+2) − 2 – *ya ∙* 5 = 0;

22

– 5,4 + 4,5∙3,5 – 2– 1,67 ∙5 = 0;

0=0.

*Ответ:* *xa =* 2,83кН, *ya* = 1,67кН, *Ма* =– 5,4кНм.



**Практическое занятие № 3**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, ТРАЕКТОРИИ,**

**СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ**

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изуча-ется движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, без учёта сил, вызывающих и определяющих это дви-жение.

Положение точки в пространстве определяется тремя координа-тами. Непрерывная кривая, которую описывает точка при своём дви-жении в пространстве относительно выбранной системы отсчёта, называется траекторией точки.

Движение точки по отношению к избранной системе отсчёта считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени.

Уравнения, определяющие положение движущейся точки в зави-симости от времени, называются уравнениями движения (рис. 3.1).

Способы задания движения точки:

1. Естественный (*геометрический*) способ задания движения

точки: задаётся траектория движущейся точки в некоторой системе отсчёта *оxyz*; на траектории выбирается неподвижная точка – начало отсчёта *о,* с указанием положительного и отрицательного направления отсчёта; указывается закон движения точки вдоль траектории в виде уравнения *S = S (t)*, т.е. расстояние (*с соответствующим знаком*) по дуге точки *М* от начала отсчёта точки *о*, а также начало отсчёта вре-

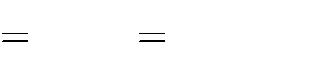
мени (*начальный момент* *t = t0*).

1. . Координатный (*аналитический*) способ задания движения точки означает, что необходимо задать координаты *x, y, z* этой точки как функции времени:



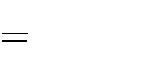
*х х*(*t* ); *у* *у*(*t* ); *z* *z* (*t* )–уравнения движения точки.

Если при своём движении точка все время находится на некото-рой плоскости *оху* уравнения движения, имеют следующий вид:



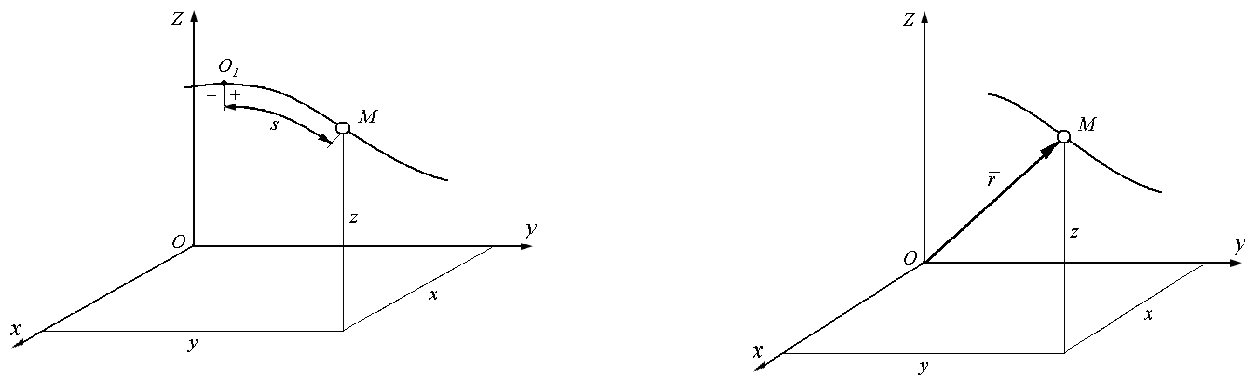
* *х*(*t* ); *у у*(*t* ).

Если движение происходит вдоль какой-либо оси, то принимая ее за ось *oх*, получим *х х* (*t* ) – закон прямолинейного движения.



37

*v* (*t* ).

**

геометрический способ

векторный способ

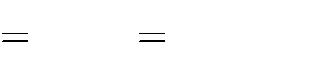
**Рис. 3.1. Способы задания движения точки**

2. Координатный (*аналитический*) способ задания движения точки означает, что необходимо задать координаты *x, y, z* этой точки как функции времени:

**

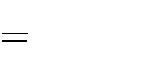
*х х*(*t* ); *у у*(*t* ); *z* *z* (*t* )–уравнения движения точки.

Если при своём движении точка все время находится на некото-рой плоскости *оху* уравнения движения, имеют следующий вид:

**

* *х*(*t* ); *у у*(*t* ).

Если движение происходит вдоль какой-либо оси, то принимая

**

* за ось *oх*, получим *х х* (*t* ) – закон прямолинейного движения.
  1. Векторный способ задания движения точки – когда положение точки можно задать радиусом-вектором *r* проведенным из начала ко-ординат *о* в точку *М*.

При движении точки ее радиус-вектор *r* изменяет величину и

**

направление и, следовательно, является функцией времени *r* *r* (*t*).

Это равенство называется векторным уравнением движения точ-ки или законом движения точки в векторной форме.

Движение точки в пространстве, прежде всего, определяется ее скоростью.

**Скорость точки** –это векторная величина,характеризующаябыстроту и направление движения точки в пространстве.

Если точка за равные промежутки времени проходит равные от-

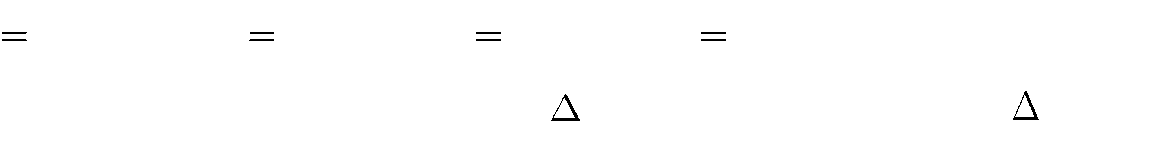
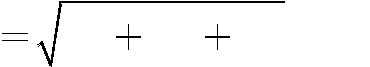
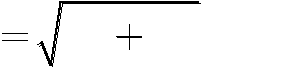
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| резки пути, то ее движение называется равномерным: *v* | *S* | . |  |
|  |  |
|  | *t* | |  |

**

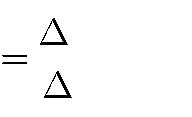
Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то ее движение называется неравномерным. Скорость неравно-мерного движения есть величина переменная и является функцией времени t.

Модуль скорости точки в случае, когда ее движение задано естественным способом вычисляется по формуле:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *v* |  |  | *v x* | 2 *vy* | | | 2 . |  |  |  |  |  |  |  |
| При движении точки в пространстве имеем: | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *v* | |  | *v x* 2 | | | *v y* 2 | | | *vz* 2, | | | |  |  |  |  |
| где *vz* | *dz* |  |  |  | *v* | *x* |  |  |  |  |  |  | *vy* |  |  |  |  |  | *v* | *z* |  |  |
| ; cos( *v*, *x* ) | | |  | ; cos( *v*, *y* ) | | | | | ; cos( *v*, *z*) | | | | . |  |
| *dt* | *v* | | | *v* | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v* | | |  |
| Отношение вектора перемещения | | | | | | | | | | | | | | | *r* к промежутку времени *t* , | | | | | | |  |



* течении которого произошло это перемещение, представляет собой вектор средней скорости *~~v~~*cр воображаемого движения точки , когда ее

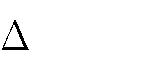


|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | . |  |
| движение задано векторным способом: |  |  |  |  | *~~r~~* |  |
| *~~v~~* |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | cр | | | *t* | | |  |
|  |  |  |  |  |  |

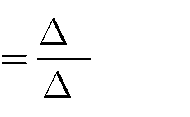
Вектор скорости точки *~~v~~* направлен по касательной к траекто-рии в сторону движения точки.

Единица измерения скорости в СИ – длина/время (м/с, км/ч). Ускорением точки называется векторная величина, характеризу-

ющая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.



Отношение приращения вектора скорости *~~v~~* к соответствую-щему промежутку времени *t* определяет вектор среднего ускорения точки



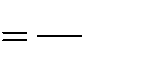
*~~v~~*

*~~a~~*ср *t* .

Единица измерения ускорения в СИ – длина/(время)2 (м/с2). Касательное ускорение характеризует алгебраическое измене-

ние вектора скорости. Вектор *~~а~~*τ называют касательным ускорением точки:

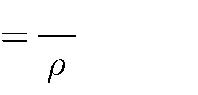
*d~~v~~*



*~~a~~*τ *dt* .

Нормальное ускорение характеризует изменение направления вектора скорости. Вектор *~~а~~п* называется нормальным ускорением точ-

ки: *~~a~~~~n~~* *v*2,

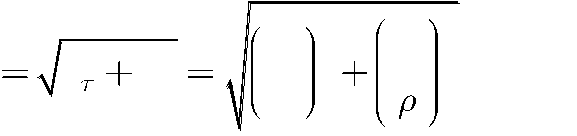


где  – радиус кривизны траектории в месте, где находится точка в данный момент времени.

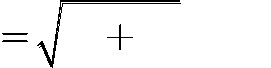
Полное ускорение точки является векторной величиной и опре-

деляется, как геометрическая сумма касательной и нормальной со-ставляющей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *dv* 2 | | *v*2 2 | |  |
|  | *а* 2 | *а*2 |  |
| *а* |  |  |  |  | . |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  | *n* |  | *dt* | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |



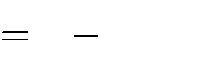
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Полная величина ускорения | | | | | | | | | *а* | | |  | *а х*2 | | *а*2*у* . | | | |  |  |  |  |  |
| При движении точки в пространстве: | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *a x* |  | *d* 2 *x* | | | ; *a* *y* | |  | *d* 2 *y* | |  | ; *az* | |  | *d* 2 *z* | | | . |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *dt* 2 | |  | *dt* 2 | |  |  | *dt* 2 | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *a* | | *x* |  |  |  |  |  |  | *ay* | |  |  |  |  |  |  | *a* | *z* |  |  |
| cos( *~~a~~* , *x* ) | | | ; cos( *~~a~~* , *y* ) | | | | |  | ; cos( *~~a~~* , *z*) | | | | | | . |  |
|  |  |  |  |  | *a* |  |  |  |
|  |  |  | *a* | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *a* | | |  |



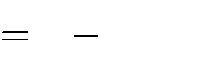
**План решения задач по теме: Определение уравнений дви-жения, траектории, скорости и ускорения точки**

1. Выясним все заданные величины и приведём их к одной си-стеме единиц: расстояние *s* измеряется в м, время *t* – сек, скорость *v* – м/с, км/ч, ускорение *а* – м/с2.
2. Строим график траектории движения точки с указанием мас-штаба по осям координат.
3. Выполним проверку и запишем ответ.

**Задача 3.1.** Точка движется по траектории в соответствии с



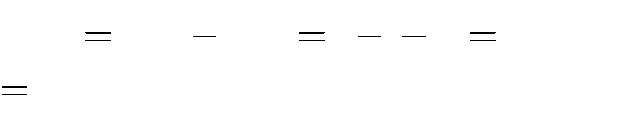
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| уравнением *S* | *t*2 | 4 (*S* – в метрах, *t* – в секундах). Построить график |
| движения точки и найти путь, пройденный точкой за первые 3 с. | | |
| *Дано: S* | *t*2 | 4. |



*Определить: SП* .

*Решение*

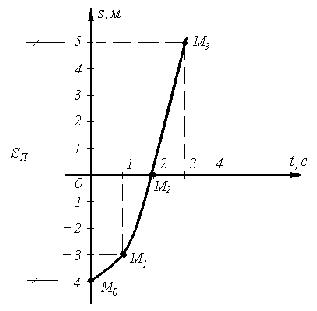
1. Зная уравнение движения точки *М*, построим траекторию точ-ки (рис. 3.2) – правая ветвь параболы.
2. Путь, пройденный точкой *М* за 3 с, равен



*S П* *S* (3) *S*(0) 5 ( 4) 9 м.

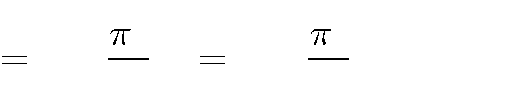
*Ответ:* *SП* 9 м.

40



**Рис. 3.2. График траектории движения точки *М***

**Задача 3.2.** Движение точки в плоскости*хоу*задано уравнениями

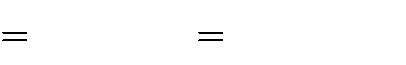


1. 2sin 3*t* , *y* 3cos 3*t* .

Найти уравнение траектории точки, а также положение точки на траектории в начальный момент времени (*t*0 0 ) и при *t*1 1 с. (рис. 3.3).



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Дано:* | *x* 2sin | π *t* | , *y* | 3cos | π *t* | . |  |
| 3 | 3 |  |
|  |  |  |  |  |  |



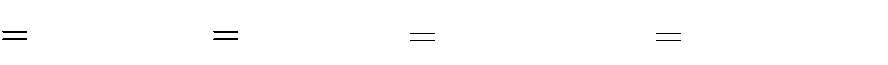
*Определить:* уравнение траектории точки,координаты(∙) *М*0,

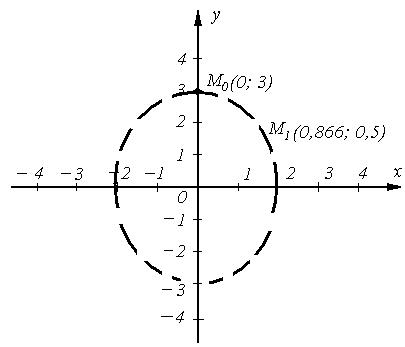
*М*1.

*Решение*

1. Уравнение движения точки задано в координатной форме. Уравнение траектории движения точки найдём, исключив из уравне-

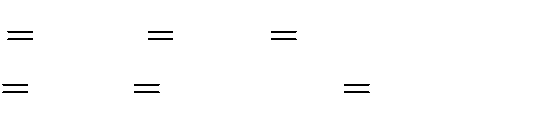
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ний ее движения параметр *t* (время): | | | | | | | | | | | *x* 2 | |  | | *y*2 | |  | 1 – эллипс. | | | |  |  |
| 4 | |  | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 9 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sin | π *t* |  | *x* | , | cos | π*t* |  | *y* | sin 2 | π *t* | |  |  | *x* 2 | | , | | cos2 | π *t* |  | *y*2 | . |  |
| 3 | 2 | | 3 | 3 | |  | | 4 | | |  | 9 | |  |
|  |  |  |  |  | 3 |  |  |  | 3 | |  |  |





**Рис. 3.3. Траектория движения точки**

1. Покажем на расчётной схеме траекторию движения точки

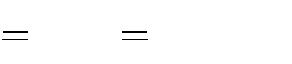
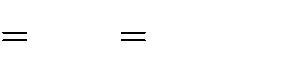


|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| При | *t*0 | 0 | *x*0 | 0, *y*0 3м . |
| При | *t*1 | 1 *c* | *x*1 | 0,866 м, *y*1 0,50 м . |

*Ответ:* траектория–эллипс, *М*0(0; 3), *М*1(0,866; 0,50).

**Задача 3.3.** Заданы уравнения движения точки:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x t* 2, *y* | 1 | *t*3 | ( *х*, *y* – в сантиметрах, *t* – в секундах). |  |
|  |  |
|  | 3 | |  |  |



*Дано: x* *t* 2, *y* 13*t*3 .

Определить: 1) траекторию точки; 2) скорость точки при *t*1 = 1 с;

1. ускорение точки при *t*2 = 2 с.

*Решение*

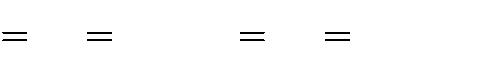
1. Исключая *t* из уравнений движения, получим уравнение кри-

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вой по которой движется точка: | *y* | 2 |  | 1 | *x* | 3 | – полукубическая парабола. |  |
|  | 9 | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| Траекторией является часть | | | этой | | | | параболы, соответствующая |  |

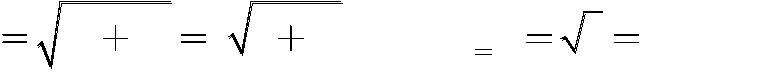


1. 0 .
   1. Находим проекции скорости точки на оси координат:

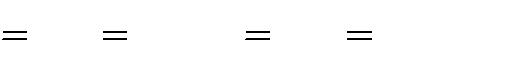
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v x* | *dx* | 2*t* , *v* *y* | *dy* | *t* 2 | , |  |
|  |  |  |
| *dt* | *dt* |  |
|  |  |  |  |  |



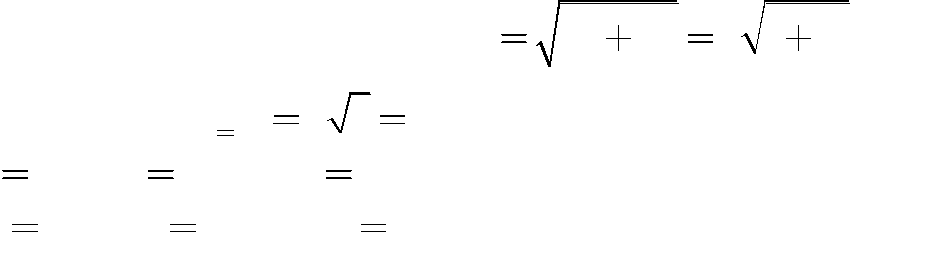
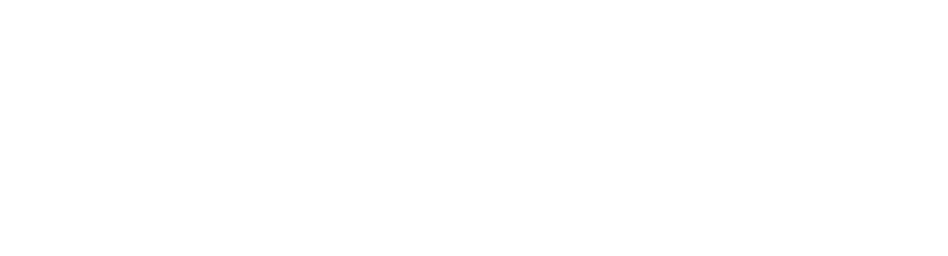
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* | *v* 2 | *v* 2 | *t* 4 *t*2, |  |  |  |  | см/с. |  |
| *v* | 1*c* | 5 2,24 | |  |
|  | *x* | *y* |  | *t* |  |  |  |  |

1. Находим проекции ускорения на оси координат:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a x* |  | *dvx* | | 2, | *a y* | |  | *dvy* |  |
|  | *dt* |  |  | *dt* |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *at* | | 2*c* |  |
| При | *t*1 | | 1*c*, | | *x*1 | 1 cм, | | |  |
| При | *t*1 | |  | 2*c*, | *x*2 | 4 cм, | | |  |
| *Ответ:* | | |  | траектория | | | | – |  |
| *v* 2, 24см/с, | | | *a* 4, 47см/c2. | | | | | |  |



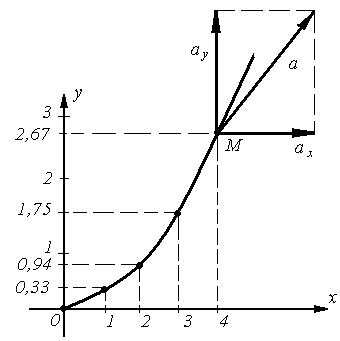
2*t* . *a* *a x*2 *a* 2*y* 21 *t*2.



25 4, 47 см/c2.

|  |  |
| --- | --- |
| *y*1 | 0,33 см. |
| *y*2 | 2,67 cм. |

полукубическая парабола (рис. 3.4),



**Рис. 3.4. Траектория точки**

**Задача 3.4.** Точка движется по некоторой траектории согласно

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *t* 4 |  | *t*3 | |  |  |
| закону | *S* |  |  |  |  | *t* 2 | (*S* – в метрах, *t* – в секундах). Определить мо- |  |
| 12 | | 2 | |  |
|  |  |  |  |  |



мент времени *t*, когда скорость точки приобретает наибольшее значе-ние и величину наибольшей скорости.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *t* 4 |  | *t*3 | |  |
| *Дано: S* |  |  |  |  | *t* 2. |  |
| 12 | | 2 | |  |
|  |  |  |



*Определить: t*.

*Решение*



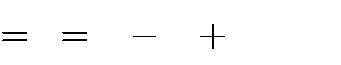
1. Определим скорость точки как функцию времени *v* *v* (*t* ):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *dS* |  | *t* 3 | | 3*t* 2 | |  |
| *v* |  |  |  |  |  | 2*t* . |  |
| *dt* | 3 | |  | 2 |  |
|  |  |  |  |
|  |  | 43 | | |  |  |  |

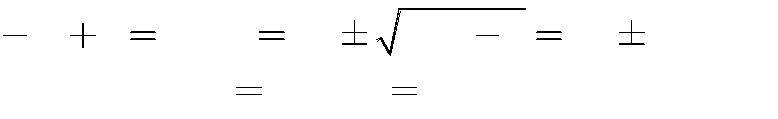


1. Найдём значение аргумента данной функции, при котором она достигает экстремального значения:

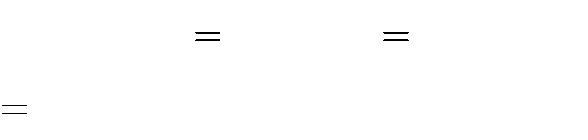
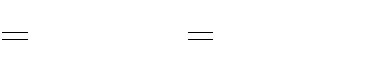
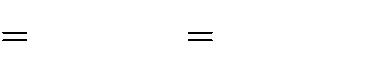
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *dv* | 0 *t* 2 | 3*t* 2. |  |
|  |  |
| *dt* |  |
|  |  |  |



Решая квадратное уравнение, находим значения корней

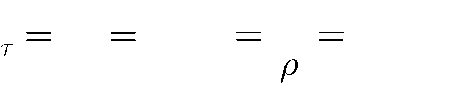


|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *t* 23*t* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 2 | 0, *t* | | | | | 1,5 | 2,25 2 1,5 0,5; | | | |  |
|  |  |  |  |  | 1,2 | | | | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | *t*1 | 2 c, *t*2 |  | 1 c. | | |  |
| При | *t* |  | 2 c | *v* |  | 2 | |  | м/c. |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 1 | |  | 1 | 3 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| При | *t* |  | 1 c | *v* |  |  | 5 | | м/c. |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 2 | 6 | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Следовательно при *t* 1 c, | | | | | | | | | | *v* |  | 5 | м/c. | |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | max | 6 | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ответ: t* | | | 1 c. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



**Задача 3.5.** Точка движется с постоянным тангенциальнымускорением *а* по окружности радиусом *R* без начальной скорости. Че-рез сколько секунд после начала движения касательное и нормальное ускорения станут численно равны между собой?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Дано: а* | *dv* |  |  |  | *v* 2 *v*2 | | | |  |
|  | *a*, | *a* | *n* |  |  |  | . |  |
|  |  |  |  |
|  | *dt* |  |  |  |  | *R* | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

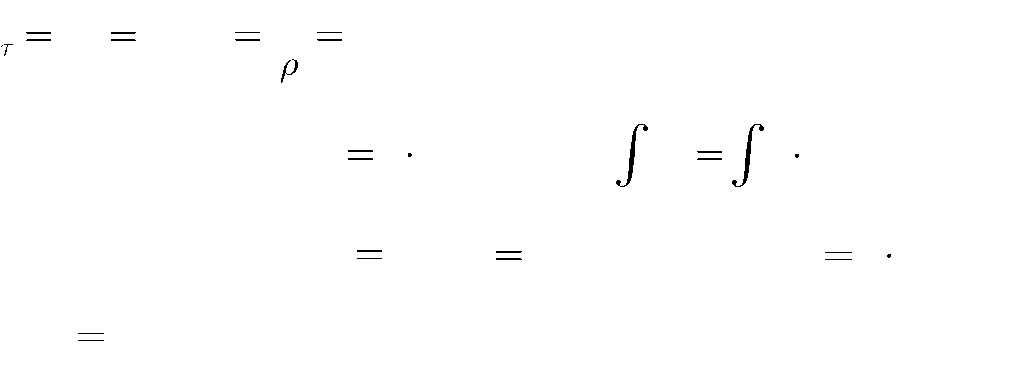


*Определить: t*.

*Решение*

1. По условию задачи касательное и нормальное ускорения

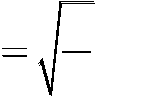
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *dv* |  |  |  |  | *v* 2 | | *v*2 | |  |  |  |
| имеют вид: | *а* |  |  |  | *a*, | *a* |  |  |  |  | . |  |  |  |
|  |  | *n* | | |  |  |  |  |
|  |  |  | *dt* |  |  |  | *R* | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v* | *t* |  |
| 2. Интегрируя уравнение *dv* | | | | | | | | | | *a dt*,имеем: | | *dv* | *a dt*,отсю- |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v*0 | 0 |  |
| да, принимая во внимание, что *v*0 | | | | | | | | | | 0 и *a const*, | | находим *v a t* и, | |  |
| следовательно, *a* | |  |  |  | *a* 2*t* 2 | . |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *n* | |  | *R* |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



1. В искомый момент времени *t*1 касательное и нормальное



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *a* 2*t* 2 |  |  | *R* |  |  |  |
| ускорения равны между собой, а потому | 1 | *a*,откуда *t*1 | |  | . | |  |
| *R* | *a* |  |
|  |  |  |  |  |  |



*R*

*Ответ: t*1 *a* .

44

**Задача 3.6.** Даны уравнения движения точки,причем*x*,*y*,*z*вы-



ражены в метрах: *x* 2*t* , *y*

тории в точке, где скорость



*Дано: x* 2*t* , *y* 4*t* 2 , *z*

4*t* 2 , *z* 3*t* 2. Найти радиус кривизны траек-

*v* движущейся точки равна5м/с.

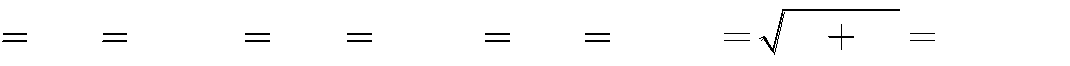
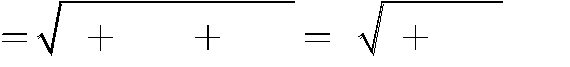
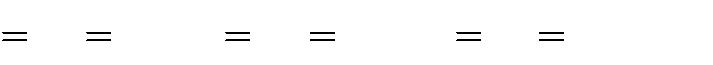
3*t* 2.

*Определить:* ρ.

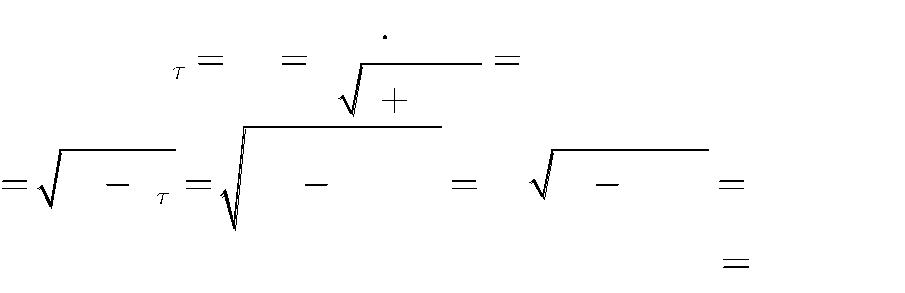
*Решение*

1. Определяем скорость и ускорение точки:

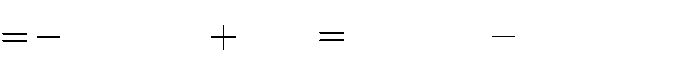
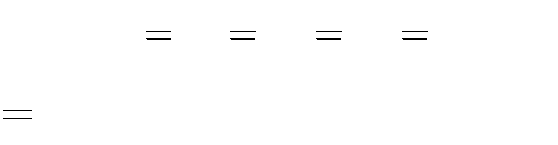
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *v x* |  |  |  |  | *dx* |  |  | 2, *v* *y* | |  | *dy* |  | 8*t* , *v* *z* | | | | *dz* | | | | | | | 6*t* , | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *dt* |  | *dt* | *dt* | | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | | | |  |  |  |  | |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4 64*t* 2 | |  | 36*t* 2 2 1 25*t* 2 , | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |
|  |  |  | *v* | | | |  |  |  |  |  |  |
|  | *dvx* |  |  |  |  |  |  |  | *dvy* | |  |  |  |  | *dvz* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a x* | 0, *a* *y* | | | | | |  | 8, | *az* | |  | 6, |  | *a* | | |  |  |  | 64 36 10. | | |  |
| *dt* |  | *dt* | |  |  | *dt* | |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



1. Определяем касательное и нормальное ускорения точки:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *a* | | | *dv* | | |  |  |  |  | 2 50*t* | | | |  |  |  |  | 100*t* | | | , |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *dt* | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v* |  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | |  | 1 25*t* | | | | | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |  | |  | | |  | |  | |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 100 2 *t* 2 | | | | | | |  | 10 | | |  |  |  |  |  |  | 20 | . |  |  |  |
| *a* | *a* 2*a* 2 | | | 100 | | | |  | *v* 2 | | 100*t* 2 | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *n* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v*2 | | |  |  |  | *v* | |  |  |  |  |  | *v* | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3. Определим радиус кривизны траектории при *v* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  | 5 м/с : | | | |  |
|  | ρ | |  | *v* 2 | |  | | *v*3 | |  |  | | 53 |  |  |  |  | 6, 25 м. | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *an* | | | | 20 | | 20 | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ответ:* ρ | 6, 25 м. | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **Задача 3.7.** Даны уравнения движения точки в плоскости*xy*(*x,y* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| – в сантиметрах, *t* – в секундах): | | | | | | | | | | *x* | | | | | 2cos( | | | | | π | *t*) | 3; *y* | | 2sin( | | | π | *t*) 1. |  |
| 4 | 8 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

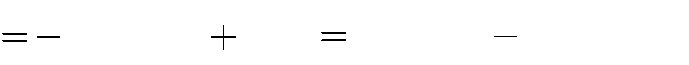


Определить уравнение траектории точки; для момента времени *t*11с,найти скорость и ускорение точки,а также ее касательное и



нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Дано: x* | 2cos( | π | *t*) 3*; y* | 2sin( | π | *t*) 1*.* |  |
| 4 | 8 |  |
|  |  |  |  |  |  |



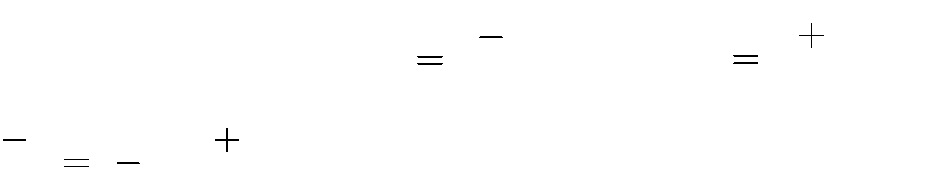
*Определить:* траекторию точки *v* , *a* ,ρ.

*Решение*

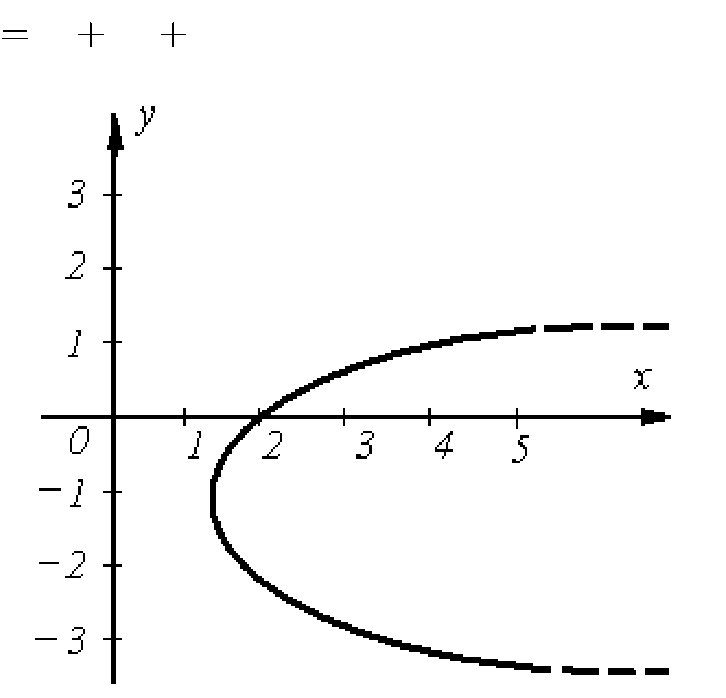
1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения времени *t*. Поскольку *t* входит в аргу-менты тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше

45

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| другого, | | | | |  | используем | | | | | | | | | формулу | | |  |  | cos 2α | | 1 | | 2sin 2 α | или |  |
| cos( | | π | | *t* ) | 1 | 2sin | 2 | ( |  | π | | *t*). |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | |  |  | 8 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | Из уравнений движения находим выражения соответствующих | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| функций и подставляем. | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | Получим | | |  |  |  | cos( | | | π | *t*) | 3 *x* | , | sin( | π | *t*) |  | *y* | 1 | ; | следовательно, | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 4 | 2 | 8 | 2 | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 *x* | |  | 1 | 2 | ( *y* 1)2 | | | |  | . |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



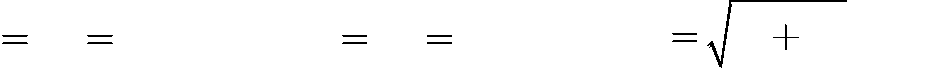
Отсюда окончательно находим следующее уравнение траекто-рии точки: *x* ( *y* 1) 2 1– парабола (рис. 3.5).



**Рис. 3.5. Траектория движения точки – парабола**

1. Скорость точки найдём по её проекциям на координатные оси:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *dx* |  | π |  | π |  | *dy* |  | π |  | π |  |  |  |
| *v x* |  | sin( | *t*); *v x* |  | cos( | *t*); *v* | *v x*2 *v* 2*y* |  |
| *dt* | 2 | | 4 | *dt* | 4 | | 8 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |



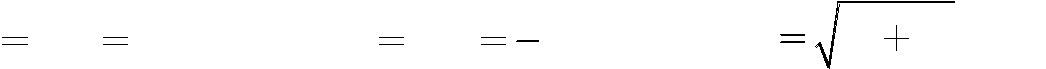
и при *t* = 1 c



|  |  |
| --- | --- |
| *v*1*x* 1,11см/с, *v*1*y* 0,73см/с, *v*11,33см/с | (3.1) |

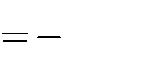
1. Аналогично найдём ускорение точки:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *dvx* |  | π 2 |  | π |  |  | *dvy* |  | π 2 | | π |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | 2 |  |
| *a x* |  |  |  | cos( |  | *t*); | *a y* |  |  |  | sin( |  | *t*); | *a* | *a x* | *ay* |  |
| *dt* | 8 | | 4 | *dt* | 32 | | 8 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

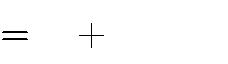


и при *t* =1 c

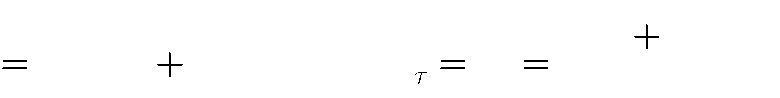
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | 0,87 см/с2, | *a* | 0,12 см/с2, | *a*0,88 | см/с2 *c*2 | (3.2) |
| 1*x* |  | 1*y* |  | 1 |  |  |
|  |  |  | 46 |  |  |  |



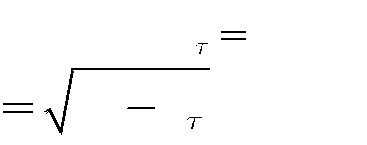
1. Касательное ускорение найдём, дифференцируя по времени



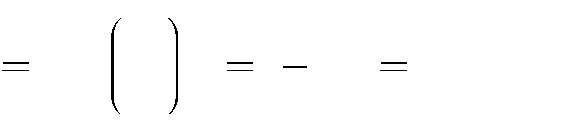
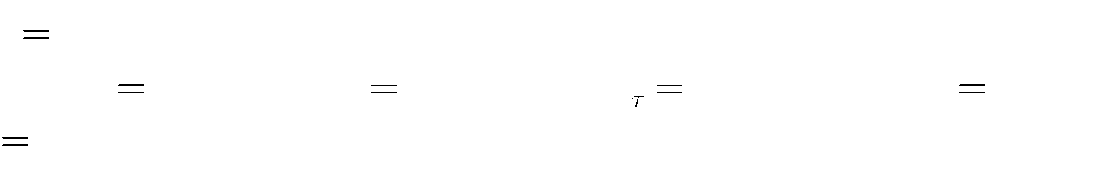
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| равенство *v* 2 *v* *x*2 | | | *v*2*y* . | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Получим: | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2*v* | *dv* |  | 2*v* *x* | *dvx* | 2*vy* | *dvy* | и | *a* | *dv* |  | *v x a x* | *v y ay* | . | (3.3) |  |
| *dt* | | *dt* | *dt* | *dt* |  |  | *v* |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



Числовое значение всех величин, входящих в правую часть вы-ражения (3.3), определены и даются равенствами (3.1) и (3.2). Подста-



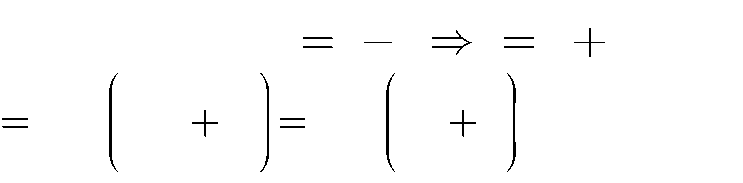
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вив в (3.3) эти числа, найдём сразу, что при *t=*1 c | | | | | | | | | | *a* | | 0,66 см/с2. | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |
| 5. Нормальное ускорение точки *a* | | | | | | | |  | *a* 2 | *a*2. | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | *n* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Подставляя сюда найденные числовые значения *a*1 и *a*1τ , полу- | | | | | | | | | | | | | | |  |
| чим, что при *t* =1 c *a* | | | | | 0,58 см/с2. | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 1*n* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6. Радиус кривизны траектории ρ | | | | | | | | *v* 2/ *a* . | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | *n* |  |  |  |  |  |  |
| Подставляя сюда числовые значения *v*1 и *a*1*n* , | | | | | | | | | | | | найдем, | что при | |  |
| *t =* 1 cρ1 | 3,05 см. | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ответ: v* | | 1,33 см/с, | | | | *a* | 0,88 см/с2, *a* | | | 0,66 |  | см/с2, *a* |  | 0,58 |  |
|  | 1 | |  |  |  | 1 |  | 1 | |  |  | 1*n* | |  |  |
| см/с2, ρ | 3,05см. | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **Задача 3.8.** | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Дано: у* | | 8sin | π | *t* | ; *x* | *t* | 4; *t* 1 c. |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 4 | |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



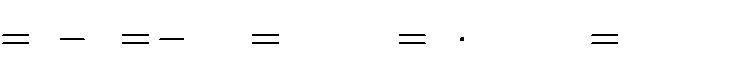
*Найти:* уравнение движения точки;скорость и ускорение точки;нормальное и касательное ускорения точки; радиус кривизны траек-тории движения.

*Решение*

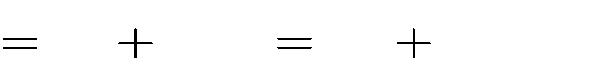
Уравнение движения можно рассматривать как параметрическое уравнение траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме исключим время *t* из уравнения движения:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *х* | *t* | 4 | | *t* | *x* | 4 ; |  |  |  |
| *y* | 8sin | π | *x* | 4 | 8sin |  | π*x* | π | – уравнение траектории дви- | | | |  |
| 4 | 4 | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| жения точки *М*. | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| При | *t* = | 1 | с, | то: | *x* | 1 | | 4 | 3; *y* | 8sin | π | 8 0,7071 5,66. |  |
| 4 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



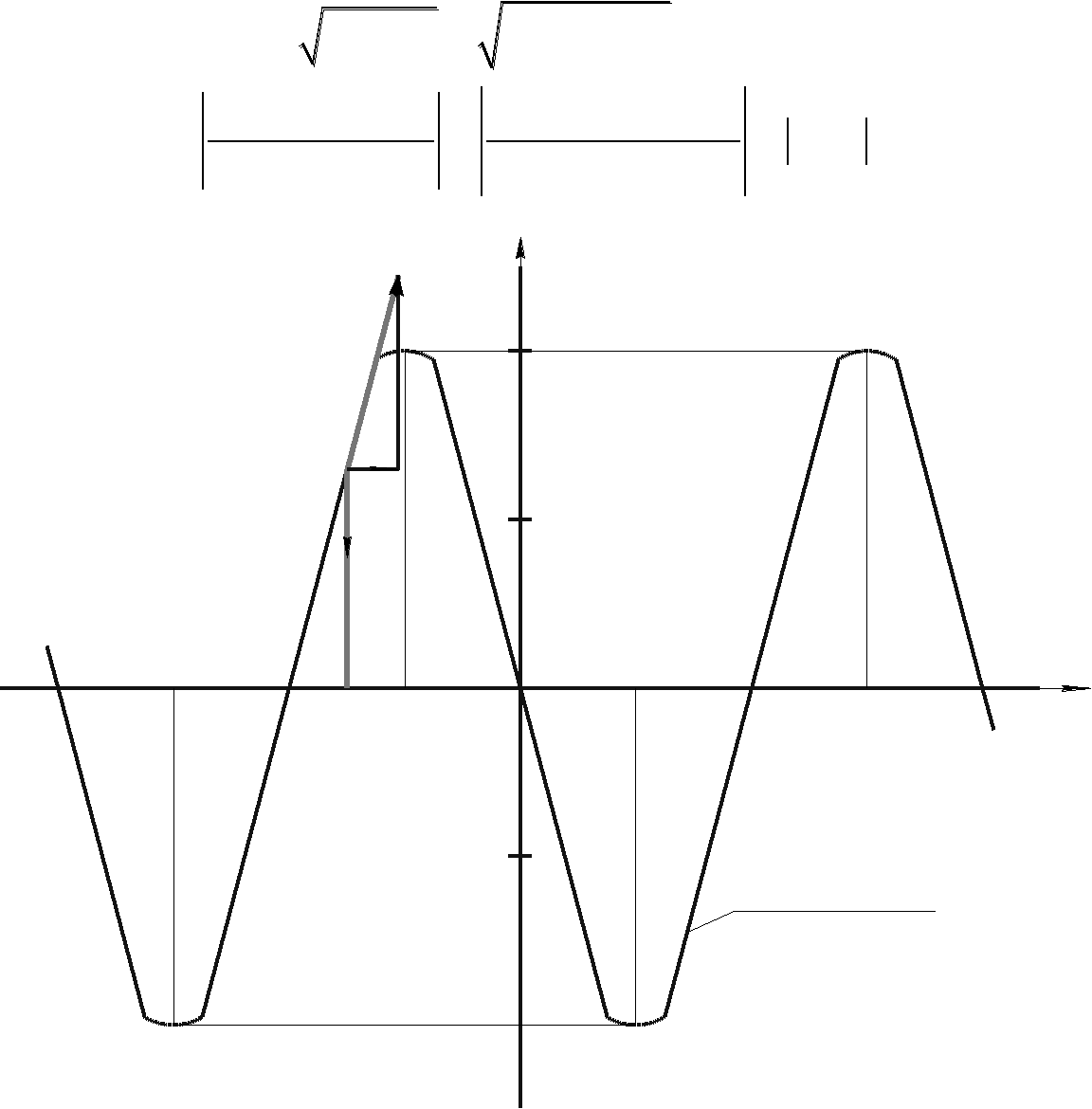
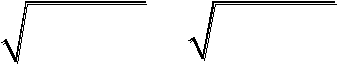
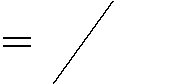
* (-3; 5,66) (рис. 3.6).



*~~v~~* *~~v~~ Хi* *~~v~~~~Yi~~*~~;~~ *~~a~~* *~~a~~ ~~Xi~~* *~~a~~~~Yi~~*~~,~~

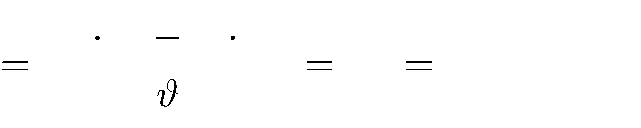
где *i, j* *–* ординаты осей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Найдем проекции на оси координат скорости и ускорения, диф- | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| ференцируя по *t* уравнение движения: | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Знак «–» означает, что движение точки замедленное и направле- | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| ние касательной ускорения и скорости не совпадают. Найдем модуль | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| нормального ускорения точки: | | | | | | | *а* | *v*2 | ρ | | . |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | *n* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *v* | *X* |  1 см/с; | ** | *Y* |  2π  cos( π *t* ); | | | *v*  |  | ** 2 | |  |  ** 2 | |  | 1 4, 42 |  4, 5 см/с; | |  |
|  |  |  |  | 4 |  |  |  |  | *X* | |  | *Y* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *aX* 0; *аY*  | | | π 2 |  |  | π |  |  |  | | ; *aY* |  | 2 | ; |  |  |
|  |  |  |  |   sin  | | 4 | *t*  | |  | | 3, 5 см/с | |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *а*  *аX*2 *aY*2 | | | | 3, 5 2  0  3, 5 cм/с2 ; | | | | | | | | | |  |  |  |
|  |  | *a*  *v X*  *a X*  *vY* *aY* 104, 43, 53, 4см/с2. | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |
|  |  | τ |  |  | ** |  |  | 4, 5 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *Y* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | ** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | *У* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *8* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | *M Х* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *4* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | *а=аУ* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *- 8* | | *- 6* | *- 4* | | *- 2* |  | *0* |  | *2* | |  |  |  | *4* | | *6* | *8* | *Х* |  |
|  |  |  |  |  |  | *- 4* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *x* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Y=8* sin*(4 +)* | | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *- 8* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | **Рис. 3.6. Траектория движения точки *М*** | | | | | | | | | | | | |  |  |  |

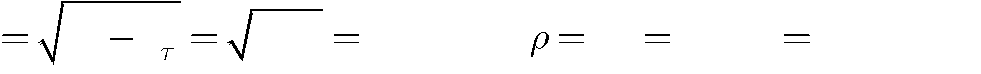


48

Если радиус кривизны (ρ) траектории рассматриваемой точки не-известен, то нормальное ускорение можно определить по формуле:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v* | |  | *a* | | | *v* | *a* | |  |  |  |  | 3,5 | |  |  | 0,8 см/с2; | | | | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | *а* | | |  |  |  |  | *X* |  | *Y* | | *Y* |  |  | *X* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *n* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4,5 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *v*2 |  |  | 20,25 | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *a* 2 *a*2 | | | |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,8 см/с2 ; | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *a* | | 0,69 | | | | | | |  |  |  |  |  | 25,3 см. | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *n* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *аn* |  |  | 0,8 | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *Ответ:* Сведём данные табл. 3.1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Таблица 3.1 | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | | | | |  |  |  |  |  |  |  | | | |  |  | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Х,* |  | *Y,* см |  | *υX,* |  |  |  | *υY,* | | | | |  |  |  | *υ,* |  |  | *aX,* | | | |  | *aY,* | | |  |  |  | *a,* |  | *aτ,* |  | *an,* | *ρ,* см |  |
| см |  |  |  | см/с |  |  |  | см/с | | | | |  |  |  | см/с | | см/с2 | | | | |  | см/с2 | | | | | см/с2 | |  | см/с2 |  | см/с2 |  |  |
| -3 |  | 5,66 |  | 1 |  | 6,28 cos | | | | | | | ** | | | 4,5 |  |  | 0 | | | |  | -3,5 | | |  |  | -3,5 | |  | -3,4 |  | 0,8 | 25,3 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



**Практическое занятие № 4**

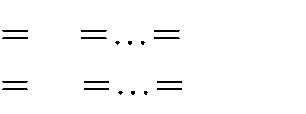
**ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА**

Для тех случаев, когда расстояние между частицами тела не из-меняется, но по условиям задачи приходится учитывать движение его различных частей, разработан раздел кинематики, называемый кине-матикой твёрдого тела.

При решении практических задач нас интересуют простейшие виды движения тел, к которым относятся поступательное движение и вращение тела вокруг неподвижной оси.

Поступательным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющий две произволь-ные точки тела, остаётся во время движения параллельным своему первоначальному положению.

При поступательном движении твёрдого тела все его точки опи-сывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *A* | |  |  | *B* | |  |  |  | ; | |  |
|  | *~~v~~* | *~~v~~* | | *~~v~~* | |  |
|  |  | | *A* |  |  | | *B* |  |  |  | | . |  |
| *~~a~~* | | *~~a~~* | |  | *~~a~~* | |  |

Поступательное движение твёрдого тела вполне определено движением одной из его точек. Если скорость поступательного дви-жения постоянна *v* const , то все точки тела совершают прямоли-



нейное и равномерное движение.

49

Вращательным движением твёрдого тела называется движение, при котором две его точки *А* и *В* остаются неподвижными. Так как те-ло абсолютно твёрдое, то вместе с точками *А* и *В* будут неподвижны-ми все точки, лежащие на прямой *АВ* *–* называемой осью вращения.

Уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси: φ φ *t* .

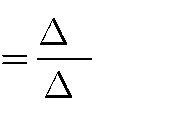


Оно полностью определяет положение тела в любой момент времени.

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения тела будут угловая скорость  и угловое ускорение .

Угловая скорость тела  – векторная величина характеризующая быстроту изменения угла поворота с течением времени. Размерность угловой скорости обратна размерности времени [с-1] или [рад/с1].

Средняя угловая скорость тела за промежуток времени *t* равна

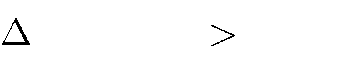


φ

ω cp *t* .



Знак угловой скорости определяется знаком приращения φ , если φ>0 , то ω 0 , и наоборот.



Если тело совершает вращательное движение по произвольному закону, то угловая скорость является функцией времени:

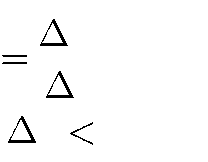


* ω *t* .

Числовое значение угловой скорости тела в данный момент вре-мени равно первой производной от угла поворота по времени.

Угловое ускорение  – векторная величина характеризующая быстроту изменения угловой скорости тела в с течением времени. Единица измерения углового ускорения [с-2] или [рад/с2].

Среднее угловое ускорение за промежуток времени *t* равно:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ε cp |  | ω | . |  |
|  |  |  |
|  |  | *t* | |  |
| Если ω 0 , то ε 0 , если | ω 0 , то ε 0 . | | |  |



Точки вращающегося тела, расположенные на одной прямой, параллельной оси вращения, совершают одинаковые движения.

Траекторией любой точки *М* вращающегося тела, является дуга окружности, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Радиус этой окружности равен расстоянию точки до оси.

Закон движения точки *М* по дуге окружности будет иметь вид *S t R* φ *t* ,



где *S* *M* 0 *M* –пройденный путь точкой.

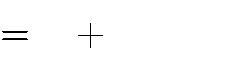


Если движение точки *М* задано естественным способом, то ал-гебраическое значение скорости определяется по формуле:

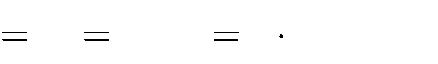


1. *R* ω.

Ускорение точки равно:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | τ |  | *n* , |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *~~a~~* | *~~a~~* | *~~a~~* |  |
| где |  |  |  |  | *dv* | | | *R* | |  | *d* 2φ | | *R* | *d*ω | *R* ε | | | – касательная составляющая ускоре- | | | | |  |
|  | *~~a~~* | τ | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *dt* | | |  | *dt* 2 | | *dt* |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ния; *a* | | | | |  | *v* 2 | |  | *R*2ω2 | | | | *R* ω2–нормальная составляющая ускорения. | | | | | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *n* |  | ρ | |  |  |  | *R* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | Модули скорости прямо пропорциональны расстоянию точки до | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| оси вращения. | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | Скорость *v* при вращательном движении тела называется линей- | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| ной скоростью. | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | **Задача 4.1.** Рейка | | | | | | | | | | *1*,ступенчатое колесо *2* с радиусами *R*2и *r*2и | | | | | | | | |  |



колесо 3 радиуса *R*3, скрепленное с валом радиуса *r*3, находятся в за-цеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. 4.1). Рейка



движется по закону *s*1 *f t* .



*Дано: R*2= 6см; *r*2= 4см; *R*3= 8см; *r*3= 3см;

*s*1

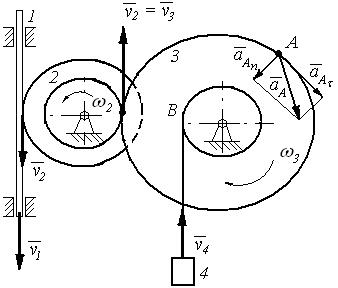
3*t*3

(*s* – в сан-

тиметрах, *t* – в секундах); А – точка обода колеса 3, *t*1 = 3 с.



*Определить:* 3, v4,3, *аА*,в момент времени *t* *t*1.

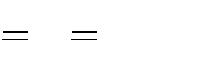


**Рис. 4.1. Расчётная схема к задаче 4.1**

51

*Решение*

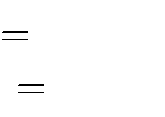
1. Определяем сначала угловые скорости всех колёс как функции времени *t*. Зная закон движения рейки *1*, находим её скорость



*v*1 *s*1 9*t* 2.



Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то *v*2 *v*1или



ω2 *R*2 *v*1.Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении,следователь-



но, *v*2 *v*3илиω2 *r*2 ω3*r*3.

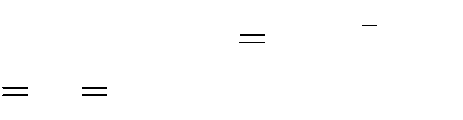
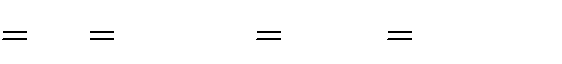
Из этих равенств находим

*v*4

ε 3

*a A*τ *aA*τ

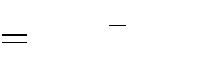
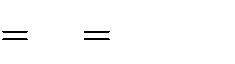
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ω | 2 |  | *v*1 |  |  | 3 | *t* 2 | , ω |  | *r*2 | ω | 2 | 3 | *t* 2. |  | (4.1) |  |
|  |  | *R*2 | | 2 | |  | 3 |  | *R*3 |  | 4 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Тогда для момента времени *t*1 | | | | | | | | = 3 с получим ω | | | | | | | 6,75c | 1. |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 3 | |  |  |  |
| 2. Определяем *v*4. | | Так | | | как | | | *v*4 | *vB* | | ω3*r*3, то | | | | при | *t*1= 3с |  |



20, 25 см/с.

1. Определяем 3. Учитывая второе из равенств (4.1), получим

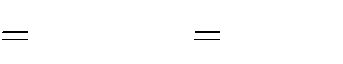
ω3 1,5*t* .



Тогда при *t*1 = 3 с ε 3 4,5 c 2.



1. Определяем *aA*. Для точки *А* *~~a~~* *A* *~~a~~* *A*τ *~~a~~An* , где численно



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *R* ε | , | *a* | *An* | *R* ω2.Тогда для момента времени *t*1= 3с имеем | | | |  |
| 3 3 |  |  | 3 | 3 |  |  |  |
| 36 cм/c 2 , | | | | *aAn* | 364,5 см/с2; *aA* | *а А*2τ *аАп*2366,3см/с2. | |  |



Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. 4.1.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *Ответ:* ω | 6,75c | 1; *v* | 20, 25 см/с; ε | 3 | 4,5 c 2 | ; |  |
|  |  | 3 |  | 4 |  |  |  |  |
| *a* | *A* | 366,3 см/с2. |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |



**Задача 4.2.** На рис. 4.2представленный механизм состоит иззубчатой рейки *CD*, ступенчатых колёс 1-3, находящихся в зацепле-нии или связанных ремённой передачей, и груза *Е*, привязанного к концу нити, намотанной на барабан колеса 3. Рейка *CD* движется по закону *S*= *f*(*t*) = 6*t* – 2*t*2, где *S* выражено в сантиметрах, а *t* – в секун-дах.

В момент времени *t*1 = 1 с определить:

1. угловую скорость и угловое ускорение колеса 2;
2. скорость и ускорение груза *Е*;
3. скорость и ускорение точки *В*, лежащей на колесе 3. Численно радиусы равны:

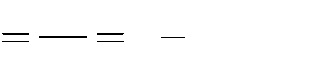
*r*1= 2см; *R*1= 4см; *r*2= 6см; *R*2= 8см; *r*3= 4см; *R*3= 12см.

52

*Решение*

1. Определяем скорость ведущего звена (рейки):

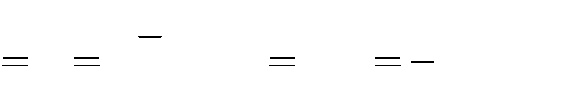
*dS*



*v* 6 4*t* .

*dt*

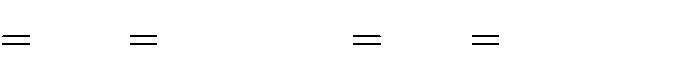
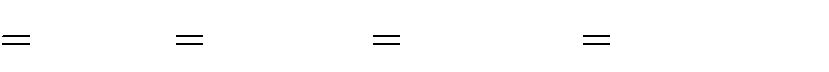
1. Находим угловую скорость и угловое ускорение колеса 1:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ω1 | *v* |  | 6 4*t* | , ε1 | *d*ω1 |  | 4*t* | . |  |
| *r*1 |  | *r*1 | *dt* |  | *r*1 |  |
|  |  |  |  |  |  |

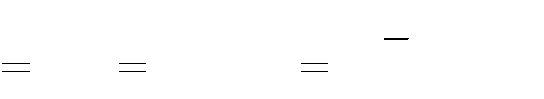
1. Используя соотношения, найдём угловые скорости и угловые ускорения ступенчатых колёс 2 и 3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ω 2 |  |  | *R*1 | | , ω | | 2 |  | ω1 *R*1 | , ε | | 2 | | ε1 *R*1 | | , | | ω2 | |  |  | *R*3 | | , |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ω1 | |  | *R*2 | | | |  | *R*2 | | |  | *R*2 |  |  | ω3 | | | | *r*2 | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ω | | 3 |  | ω 2 *r*2 | |  |  | ω1 *R*1*r*2 | | | , ε | | 3 |  | ε 2 *r*2 |  |  |  | ε1 *R*1*r*2 | | | | . | |  |
|  |  | |  |  | | |  |  |  |  | | | |  |
|  |  |  | *R*3 | | |  | *R*2*R*3 | | | |  |  | *R*3 |  |  |  | *R*2*R*3 | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

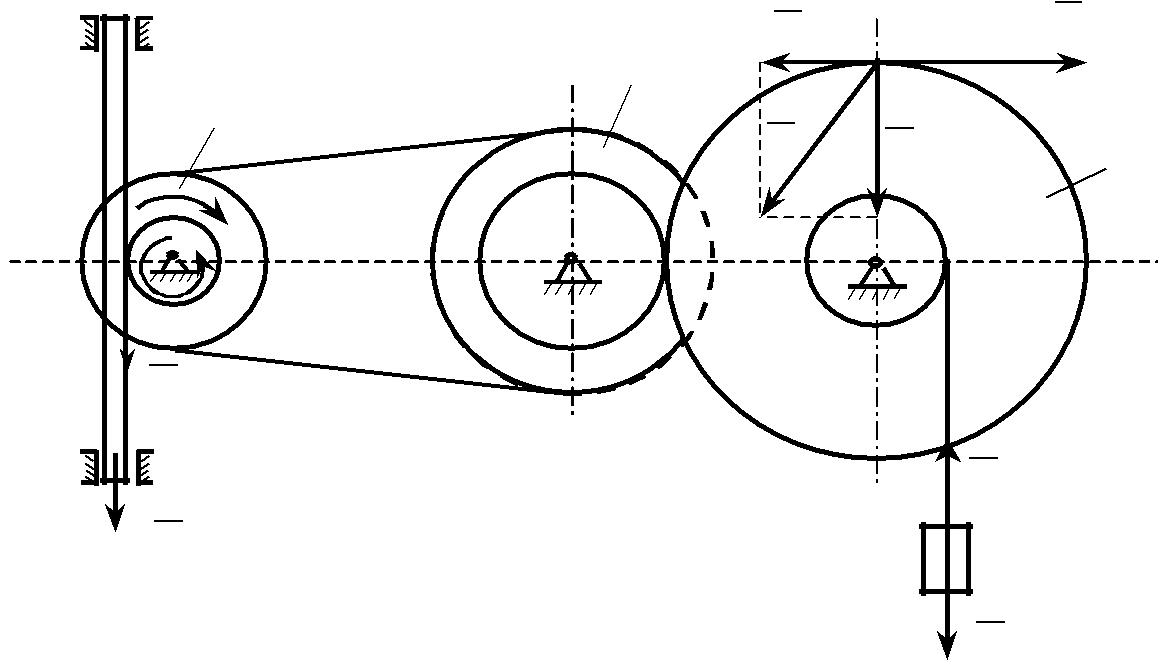


1. Определяем скорость и ускорение груза *Е*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v E* |  | ω3 *r*3 | ω1 *R*1*r*2 *r*3 | |  | | 6 4*t R*1*r*2 *r*3 | | | ; |  |
|  | *R*2*R*3 | | | |  | *r*1*R*2 *R*3 | |  |
|  |  |  |  |  |  |
| *a* | *E* | ε *r* |  | ε1 *R*1*r*2 *r*3 | |  |  | 4*tR*1*r*2 *r*3 | . |  |  |
|  |  | |  |  |  |
|  | 3 3 |  | *R*2*R*3 | | |  | *r*1*R*2 *R*3 | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |



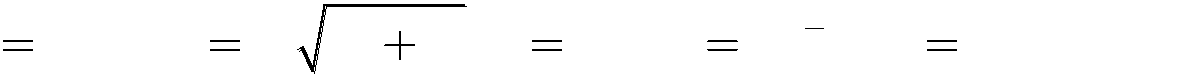
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *C* | *aB* | *B* | *vB* |  |
| 1 | 2 |  |  |  |
| *aB* | *a* |  |  |
|  | 3 |  |
| 1 |  | *Bn* |  |
|  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| *v*1 |  |  |  |  |
| *D* |  |  | *aE* |  |
| *F* |  |  | *E* |  |
|  |  |  | *vE* |  |



**Рис. 4.2. Расчётная схема к примеру решения задачи 4.2**

1. определяем скорость и ускорение точки *В*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | ε *R* , *a* | *B* | *R* ω4 | ε2 | , *t* 1 с, ω4 c 1, *v* | | *E* | 1 cм/с, |  |
| *B*τ | 3 3 | 33 | 3 | 1 | 2 |  |  |



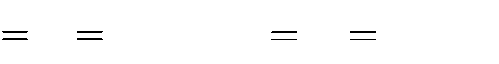
*aE* =–2см/с2, *vB* = 3см/с, *aBn* =48см/с2, *aB*=–6см/с2, *aB* = 8,06см/с2.

**Практическое занятие № 5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ**

Движение твёрдого тела называется плоскопараллельным, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой фиксированной плоскости (основной плоскости).

При плоскопараллельном движении каждая точка тела описыва-ет плоскую траекторию, расположенную в плоскости , параллель-ной данной неподвижной плоскости *Q* (*h* = const).

Все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной к этой неподвижной плоскости (*Q*), совершают одинаковые движения, описывая тождественные и параллельные между собой траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения:



*~~v~~*1 *~~v~~*~~2~~ *~~v~~* и *~~a~~*~~1~~ *~~a~~*~~2~~ *~~a~~*~~.~~

Уравнения плоскопараллельного движения:



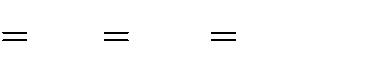
*x x*1 *t* ; *y y*1 *t* ; φ φ *t* .

Один из способов определения скорости любой точки тела при плоскопараллельном движении основан на использовании в качестве полюса (точка, скорость которой в данный момент известна) мгновен-ного центра скоростей.

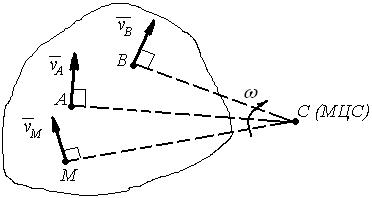
Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю (рис. 5.1).

Скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *vB* |  | *v A* |  | *vM* | ω. |  |
| *BC* |  | *AC* |  | *MC* |  |
|  |  |  |  |



54

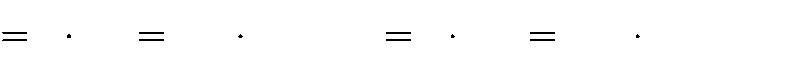


**Рис. 5.1. Мгновенный центр скоростей плоской фигуры**

Мгновенный центр скоростей можно найти:

*а*)если известны направления скоростей двух точек *А* и *В* фигу-ры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров к векто-рам скоростей *~~v~~A* и *~~v~~B* , восстановленных в точках *А* и *В* (рис. 5.1) при

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| этом *v* |  | ω *BC* | *BC* | *v* | ; | *v* | ω *MC* | *MC* | *v* |  | и т.д.; |  |
| *B* |  |  | *A* |  |
|  |  | *AC* | *A* |  | *M* |  | *AC* | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



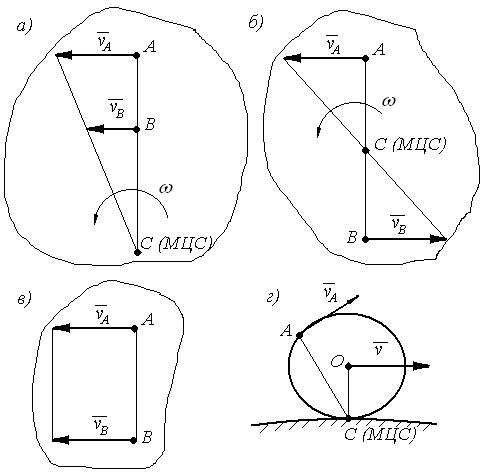
б) если скорости двух точек *А* и *В* плоской фигуры параллельны между собой и одновременно перпендикулярны к линии, соединяю-щей эти точки, то для определения МЦС нужно соединить концы век-торов скоростей и найти точку пересечения этой линии с прямой *АВ* (рис. 5.2,*а,б*);

с) если перпендикуляры к скоростям точек параллельны, то МЦС находится в бесконечности, а угловая скорость равна нулю, и скорости всех точек равны между собой (рис. 5.2,*в*);

д) если по неподвижной поверхности катится без скольжения плоская фигура, то мгновенный центр скоростей находится в точке *С* касания катящейся фигуры с поверхностью (рис. 5.2,*г*).

**План решения задач по теме: Определение скоростей и уско-рений точек плоской фигуры**

1. Сделаем схематический чертёж по условию задачи.
2. Вычисляем угловые скорости и угловые ускорения.
3. Выполним необходимую проверку и запишем ответ.

**Рис. 5.2. Нахождение МЦС**

**Задача 5.1.** Применяется приспособление,состоящее из трёхзубчатых колёс, вращающихся вокруг неподвижных центров *O*1 , *O*2 ,*O*3 .

К колесу *1* прикреплена рукоятка *O*1 *A* длиной *l*, начавшая вращаться

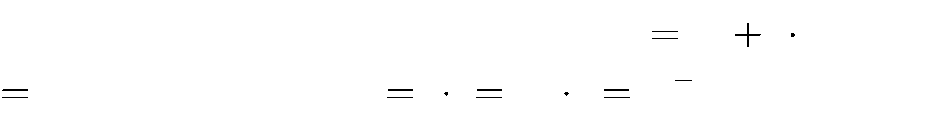
из состояния покоя с угловым ускорением . К колесу *III* прикреплена нить, поднимающая груз *Р*. Определить скорость *~~v~~A* и ускорение *~~a~~A*

**Рис. 5.3. Расчётная схема к задаче 5.1**

конца *А* рукоятки, окружные скорости *~~v~~I* , *~~v~~II* ,*~~v~~III* и окружные ускоре-ния *~~a~~I* , *~~a~~II* , *~~a~~III* трёх колёс, а также скорость *~~v~~* и ускорение *~~a~~* поднима-емого груза через *tc*, после начала движения (рис. 5.3).

*Дано: R***1**= 20см, *R*2= 10см, *R*3= 20см, *l* = 40см,= 0,5с-1, *t* = 2с.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Определить:* |  | *A* , |  | *A* , |  |  |  | *II* , |  | *III* , |  | *I* , |  | *II* , |  | *III* . |  |  |
| *~~v~~* | *~~a~~* | *~~v~~I* , | | *~~v~~* | *~~v~~* | *~~a~~* | *~~a~~* | *~~a~~* |  |  |
| *Решение* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1. Так как  = const, то угловая скорость колеса *1* ω1 | | | | | | | | | | | | | | | | | ω0 ε *t*, по |  |
| условию задачи ω |  | 0 , тогда получим ωε *t* 0,5 2 1 c | | | | | | | | | | | | | | | 1. |  |
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |

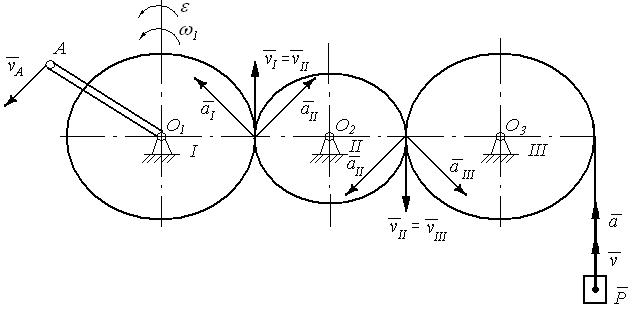


1. Зная угловую скорость колеса *1* ω1 , определяем скорость точ-



ки *А* конца рукоятки: *v* *A* ω1 *l* 1 40 40 см/с.

56

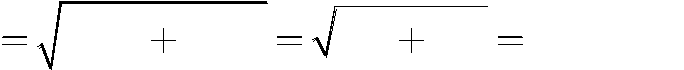


1. Найдём касательное и нормальное ускорения точки *А* конца рукоятки:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *vA*2 | 402 | | 2 |  |
| *a A* τε *l* 0,5 40 20см/с; | *aA n* |  |  |  | 40 см/с . |  |
| *l* | 40 | |  |
|  |  |  |  |

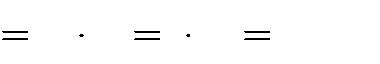


1. Модуль ускорения точки *А*:



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 2 |  |  |  |
| *a A* | 20 2 40 2 44,5 см/с2. | |  |
| *a A* τ | *aA n* |  |

5. Зная 1, определяем линейную скорость на ободе колеса *I*:



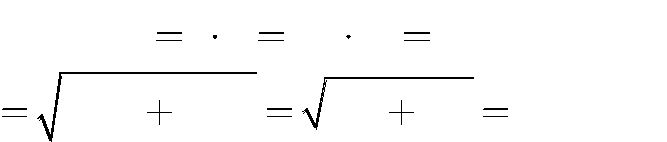
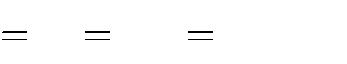
*v*1 ω1 *R*1 1 20 20 см/с.

1. Окружные скорости всех трёх колёс равны:

*~~v~~I* , *~~v~~II* ,*~~v~~III* = 20см/с.

1. Окружное ускорение *а*1 колеса *1* складывается из двух ускоре-ний: нормального (*ап*)1 и тангенциального (*а*)1:

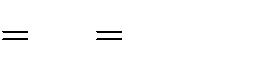
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | *v*2 | 202 | | |  | 20 см/с2; | |  |
|  |  | *a* |  |  | 1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *n* 1 |  |  | *R*1 | 20 | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *a* | | ε |  | *R* | 0,5 20 | | | | 10 см/с2. | |  |
|  |  | τ 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 2 |  | 2 | |  | |  | |  |  |  |
| *a* | *a* | *a* | 202 | | | | 102 22,3 см/с2. | |  |
| 1 | *n* 1 | |  | τ 1 | |  |  |  |  |  |  |  |



1. Так как угловое ускорение  для всех колес одинаково и ради-



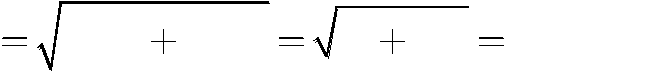
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| усы | | | колеса *I* | | | | и колеса *III* равны *R*1 *R*3 , то модули ускорений |  |
|  |  |  |  |  |  | 22,3 | см/с2. |  |
| *~~a~~* | *~~a~~* | *III* | |  |
|  | *I* | |  |  |  |  |



1. Модуль окружного ускорения колеса *II* определим по форму-

ле:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *II* | *a* |  | *a* |  | 52 40 2 40, 2 см/с2, | |  |
|  | *n* | II | τ | *II* |  |  |  |

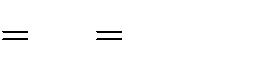
где

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *a* | ε *R* 0,5 10 5 | см/с2, *a* |
| τ II |  | *n II* |

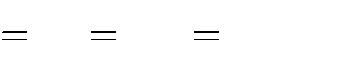


1. Определим скорость груза.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | *Ответ:* 1 | | | | | = | | 1 | |  | с-1; *vA* = 40 | |  |
|  |  | , |  |  | , |  |  |  | = 20 см/с; |  |  |  |  |  | 22,3 | см/с2, *a* |  |
|  | *~~v~~* | *~~v~~* |  | *~~v~~* | *III* | | *~~a~~* | *~~a~~* |  |
|  | *I II* | | | |  |  |  | *I* | |  | *III* | |  | *II* |  |



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *vII*2 | 202 | | 2 |  |
|  |  |  | 40 см/с . |  |
| *R*2 | 10 | |  |
|  |  |



cм/c; *аА* = 44,5см/с2;40, 2 см/с2; *v* = 20 см/с.



**Задача 5.2.** Колесо радиусом*R*равномерно катится без скольже-ния по горизонтальному рельсу при помощи каната, намотанного на ось колеса радиусом *r*. Канат перекинут через блок, к концу каната привязан груз *В*, вертикально опускающейся с постоянной скоростью *~~v~~* .Определить скорость центра *О* и угловую скорость вращения коле-са.

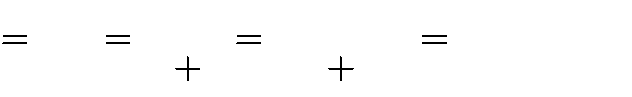
*Дано: R =* 0,5м, *r* = 0,2м, *~~v~~* = 2м/с.

*Определить: ~~v~~*0,ω.

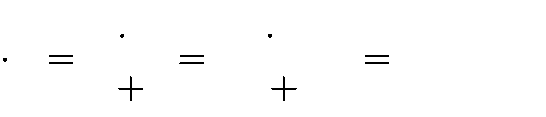
*Решение*

1. Задачу решаем при помощи МЦС. Мгновенный центр скоро-стей точек колеса находится в точке *Р* (рис. 5.4).
2. Определяем угловую скорость колеса:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *vM* |  | *vM* | 2 | | 1 | |  |
| ω |  |  |  |  |  |  | 2,9 c . |  |
| *MP* |  | *R r* | 0,5 | | 0, 2 |  |
|  |  |  |  |

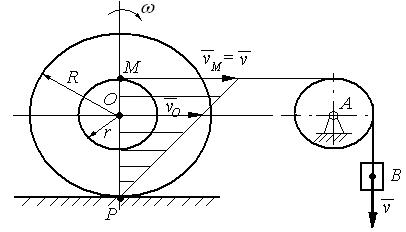


1. Искомая скорость центра *О* определим по формуле:



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v*0 | =ω *R* | *v R* | 2 0,5 | | 1, 4 м / c. |  |
|  |  |  |  |
| *R r* | 0,5 0,2 | |  |
|  |  |  |  |

*Ответ:* = 2,9с-1; *v*0=1, 4м/ c.



**Рис. 5.4. Расчётная схема к задаче 5.2**

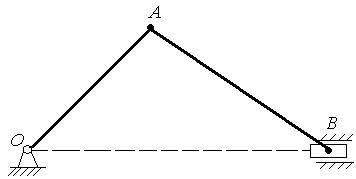
58

Следует обратить особое внимание на задачи, в которых имеют-ся плоские механизмы, состоящие из нескольких звеньев.

При решении этих задач рассматривают последовательно движе-ния отдельных звеньев механизма, начиная с того звена, движение кото-рого задано, и при переходе от одного звена к другому определяют ско-рости тех точек, которые являются общими для этих двух звеньев меха-низма. Следует подчеркнуть, что мгновенный центр скоростей можно находить только для каждого звена в отдельности, то же относится и к угловым скоростям. Звеном является деталь механизма или группа дета-лей, жёстко соединённых между собой.

Рассмотрим плоский кривошипно-шатунный механизм (КШМ), состоящий из кривошипа *ОА*, вращающегося вокруг неподвижной точки *О* в плоскости рис. 5.5, шатуна *АВ*, шарнирно соединённого с кривошипом, и поршня *В*, двигающегося по горизонтальным направ-ляющим цилиндра, совпадающим с прямой *ОВ*, и шарнирно соеди-нённого с шатуном *АВ*.

Необходимо рассмотреть движение шатуна. Точка *В* совершает возвратно-поступательное движение. Точка *А* перемещается по окружности.



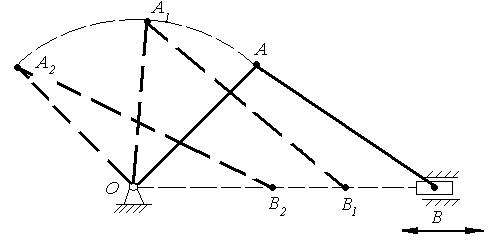
**Рис. 5.5. Схема кривошипно-шатунного механизма**

**Задача 5.3.** Плоский кривошипно-шатунный механизм,состоя-щий из кривошипа *ОА*, вращающегося вокруг неподвижной точки *О* в плоскости рис. 5.5, шатуна *АВ*, шарнирно соединённого с кривоши-пом, и поршня *В*, двигающегося по горизонтальным направляющим цилиндра, совпадающим с прямой *ОВ*, и шарнирно соединённого с шатуном *АВ*. Определить угловую скорость стержня *АВ*, линейную скорость точек *А,* *В* и *Д*, если известен угол *α* = 300 между звеном *ОА* и горизонталью.

*Дано:* схема(рис. 5.6), *ОА* = 0,5м, *ОВ* = 1,8м, *α* = 300,*ОА* = 4с-1(радиан в сек)

59

*Определить: vA, vВ, vД,* ω*АВ.*



**Рис. 5.6. Схема работы КШМ**

*Решение*

1. Скорость точки *А* кривошипа *ОА* перпендикулярна радиусу *R*



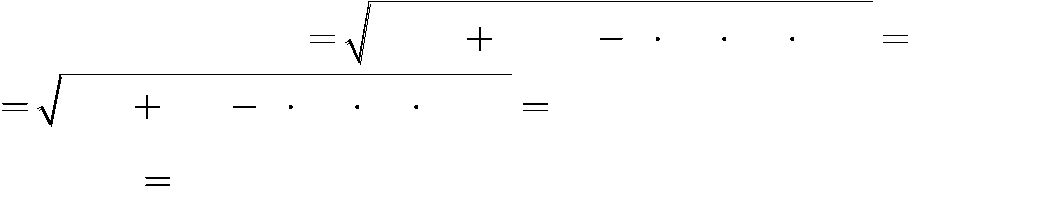
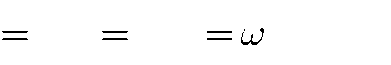
*= ОА* = 0,5м(рис.5.7)и равна *v A* ω*ОА* *OA* 4 0,5 2 м/с.

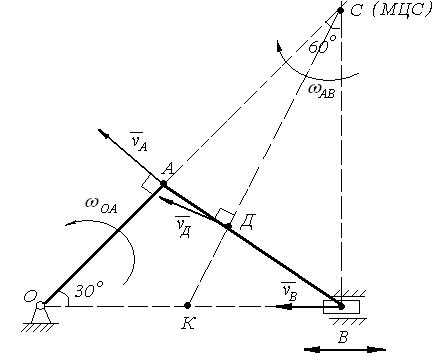
1. Мгновенный центр скоростей звена *АВ* находится в точке *С* пересечения перпендикуляров к векторам скоростей точек *А* и *В*.

Соединяя мгновенный центр скоростей точку *С* с точкой *Д* при-надлежащей звену *АВ*, окажем скорость точки *Д*, вектор направлен перпендикулярно отрезку *СД* в сторону движения звена *АВ*.

1. Так как скорости точек плоской фигуры прямо пропорцио-нальны их расстояниям до МЦС найдём угловую скорость звена *АВ*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *v A* | |  | |  | *vB* |  |  |  |  | *vD* | |  |  |  | *AB* . | | |  |  |  |  | (5.1) |  |
|  |  |  | *AC* | | | |  | *BC* | |  |  |  | *DC* | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4. Из уравнения (5.1) скорость точки *В* равна *v* *B* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *vA* | | *ВС* | , найдём |  |
| *АС* |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| расстояния *АВ*, *ВС* и *АС* (рис. 5.7): | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | |  | |  | | | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  | |  |  |
|  |  | *АВ= AB* | | | | | | | |  |  |  | *ОА* 2 | | |  |  | *ОВ* 2 | | | 2 *ОА ОВ* сosα | | | |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  | | | |  | | |  | | | |  |  |  | | | | | |  |
| 0,52 | | 1,82 | | |  |  | 2 0,5 1,8 0,866 1,34 м – по теореме косинусов | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| tg 300 | |  |  | *BC* | | , |  | *BC = OB ∙* tg 30 *=* 1,80,577 *=* 1,04м, | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |
|  |  |  |  | *OB* | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *ОС =* 2 *ВС = =*2,08м(катет лежащий против угла30равен по- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| ловине гипотенузы), | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *АС = ОС − ОА =* 2,08 − 0,5 = 1,58м, | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *v* |  | *v* | |  | *ВС* | | |  | | 2 | 1,04 | | |  | 1,32 м/с. |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *B* | *A АС* | | | | | | 1,58 | | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 60 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |





 – угловая скорость

*vA* –линейная скорость точки

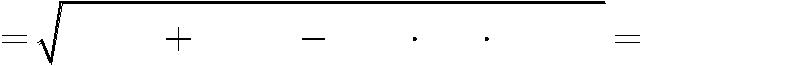
*А*

*v*В–линейная скорость точки

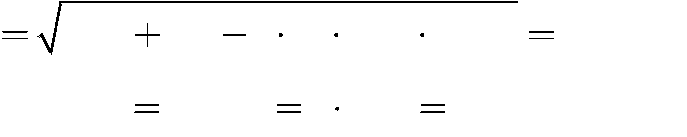
*В*

**Рис. 5.7. Расчётная схема кривошипно-шатунного механизма**

1. Аналогично найдём скорость точки *Д*:

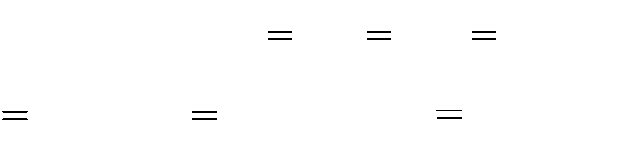


|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *DC* |  | *ОD* 2 | | *OC* 2 | |  | 2*OD OC* сos300 | | |  |
|  |  |  |  | | | |  | |  |  |
|  | 0,92 | | 2,8 2 09 2,08 0,866 | | | | | | 1,38 м, |  |
|  |  | *v Д* | *vA* | *ДС* | 2 | 1,38 | | 1,74 | м/с. |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | *АС* | 1,58 | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |



1. Подставляя в выражение (5.1) полученные значения найдём

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *vA* | |  |  | 2 | -1 |  |  |
| угловую скорость звена *АВ*: ω *AB* | | | |  |  |  |  |  | 1, 26 с | . |  |
| *AC* | | 1,58 | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| *Ответ: v* | *A* | 2 | м/с, *v*1,32 м/с, | | | *v* | | *Д* | 1,74 м/с, ω*АВ* = 1,26 с-1. | |  |
|  |  | *B* |  |  |  |  |  |  |  |



**Задача 5.4.** В четырехшарнирном механизме длина кривошипа*ОА* = 0,5м.Кривошип *ОА* вращается равномерно с угловой скоростью0 = 5 с-1. Найти скорость той точки *М* шатуна *АВ*, в которой эта ско-рость направлена по шатуну, когда *АВ* параллельна *ОО1.* Определить также угловую скорость 1 кривошипа *О1В*.

*Дано:* схема(рис. 5.8), *ОА* = 0,5м, *α* = 450,0= 5с-1.

*Определить: vA, vВ, vМ,* ω1*.*

*Решение*

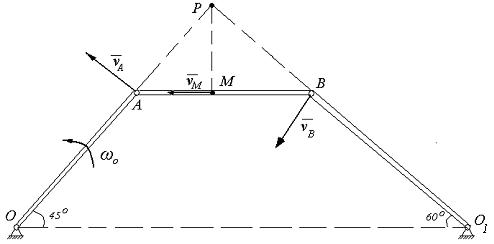
1. Скорость точки *А* кривошипа *ОА* перпендикулярна *ОА* = 0,5 м



(рис. 5.8) и равна *v* *A* ω*о* *OA* 5 0,5 2,5м/с.

1. Так как кривошип *О*1 *В* вращается вокруг точки *О*1 , то *~~v~~B* будет направлена перпендикулярно *O*1 *B*1 .

61



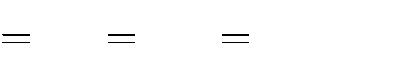
**Рис. 5.8. Расчётная схема к задаче 5.4**

Мгновенный центр скоростей звена *АВ* находится в точке *Р* пе-ресечения перпендикуляров к векторам скоростей точек *А* и *В*.

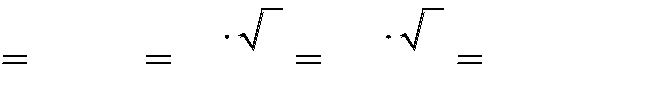
Опускаем перпендикуляр из точки *Р* на *АВ*, находим искомую точку *М*.

1. Так как скорости точек плоской фигуры прямо пропорцио-нальны их расстояниям до МЦС найдём угловую скорость звена *АВ*:

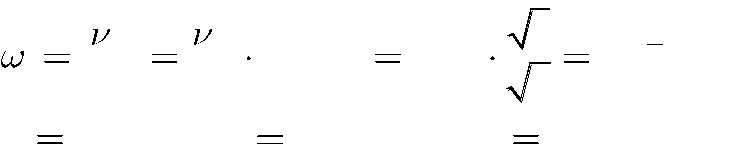
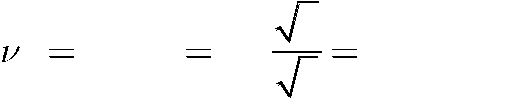
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *vA* |  | *vB* |  | *vМ* | ω*AB* . | (5.2) |  |
| *AР* |  | *BР* |  | *МР* |  |
|  |  |  |  |  |



1. Из уравнения (5.2) скорость точки *М* равна



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *vv* |  | *МР* | |  |  | *vA* | 2 | |  |  | 2,5 | | 2 |  |  | 1, 77 м/с. | | | | | | | | 0 | | | |  | *МР* | . |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | sin 45 | | | |  |  |  |
| *A АР* | | |  |  |  | 2 |  |  |  | 2 | |  |  |  |  | *АР* |  |
| *М* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5. Найдём скорость точки *В*: | | | | | | | | | | | | | *B* | | |  | *vA* | *BP* | | |  |  |  | 2,5 | | 2 |  | 2, 04 м/с. | | |  |
| *AP* | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 3 | | |  |  |  |  |  |
| 6. Определяем угловую скорость кривошипа *O*1 *B* : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | sin 60 0 | | | |  | | |  |  |  |  |  |  | | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *B* |  |  | *B* | |  | 2,04 | | |  |  | 3 | |  | 1 | | | |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 5 c . | | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *O B* | |  | *OA* | | |  | sin 450 | | | | 0,5 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ответ:* | *v* | | *A* | 2,5 м/с, *v* | | | | | | |  | 2,04 м/с, *v* | | | | | | | | |  | 1,77 м/с, ω1 = 5 с-1. | | | | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *B* | |  |  |  |  |  |  |  | *М* | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



**Задача 5.5.** Для заданного(рисунок5.9)положения двойногокривошипно-шатунного механизма показать, что кривошипы *О*1 *А* и

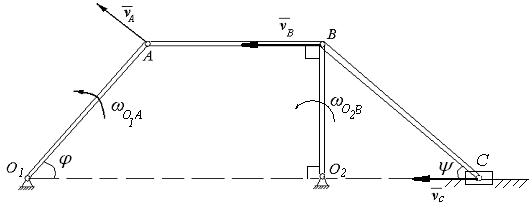
*О*2 *В* имеют одинаковую угловую скорость, а шатун *ВС* совершает

мгновенное поступательное движение.

*Дано:* схема(рис. 5.9).

*Определить:* ω1.= ω2.

62



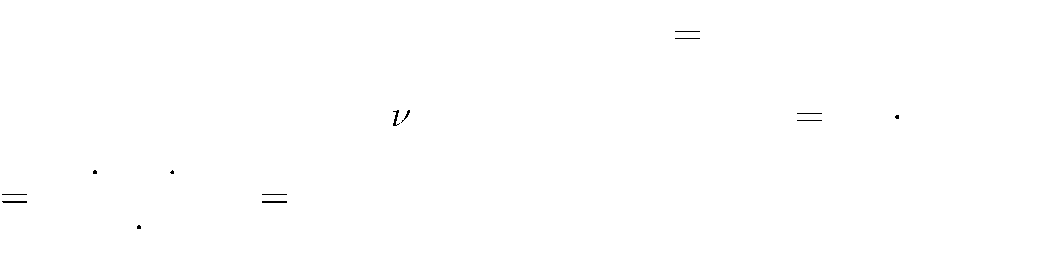
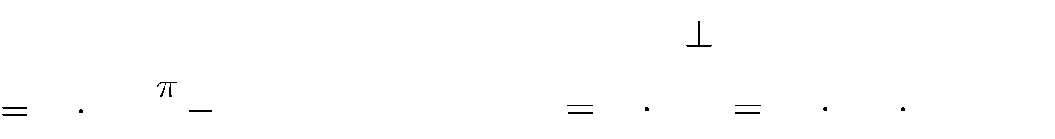
**Рис. 5.9. Расчётная схема к задаче 5.5**

*Решение*

* 1. Скорость точки *А* перпендикулярна кривошипу *О*1*А*. Величина
* равна *v* *A* ω1 *O*1 *A* .



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Здесь, | | | | через ω1 обозначена угловая скорость стержня *О*1*А*. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| По теореме о проекциях (очевидно, что | | | | | | | | | | | | | |  | *B* |  | *O*2*B* ). | | | | | | | | |  |
| *~~v~~* |  |
| *vB vA* | | | | cos( | |  |  |  | 4), или получаем *vB* *v* *A* sin φ | | | | | | | | | | |  | ω1 | |  | *O*1 *A* sin φ. | |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *vB* | | |  |  |
| 2. Угловая скорость кривошипа *O B* равна | | | | | | | | | | | | | | | |  | ω | 2 |  |  |  | . |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | | | |  |  |  |  |  |  |  | *O*2 *B* | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Подставим в это выражение *B* и заметив, что *O*2 *B O*1 *A* sin φ , | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| получим |  | ω 2 |  |  | ω1 | |  |  | *O*1 *A* sin φ |  | ω1 |  | . | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *O*1 *A* sinφ | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



1. Направление вращения стержней *О*1*А* и *О*2*В*, как видно из ри-



сунка 10.5, одинаковы. Следовательно, ω 2 ω1.

Скорости точек *В* и *С* параллельны, и, согласно теореме о про-екциях скоростей двух точек равны



*vC* cos φ *vB* cos φ, *vC* *vB* .

Значит, скорости точек стержня *ВС* распределены так, как если бы в данный момент времени шатун *ВС* совершал поступательное движение.



*Ответ:* ω 2 ω1.

**Задача 5.6** Механизм регулирования уровня воды в канале пред-ставляет собой четырехзвенник *О*1*АВО*2, в котором ведущий криво-шип *О*1*А* вращается с постоянной угловой скоростью ω1 и при помощи

стержня *АВ* приводит в движение кривошип *О*2*В*. Определить ско-рость, тангенциальное (касательное) и нормальное ускорения точки *В*, если *АВ* = 2 м (рис. 5.10).



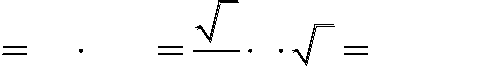
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 3 | с 1 , *О*1*А* = 10 |  |  |  |
| *Дано:* схема(рис. 5.10),ω1.= | 3 | дм, *АВ* = 2 м. |  |
| 20 | |  |
|  |  |  |  |  |



*Определить: v , v , а , a n* , *a* .

*A* *В* *А* *B B*

* 1. Так как движение звена *О1А* задано, то можем найти скорость
* ускорение точки *А*



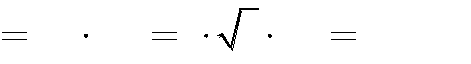
3

*v A* ω1 *O*1 *A* 20 1 3 0,15 м/с.

1. Так как кривошип *О1А* вращается равномерно, то вектор *a* *A* ускорения точки *А* направлен вдоль *О*1*А* к центру *О*, и по модулю ра-вен

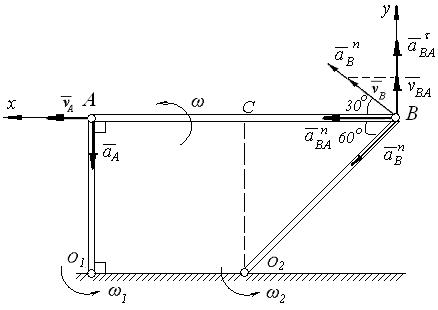


|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | ω 2 |  |  | 3 | |  | м/с2. |  |
| *a* | *A* | *OA*13 | | 0,13 |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  | 1 |  |  | 40 | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |



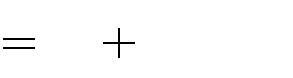
1. Далее рассмотрим точку *В*. Так как точка *В* принадлежит зве-ну *О*2*В*, вращающемуся вокруг неподвижной оси *О*2, то скорость *vB*

этой точки перпендикулярна к *О*2*В* и, следовательно, образует с направлением *ВА* угол, равный 300.

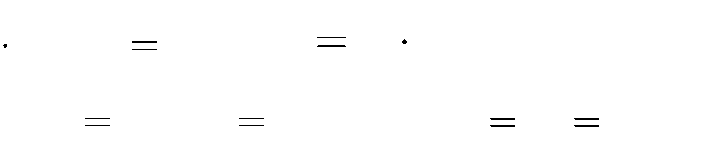


**Рис. 5.10. Расчётная схема к задаче 5.6**

* плоскости, принимая в этом движении точку *А* за полюс, будем



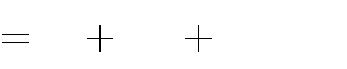
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| иметь |  |  |  |  |  | *BA* , причем вращательная скорость | | | | | | | | | |  |  | *BA* точки *В* |  |
| *~~v~~* | *B* | *~~v~~* | *A* | *~~v~~* |  | *~~v~~* |  |
| вокруг полюса *А* перпендикулярна к *АВ*. | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Проектируя это векторное равенство на оси *х* и *y*, получим | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  |  |  |  | *v* cos300 | | | *v* | *A* | и *v* | | *BA* | *v* | cos 600 . | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | *B* | |  |  |  | *B* |  |  |  |  |  |  |  |
| Откуда находим: *vB* | | | | | | | *vA* | |  |  | 0,17 | м/с, | *vBA* | *vB* |  | 0, 087 м/с. | | |  |
| cos 300 | | | | 2 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



* 1. Ускорение *~~a~~B* точки *В* слагается из нормального ускорения *~~a~~Bn*
* направленного по кривошипу *О*2*В* от *В* к *О*2, и касательного ускоре-



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ния |  | τ | , перпендикулярного к *О*2*В*, т.е. | | | | | | | | | | |  |  |  | *n* |  | τ . | | |  |  |
| *~~a~~* | *~~a~~* | *~~a~~* | *~~a~~* |  |  |
|  | *B* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B* | | *B* | | *B* | | | |  |  |
|  | С другой стороны, поскольку точка *В* принадлежит звену *АВ*, | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| имеем | | |  |  |  |  |  |  |  | *n* |  |  | τ , причем нормальное ускорение | | | | | | |  | *n* | точки |  |
| *~~a~~* | *~~a~~* |  | *~~a~~* | *~~a~~* |  |
|  |  | *A* |  |  | *~~a~~* |  |
|  |  |  |  | *B* | |  |  | *BA* | |  | *BA* | | | |  |  |  |  | *BA* | |  |  |



* во вращательном движении вокруг полюса *А* направленного по *ВА*,
* касательное ускорение *~~a~~BA*τ точки *В* в том же движении направлено перпендикулярно к *АВ*. Таким образом, получим равенство

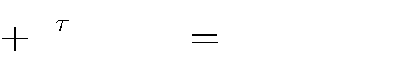


*~~a~~Bn*

где

*~~a~~B*τ *~~a~~ ~~A~~ ~~a~~~~BA~~~~n~~* *~~a~~~~BA~~*~~τ~~~~.~~

Проектируя это векторное равенство на ось *х*, получаем:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *a n* cos 600 | *a* cos300 | *an* . | (5.3) |
| *B* | *B* | *BA* |  |

Искомое нормальное ускорение точки *В* равно по модулю

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *aBn*  | | *vB*2 | | |  |  | | | 0, 3 | | | | |  0,15 м/с2, | |  |
|  |  |  | *O*2 *B* | | | 2 | | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *O*2 *C* |  | *O*1 *A* |  |  |  |  |  |  |  |  2 | | | |  |  |  |  |  |
| *O*2*B*  |  |  | 1 | | 3 | |  2 | | | м. |  |
| cos 30 0 | cos 30 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 3 | | | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



1. Если угловую скорость стержня *АВ* вокруг полюса *А* обозна-

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| чим , то *v* |  *AB* ω, *a n* |  *AB* ω2 | *vBA*2 |  0, 0038 м/с. |  |
|  |  |
| *BA* | *BA* |  | *AB* |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Подставляя эти значения в уравнение (5.3), получим

0,15  0, 5 23 *aB*τ  0, 0038.



Отсюда находим:

*aB*τ0, 08м/с2.

Итак,

*vB* 0,17м/с, *aBn* 0, 0038м/с2, *aB*τ0, 08м/с2.

65

Так как касательное ускорение получилось отрицательным, то это указывает, что вектор *~~a~~В*τ имеет направление противоположное принятому на рисунке, т.е. он направлен противоположно скорости *~~v~~B* ;следовательно,вращение кривошипа является замедленным.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Ответ:* | *v* | | *A* |  0,15 | м/с, | *a* | *A* |  0,13м/с2, | *v* 0,17м/с, |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *B* |  |
| *v* |  0, 087 м/с, *an* | |  0,0038 | | | м/с2, *a*τ | 0, 08 м/с2. | | |  |  |
| *BA* |  | *B* |  |  |  | *B* |  |  |  |  |  |

**Задача 5.7.** Кинематический анализ плоского механизма.Меха-низм (рис. 5.11) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *В*, соединён-ных друг с другом и с неподвижными опорами *O*1 и *O*2 шарнирами.

*Дано:* схема (рис. 5.11), α  600 , β 1500 , γ  900 , φ  300 ,

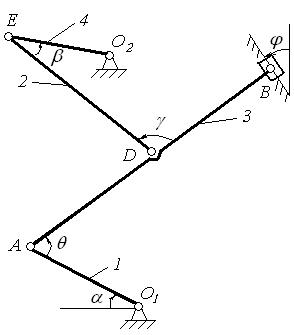
*  300 , *AD = DB*, *l*1  0, 4 м , *l*2 1, 2 м , *l*3 1, 4 м , ω1  2 с1, ε1  7 с2

(направления ω1 и ε1 – против хода часовой стрелки).

*Определить: vB* , *vE* ,ω2, *aB* ,ε3.

*Решение*

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными уг-лами (рис. 5.11).
2. Определяем *vB* . Точка *В* принадлежит стержню *АВ.* Чтобы найти *vB* , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление *~~v~~B* . По данным задачи, учитывая направление ω1 , можем определить *~~v~~A* численно *v* *A*  ω1*l*1  0,8 м/с, *~~v~~* *A*  *O*1 *A*.



**Рис. 5.11. Схема механизма к задаче 5.7**

Направление *~~v~~B* найдём, учтя, что точка *В* принадлежит одно-временно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная *~~v~~A* и направление *~~v~~B* , воспользуемся теоремой о проек-

циях скоростей двух точек тела (стержня *АВ*) на прямую, соединяю-щую эти точки (прямая *АВ*). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор *~~v~~B* **(**проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки**)**. Затем, вычисляя эти проекции, находим

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* | cos 300  *v* | *A* | cos 600 | и | *v* 0, 46м/с. |  |
| *B* |  |  |  | *B* |  |

1. Определяем *~~v~~E* . Точка *Е* принадлежит стержню *DE*. Следова-

тельно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить *~~v~~E* , надо снача-ла найти скорость точки *D*, принадлежащей одновременно стержню *АВ*.Для этого,зная *~~v~~A* и *~~v~~ B* ,строим мгновенный центр скоростей(МЦС) стержня *АВ*; это точка *C*3 , лежащая на пересечении перпенди-куляров к *~~v~~A* и *~~v~~B* , восстановленных из точек *А* и *В* (к *~~v~~A* перпендику-лярен стержень *1*). По направлению вектора *~~v~~A* определяем направле-ние поворота стержня *АВ* вокруг МЦС *C*3 .

Вектор *~~v~~D* перпендикулярен отрезку *C*3 *D* , соединяющему точки *D* и *C*3,и направлен в сторону поворота.Величину *vD* найдём из про-порции

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v D* |  | *vB* | . | (5.4) |  |
| *C D* |  |  |
|  | *C B* | |  |  |
| 3 |  | 3 |  |  |  |

Чтобы вычислить *C*3 *D* и *C*3 *B* , заметим, что  *AC*3 *B* прямо-угольный, так как острые углы в нем равны 300 и 600 , и что *C*3 *B*  *AB* sin 3000,5*AB*  *BD* .Тогда *BC*3 *D* является равносторон-ним и *C*3 *B*  *C*3 *D* . В результате равенство (5.4) даёт

*vB*  *vD* 0, 46м/с, *~~v~~~~D~~*~~~~ *~~C~~*~~3~~ *~~D~~* ~~.~~

Так как точка *Е* принадлежит одновременно стержню *О*2 *Е* , вра-щающемуся вокруг *О*2 , то *~~v~~E*  *O*2 *E* . Тогда, восставляя из точек *Е* и *D* перпендикуляры к скоростям *~~v~~E* и *~~v~~D* , построим МЦС *C*3 стержня *DE*. По направлению вектора *~~v~~D* определяем направление поворота стержня *DE* вокруг центра *С*2 . Вектор *~~v~~E* направлен в сторону пово-рота этого стержня. Из рис. 5.12 видно, что *С*2 *ED* *C*2 *DE*  300 , откуда *C*2 *E*  *C*2 *D* .

**Рис. 5.12. Расчётная схема механизма к задаче 5.7**

Составив теперь пропорцию, найдём, что

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *v E* |  | *vD* | , *v*  *v*  0, 46 м/с. |  |
|  |  |  |
| *C*2 *E* | | *C*2 *D* | *ED* |  |
|  |  |

1. Определяем ω2 . Так как МЦС стержня *2* известен (точка *С*2 )

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| и *С* *D*  | *l*2 |  0, 69 м, то ω | 2 |  | *vD* |  0, 67 c1 . |  |
|  |  |  |
| 2 | 2 cos 300 |  |  | *C*2 *D* |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1. Определяем *~~a~~B* . Точка *В* принадлежит стержню *АВ*. Чтобы

найти *~~a~~B* , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня *АВ* и траекторию точки *В*. По данным задачи можем определить *~~a~~ B*  *~~a~~ A*τ *~~a~~An* ,где численно

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *a* τ | |  ε *l*  2,8 м/с2 | ; | *a n* |  ω2 *l* | | | | 1, 6 м/с2 . |  |
|  |  |  | *A* | 1 1 |  | *A* |  | 1 1 | | |  |  |
| Вектор |  | *n* | направлен вдоль | |  | *AO* , | | а |  | τ | – перпендикулярно *АО* ; |  |
| *~~a~~* |  | *~~a~~* |  |
|  | *A* | |  |  |  | 1 |  |  | *A* | | 1 |  |

изображаем эти векторы на чертеже.

68

Так как точка *В* одновременно принадлежит ползуну, то вектор *~~a~~B* параллелен направляющим ползуна.Изображаем вектор *~~a~~B* начертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и *~~v~~B* .

Для определения *~~a~~B* воспользуемся равенством

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | τ  | |  | *n*  |  | τ |  |  | |  | *n* |  | . | (5.5) | | | | |  |
|  |  |  | *~~a~~* | *~~a~~* | *~~a~~* | *~~a~~* |  | *~~a~~* |  |  |
|  |  |  |  | *BAABABA* | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |
| Изображаем на чертеже векторы | | | | | | | | | | | | | |  | *BAn* (вдоль *ВА* от *В* к *А*) и | | | | | |  | *BA*τ | (в | |  |
| *~~a~~* | *~~a~~* |  |
| любую сторону перпендикулярно *ВА*); численно *аn* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  ω2 *l* . Найдя | | | ω | 3 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *ВА* | 3 3 |  |  |  |  |
| с помощью построенного МЦС *C*3 стержня *3*, получим | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |
| ω  | *v A* |  |  | *vA* | | |  |  0,66 c1 | | | | | |  | и | | |  | *an* 0, 61м/с2. | | | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | *C*3 *A* | | *l*3cos300 | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *BA* |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Таким образом, у величин, входящих в равенство (5.5), неиз- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
| вестны только числовые значения *а* | | | | | | | | | | | *В* | | и *а*τ | | | | | ; их можно найти, спроек- | | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *ВА* | | |  |  |  |  |  |  |  |  |

тировав обе части равенства (5.5) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить *аВ* , спроектируем обе части равенства (5.5) на

направление *АВ* (ось *х*), перпендикулярное неизвестному вектору *~~a~~BA*τ . Тогда получим

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | cos 300  *a* τ | cos 600  *a* *n* cos 300 |  *an* . | (5.6) |
| *B* | *A* | *A* | *BA* |  |

Подставив в равенство (5.6) числовые значения всех величин из (5.4) и (5.5), найдём, что

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *а* | *В* |  0, 72 м/с2 . | (5.7) |  |
|  |  |  |  |

1. Определяем ε3 . Чтобы найти ε3 , сначала определим *аВА*τ . Для

этого обе части равенства (5.6) спроектируем на направление, перпен-дикулярное *АВ* (ось *y*). Тогда получим

 *аB* sin 300 *a A*τsin 600 *a An* sin 300 *aBA*τ.

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (5.7) и (5.5), найдем, что *аВА*τ 3,58 м/с2 . Знак указывает, что направ-ление *аВА*τ противоположно показанному на рис. 5.12.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *a*τ | |  |  |  |  |
| Теперь из равенства *а*τ | |  * l* | получим ε |  |  |  |  |  | *BA* |  |  2,56 c2 . |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | *ВА* | 3 3 |  |  |  |  | *l*3 | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | ω  0, 67 с1 |  |  |
| *Ответ:* | *v* 0, 46м/с, | | *v* 0, 46м/с, | | | | | |  |  | , |  |
|  | *B* |  | *E* |  |  |  |  |  |  | 2 | |  |  |

*аВ* 0, 72м/с2,ε32,56с2.

**Практическое занятие № 7**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ**

**МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

Динамикой называется раздел теоретической механики, в кото-ром изучаются движения материальных в зависимости от сил, их вы-зывающих.

* механике мы представляем себе все материальные тела, мыс-ленно раздробленные на материальные точки, т.е. на такие весьма ма-лые частицы, размерами которых можно пренебречь. Другими слова-ми, все тела мы представляем себе, как совокупность или системы ма-териальных точек.

Мы займёмся сначала изучением законов движения одной мате-риальной точки. Обобщая затем полученные результаты на случай не-

скольких материальных точек, мы получим законы движения матери-альной системы. Таким путём мы придём к тем общим законам, кото-рым подчиняется движение всякого материального тела.

Из сказанного следует, что раздел динамики естественно распа-дается на две части, которые можно назвать динамикой материальной точки и динамикой материальной системы. Динамику материальной точки можно рассматривать как введение к динамике материальной системы.

Геометрическое равенство, выражающее связь между силой и сообщаемым ею ускорением, называется основным уравнением дина-мики:

*m*  *a*  *F* .



Величина *т*, являющаяся мерой инертности тела и определяю-щая количество вещества, содержащегося в теле, называется инертной массой тела.

**Дифференциальное уравнение движения материальной точ-**

**ки**

Положение материальной точки *М* в инерционной системе отсчета определяется ее радиус-вектором *~~r~~* .Сила *F* действующая на точку, может



зависеть от положения точки, т.е. от радиуса-вектора *~~r~~* , скорости *~~v~~*  *ddt~~r~~* точки и времени *t* :



1. *d* 2*~~r~~*  *F* (*~~r~~* , *~~v~~* ,*t*). *dt* 2



Это равенство, представляющее физический закон, устанавлива-ющий связь между массой точки, ее ускорением и действующей на точку силой, можно рассматривать одновременно как дифференциаль-ное уравнение движения материальной точки в векторной форме, в ко-тором радиус-вектор *~~r~~* является функцией, а время *t* − аргументом.

Уравнения движения в проекциях на декартовы оси координат:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *x* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | *x* |  |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *y* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | *y* |  |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *z* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | *z* |  |
|  |  |  |

где *Fx* , *Fy* , *Fz* − проекции силы на координатные оси.

что материальная точка движется в одной и той же плоскости, то принимая ее за координатную плоскость *oxy* , имеем:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *x* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | *x* |  |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *y* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | *y* |  |
|  |  |  |

*m d* 2 *z* 0.



*dt* 2

* случае движения точки по прямой линии, направив по ней ко-ординатную ось *ox* , получим одно дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *x* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | *x* |  |
|  |  |  |

*m d* 2 *y* 0,



*dt* 2

*m d* 2 *z* 0,



*dt* 2

так как во все время движения *y*  *z*  0 и, следовательно, *Fy*  *Fz*  0 .

**Естественные уравнения движения точки**

* некоторых случаях описание движения материальной точки в декартовых неподвижных осях координат вызывает ряд неудобств. Приходится искать другие системы координат, в которых это движе-ние описывается более просто.

Одной из таких систем являются естественные подвижные оси координат, образованные касательной к траектории точки, главной нормалью и бинормалью.

Для естественных подвижных осей координат, проектируя обе части дифференциального уравнения движения на все оси, получим:

*mat*  *F* , *man*  *Fn* , *mab*  *Fb* ,

где *at* , *an* , *ab* и *F* , *Fn* , *Fb* − соответственно проекции ускорений и равно-

действующей силы на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории в рассматриваемом положении движущейся точки.

Учитывая, что

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a*  | *d* 2 *s* | , *a*  | *v*2 | , *a*  0, |  |
|  |  |  |
| ** | *dt* 2 | *n* | ρ | *b* |  |
|  |  |  |  |
|  |  | 77 |  |  |  |

где ρ − радиус кривизны траектории, дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси имеют вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *s* |  *F* , |  |
|  |  |
|  | *dt* 2 | ** |  |
|  |  |  |

*m v*2 *Fn* ,



ρ

1.  *Fb* .

Из этих уравнений видно, что *Fn* всегда положительно, а *Fb*  0. **Две основные задачи динамики точки**

Используя дифференциальные уравнения движения, материаль-ной точки в той или другой системе координат, можно решать две ос-новные задачи динамики точки.

Первая задача − по известному закону движения материальной точки данной массы определить действующую на точку силу.

Например, заданы уравнения движения точки в декартовой си-стеме координат:

*x*  *x*(*t*), *y*  *y*(*t*), *z*  *z*(*t*),

то проекции силы на оси координат определяются из дифференциаль-ных уравнений движения точки

*Fx*

*Fy*

*Fz*

* *m d* 2 *x* , *dt*
  + *m d* 2 *y* , *dt*
* *m d* 2 *z* . *dt*



Зная проекции силы на координатные оси, можно определить величину силы и косинусы углов силы с осями координат.

Вторая задача (обратная) − зная действующую на материальную точку данной массы силу, начальное положение этой точки и ее начальную скорость, определить закон движения точки.

Поскольку сила *F* может зависеть, вообще говоря, от времени *t* , положения точки в пространстве, определяемое координатами *x*, *y* , *z* и скорости точки, проекции которой



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* |  |  | *dx* | , | *v* |  |  | *dy* | , | *v* |  |  | *dz* | , |  |
| *x* | *dt* | *y* | *dt* | *z* | *dt* |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 78 | |  |  |  |  |  |  |  |

решение второй задачи сводится к интегрированию системы из трёх дифференциальных уравнений второго порядка:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *m* | | *d* 2 *x* | |  *F* (*t* , *x* , *y* , *z* , *v* | |  |  | , *v* | |  |  | , *v* | |  |  | ); |  |
|  |  | *x* | | *y* | | *z* | |  |
|  |  | *dt* 2 | | *x* |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *m* | *d* 2 *y* | |  *F* (*t* , *x* , *y* , *z* , *v* | |  |  | , *v* | |  |  | , *v* | |  |  | ); **,** | |  |
|  | | *x* | | *y* | | *z* | |  |
|  |  | *dt* 2 | | *y* |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *m* | *d* 2 *z* |  *F* (*t* , *x* , *y* , *z* , *v* | | , *v* | , *v* | ),**,** |  |  |
|  |  |  |
|  | *dt* 2 | *z* | *x* | *y* | *z* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| где | |  |  |  |  |  |  |  |
| *x*  *x* (*t* , *C*1, *C*2, *C*3, *C*4, *C*5, *C*6); | | | | | | |  |  |
| *y*  *y* (*t* , *C*1, *C*2, *C*3, *C*4, *C*5, *C*6); | | | | | | | (7.1) |  |
| *z*  *z* (*t* , *C*1, *C*2, *C*3, *C*4, *C*5, *C*6). | | | | | | |  |  |
| Для определения входящих | | | в (7.1) | констант необходимо | | | знать |  |

начальное положение точки и ее начальную скорость. Значения координат и скоростей в некоторый начальный момент времени *t*0 называются начальными условиями:

*x* (*t*0) *x*0,

*y* (*t*0)

*y*0,

*z* (*t*0) *z*0,

*v x* (*t*0) *vox* ,

*v y* (*t*0) *voy* ,

*v z* (*t*0) *voz* .**План решения задач по теме: Исследование движения мате-риальной точки**

Для прямых задач динамики, в которых требуется определить ак-тивную силу или реакцию связи:

* 1. Изобразим на расчётной схеме материальную точку в текущем положении и приложенные к ней активные силы.
  2. Применив закон освобождения от связей, изобразим реакции

связей.

* 1. Выбираем систему отсчёта.
  2. Определим по заданному закону движения ускорение матери-альной точки и найдём его проекции на оси координат.
  3. Составим дифференциальные уравнения движения материаль-ной точки, соответствующие принятой системе отсчёта.
  4. Из полученной системы уравнений находим искомые величины
* записываем ответ.

Для обратных задач динамики применим следующий порядок:

1. Выбираем систему координат.
2. Записываем начальные условия движения точки.
   1. Изображаем на расчётной схеме активные силы и реакции свя-зей, приложенные к материальной точке.
   2. Составим дифференциальные уравнения движения материаль-ной точки.
   3. Интегрируем систему дифференциальных уравнений движения

* определяем постоянные интегрирования, используя начальные условия движения.
  1. Используя уравнения движения материальной точки, опреде-лим искомые величины и запишем ответ.

**Задача 7.1.** Точка,имеющая массу*т*,движется в плоскости*хоу*

так, что уравнениями ее движения являются:

*x*  *a* сos *кt* , *y*  *b* sin *кt*,где *a* , *b*, *к* −постоянные и *t* −время.Найти

силу и ее направление под действием которой точка совершает это движение.

*Дано: x*  *a* сos *кt* , *y*  *b* sin *кt* .

*Определить:* *F*



*Решение*

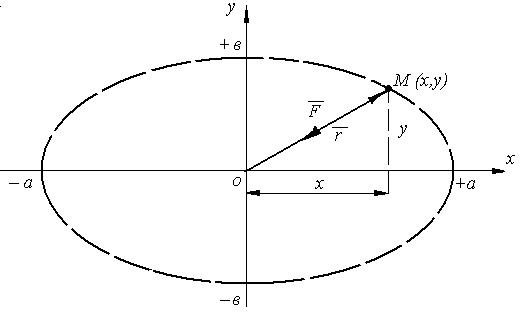
1. Найдём траекторию точки, исключая время из уравнений движения:

*x* 2  *y*2  сos 2 *кt*  sin 2 *кt* 1.



*a* 2 *b*2

Траекторией точки является эллипс с осями *а* и *b* (рис. 7.1).



**Рис. 7.1. Расчётная схема к задаче 7.1**

1. На основании дифференциальных уравнений движения точки:

*F*  *m d* 2 *x*  *m*  *к* 2 *а* cos *кt*,



*x* *dt*

*Fy*  *m*  *к* 2 *a* sin *кt*,

или, вводя координаты движущейся точки, получим

*Fx*

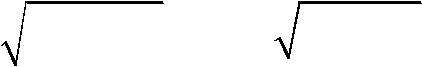
 *mк*2 *x*,

*Fy*

*mк*2 *y*.

3. Модуль силы *F* равен:

1. *Fx*2 *Fy*2 *mк*2 *x* 2 *y* 2 *mк*2*r*,



где *r* − радиус-вектор движущейся точки, равен *ОМ* .

1. Косинусы углов силы *F* с осями координат равны:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *F* | | *x* |  |  |  | *Fy* |  | *y* |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| cos( *F* , *x*)  | | | *x* |  |  | , *сos* ( *F* , *y*)  | | |  |  |  | . |  |
|  | *r* | *F* | *r* |  |
|  |  |  | *F* | |  |  |  |  |  |  |

Отсюда можно заключить, что сила *F* имеет направление, проти-воположное вектору *~~r~~* .

Следовательно, материальная точка движется под действием си-лы притяжения к центру *О*, равной по модулю

1. *mк*2*~~r~~* .

Эта сила называется центральной.



*Ответ: F* *mк*2*~~r~~* .



**Задача 7.2.** Точка имеющая массу*т*,движется из состояния по-коя по окружности радиусом *R* с постоянным касательным ускорени-ем *a*τ .

Определить величину действующей на точку силы, в момент, ко-гда она пройдёт по траектории расстояние *S*1  *R* 2 (рис. 7.2).



*Дано: т*, *R*, *a*τ.

*Определить: F*.



*Решение*

1. Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси ( τ и *~~n~~* ) , имеем



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *F*  *m* | *d* 2 *s* |  *ma* , | *F*  *m* | *v*2 | . |  |
|  |  |  |
| τ | *dt* | τ | *n* | *R* |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Числовое значение скорости в любой момент времени выра-жается производной от расстояния *s* по времени *t*:

81

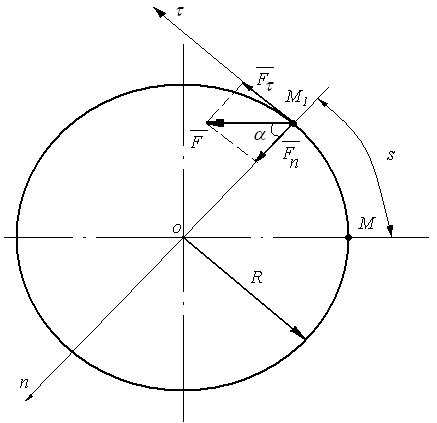
*v*  *dsdt* .



Выразим путь как функцию времени *ds*  *v*  *dt* и проинтегриро-вав это выражение получим

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *s*  *v*  *dt* *a*τ *t*  *dt*  *a* | *t* 2 | , |  |
| 2 |  |
|  |  |  |

где *a*τ  *dvdt* − касательное ускорение, получается путем интегрирова-ния уравнения скорости.



**Рис. 7.2. Расчётная схема к задаче 7.2**

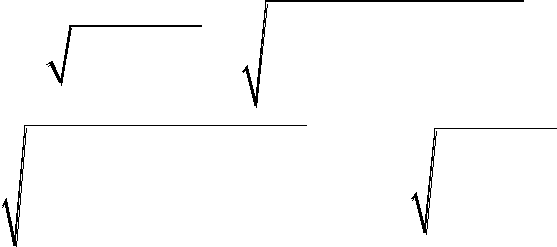
Проинтегрировав уравнение касательного ускорения имеем:

1.  *a*τ *t*  *c* .

Так как движение происходит с постоянным касательным уско-рением *a*τ без начальной скорости ( *v*0  0 ) и при *t* = 0, то *с* = 0 и полу-чим:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v*  *a*  *t* , *S*  | *a* | τ | *t* 2 | |  |
|  |  | . |  |
|  |  |  |  |
| τ |  |  | 2 |  |  |
| Тогда |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| 82 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *a* 2 *t* 2 | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *F*  *ma* , | | | | | | | | | |  |  | *F*  *m* | | | |  |  | ** | |  |  |  | ; , |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | ** | | | |  |  | ** | |  |  |  |  | *n* | |  |  |  | *R* | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *m* 2 *a* 4 | | | | | | *t* 4 | | |  |  |  |  |  |  |  |
| *F* *F*2*F*2 | | | | | | | | | | |  |  |  |  | *m* 2 *a*2 | | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | τ |  |  |  |  |  | | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | ** | | |  | *n* |  |  |  |  |  |  |  |  | ** |  |  |  |  | *R*2 | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  | | *t* 4 | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *a* 2 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *a* 2 *t* 4 | | | | | |  |  |  |
|  |  | *m* 2 *a* τ21 | | | | |  | |  |  | τ |  |  |  |  |  |  *ma*τ | | | | | 1  | | | |  | τ | |  |  |  |  | . | |  |
|  |  |  |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  | *R* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *R* | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3. В момент, когда пройденный путь | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *a t* 2 | | | |  |  |  |  |  |  | *a* | | | *t* | 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *S**R* 2 | | | | | | |  |  | τ | |  |  | , |  |  |  |  |  |  | τ |  |  |  |  |  2 2 | | | | | | | |  |  |  |
|  |  | 2 | | |  |  |  |  |  |  |  | *R* | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *a* 2 *t* 4 | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | τ | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| и, следовательно, |  | | |  8 . | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *R*2 | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



Тогда

* 1.  *ma*τ **1  8  3*ma*τ .

1. Тангенс угла α между радиусом окружности и силой *F* равен:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *F*τ |  | *ma*τ |  |  |  |  |  |  |  |  |
| tgα  |  | *R*  | *R* |  | 2 | | | . |  |
|  |  | *a*τ *t* 2 |  | | |  |
|  | *Fn ma*τ2 *t* 2 | | |  |  | 4 | |  |  |  |

Из рассмотрения первой задачи динамики точки видно, что по заданной массе точки и уравнениям её движения сила полностью определяется как по величине, так и по направлению.

*Ответ: F* 3*ma*τ.

**Задача 7.3.** Материальная точка с массой*т*брошена со скоро-стью *~~v~~*0 , под углом α к горизонту (рис. 7.3). Определить траекторию точки, пренебрегая сопротивлением воздуха.

*Дано: т*,α, *~~v~~*0.

*Определить:* уравнение траектории.

*Решение*

1. К точке массой *т* приложена одна активная сила – сила тяже-сти *G* *=* *тg*.

Согласно основному уравнению динамики

*m*  *a*  *F* , *F*  *G* ,



*m*  *~~a~~*  *G*



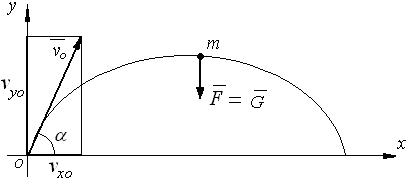
спроектируем векторное равенство на ось *у*

83

*m d* 2 *y* *G* .



*dt* 2



**Рис. 7.3. Расчётная схема к задаче 7.3**

1. Запишем дифференциальные уравнения движения в проекци-ях на оси координат:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *m* | | | *d* | 2 | *x* |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  | *dt* 2 | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *d* 2 *y* | | |  |  |  |  |  |  |
| *m* | |  |  *F* | | | |  |
|  | |  |  |
|  |  | *dt* | 2 | |  |  |  | *y* | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| или |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *d* 2 *x* | |  |  0, | | | |  |  |  |
|  | *dt* | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

* *Fx* 0,
  +  *G* *mg*,

*d* 2 *y* *g*.



*dt*

1. Интегрируя полученные уравнения дважды, получаем:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *v* |  |  | | | *dx* | | |  *C* , |  |
|  |  | *dt* | | |  |
|  | *x* |  |  |  | 1 |  |
|  |  |  | *dy* | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *v y*  | | | *dt* | |  |  *gt*  *C*2 | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *x*  *C*1*t*  *D*1, | | | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *gt* | | | 2 |  |  |  |
| *y*  | | | |  |  *C*2 *t*  *D*2 |  |
|  |  |  |
|  | | |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 2 | | |  |  |  |

(*а*)

(*б*)

84

Определим произвольные постоянные, в начальный момент времени

при

*t* 0



*x*  *x*0

 0;

*y* 

*y*0

 0;

при

*t* 0



*v x*

 *v*0

cos α;

*v y*

 *v*0

sin α.

Подставляем эти начальные условия в уравнения (*а*) и (*б*), полу-

чим

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *C*1 |  *v*0cosα; | *D*1 |  *x*00; |
| *C*2 |  *v*0sinα; | *D*2 |  *y*00. |

Окончательно получим

1.  *v*0 *t* cosα ; *y*  *gt* 2 *v*0 *t* sinα.

2



Исключив из этих уравнений время *t*, определим уравнение тра-ектории движения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *y*  | *gx*2 |  |  *x* tqα. |  |
| 2*v*2 cos2 | α |  |
|  | 0 |  |  |  |

Это уравнение параболы.

1. Найденные уравнения движения могут быть использованы для определения некоторых параметров траектории. Определим, например, максимальную дальность полета тела.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Полагая *y*  0, получим  | | | | | *gt* 2 | |  *v*  *t* sinα0.Отсюда *t* 0 | | | | | | и |  |
|  |  |  |
|  |  |  | 2 | | | | 0 |  |  |  |  | 1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *t*2 | | | 2*v*0 sin α | | | . |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | *g* |  |  |  |  |  |  |  |
| Подставив *t*2 в уравнение для *х*, получим | | | | | | | | | | | |  |  |  |
|  |  | 2*v* 2 |  sin α  cos α | | | | |  |  | *v*2 | sin 2 α |  |  |  |
| *x* |  | 0 |  |  |  |  |  |  | | 0 |  | . |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| max | |  |  |  | *g* | |  |  |  |  | *g* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ответ: y*  | *gx*2 | |  |  *x* tgα. | | | |  |  |  |  |  |  |  |
| 2*v*2 cos2 | | α |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

85

**Задача 7.4** На вертикальном участке*АВ*трубы(рис. 7.4)на груз



*D* массой *m* действуют сила тяжести и сила сопротивления *R* ;движе-ние от точки *А*, где *v*0  0 , до точки *В* длится *t*1 с. На наклонном

участке *ВС* на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен *f* ) и переменная сила *F*  *F* (*t* ), заданная в ньютонах.

*Дано:*

*m* 8

кг,

*R* μ*v*2, где

μ 

0, 2

кг/м,

*v*0

 0 ,

*t*12

с,

1.  0, 2, *Fx* 16sin(4*t* ) , α  300 .

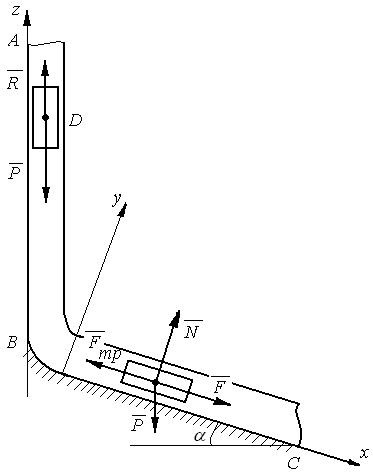
*Определить: x*  *f* (*t* )−закон движения груза на участке *ВС. Решение*

1. Рассмотрим движение груза на участке *АВ,* считая груз мате-риальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы *P*  *m~~g~~* и *R* (рис. 7.4).



Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| движения груза в проекции на эту ось: | | |  |  |  |  |
| *m* | *dvz* | *Fkz* или | *m* | *dvz* |  *Pz*  *Rz* . |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  | *dt* | |  | *dt* | |  |



**Рис. 7.4. Расчётная схема к задаче 7.4**

2. Далее находим *Pz*  *P*  *mg*, *Rz*  *R* μ*v*2; подчеркиваем,

что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить че-рез величины, от которых они зависят. Учтя еще, что *v* *z*  *v*, получим

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *m* | *dv* |  *mg* μ*v*2 | | или | *dv* |  | ** | ( | *mg* |  *v*2). | (7.1) |  |
| *dt* |  | *m* | μ |  |
|  |  |  |  | *dt* | |  |  |  |  |
| Введём для сокращения записей обозначение | | | | | | | | | | |  |  |
|  |  | *n*2 | *mg* |  400 (*n* = 20 м/с), | | | | | |  | (7.2) |  |
|  |  | μ |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

где при подсчёте принято *g* 10 м/с2 .

Тогда, разделяя в уравнении (7.1) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *dv* |  | | μ | *dt* | | и | |  |  | 1 | ln | | *n*  *v* | |  | μ | *t*  *C* . | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *n* 2 *v*2 |  |  | *m* | | |  |  |  |  | 2*n n*  *v m* | | | | | | | | 1 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3. По начальным условиям при *t*  0 *v*  *v*0  0 , что даёт | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |
|  |  |  |  | *C*1(1 / 2 *n*) *ln* 1 = 0. | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |
| Введя ещё одно обозначение | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *k*  *n* | | μ |  |  0, 5*c*1 , | | | | | | |  |  | (7.3) |  |
| получим | |  |  |  | *m* |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *n*  *v* | | |  |  |  |  |  |  |  | *n*  *v* | |  |  |  |  |  |  |
|  | ln | |  2*kt* | | | и | |  |  |  *e*2*kt* . | | | |  |  |
|  |  | | |  |  |  | |  |  |
|  |  |  | *n*  *v* | | | |  |  |  |  |  |  | *n*  *v* | | | |  |  |  |  |

Отсюда находим,что *v*  *n e*2*kt* 1.



*e*2*kt* 1

Полагая здесь *t*  *t*1  2 с и заменяя *n* и *k* их значениями (7.2) и (7.3), определим скорость *vB* груза в точке В (число *е* = 2,7):

*v* 20*e*2115, 2м/с.



*B* *e*21

1. Рассмотрим движение груза на участке *ВС*; найденная ско-рость *vB* будет для движения на этом участке начальной скоростью ( *v*0  *vB* ) изображением груза (в произвольном положении) и дей-

ствующие на него силы *P*  *m~~g~~* , *N* , *F*тр и *F* . Проведём из точки *В* оси



*Bx* и *By* и составим дифференциальное уравнение движения груза впроекции на ось *Bx*:

87

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *m* | *dvx* | *P* *N* | *x* |  *F* |  *F* | или *m* | *dvx* |  *mg* sinα *F* |  *F* (7.4) |  |
|  |  |  |
|  | *dt* | *x* | тр*x* | *x* |  | *dt* | тр | *x* |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

где *F*тр *fN* .

Для определения *N* составим уравнение в проекции на ось *By*.

Так как *ay*  0, получим 0  *N*  *mg* cos α , откуда *N*  *mg* cos α .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Следовательно, | | *Fтр*  *fmg* cosα;кроме того, | *Fx* 16sin(4*t* )и |  |
| уравнение (7.4) примет вид | | |  |  |
| *m* | *dvx* |  *mg* (sinα *f* cos α)16sin(4*t*). | (7.5) |  |
| *dt* |  |
|  |  |  |  |

Разделив обе части неравенства на *m*, вычислим

*g* (sinα *f* cos α) *g*(sin 3000, 2cos 300)3, 2;16 / *m* 2

* подставим эти значения в (7.5). Тогда получим

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *dvx* |  3, 2  2sin(4*t*) . | (7.6) |  |
| *dt* |  |
|  |  |  |

Умножая обе части уравнения (7.6) на *dt* и интегрируя, найдём

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* |  |  3, 2*t*  | 1 | cos(4*t* )  *C* . | (7.7) |  |
| *x* |  |  |
|  |  | 2 | 2 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1. Будем теперь отсчитывать время от момента , когда груз нахо-дится в точке *В*, считая в этот момент *t*  0. Тогда при *t*  0 *v*  *v*0  *vB* , где *vB* даётся равенством (7.6). Подставляя эти величины в (7.7), по-

лучим

*C*2 *vB* 0,5cos 015, 20,515, 7.При найденном значении *C*2 уравнение (7.7) даёт

*v x*  *dxdt* 3, 2*t* 0, 5cos(4*t* )15, 7.



Умножая здесь обе части на *dt* и снова интегрируя, найдём

1.  1, 6*t* 2  0,13sin(4*t* )  15, 7*t*  *C*3 .

Так как при *t*  0 *x*  0, то *C*3  0 и окончательно искомый закон движения груза будет

1.  1, 6*t* 2  15, 7*t*  0,13sin(4*t* ),

где *х* –в метрах, *t* – в секундах.

*Ответ: x* 1, 6*t* 215, 7*t* 0,13sin(4*t* ).

88

**Распределение баллов по модулям и видам учебных занятий.**

Модуль 1.

Всего баллов 40

Из них:

-практические занятия 4

-индивидуальные занятия 2

-поощрительные баллы 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лекции | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
| Теоретический ответ  Сумма баллов | 9-14  21-26 | 15-21  27-33 | 22-28  34-40 |

Модуль 2.

Всего баллов 60

Из них:

-практические занятия 6

-индивидуальные занятия 3

-поощрительные баллы 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лекции | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
| Теоретический ответ  Сумма баллов | 22-28  40-46 | 29-35  47-53 | 36-42  54-60 |

Модуль 3.

Всего баллов 100

Из них:

-лабораторные работы 12

-индивидуальные занятия 6

-поощрительные баллы 6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лекции | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
| Теоретический ответ  Сумма баллов | 44-56  61-73 | 57-70  74-86 | 71-84  87-100 |

Итоговое распределение баллов по модулям.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лекции | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
| Модуль 1.  Модуль 2.  Модуль 3. | 21-26  40-46  61-72 | 27-33  47-53  74-86 | 34-40  54-60  88-100 |
| Сумма баллов | 61-72 | 74-86 | 88-100 |

**Оценивание:**

Конкретные требования экзаменирования сообщаются студентам в начале модуля (семестра).

Контроль знаний включает элементы теории и практики, с учетом материала, представленного в ходе лекций, семинаров (где обсуждаются рефераты и презентации) и лабораторных работ.

Контроль знаний проводится в виде письменного и устного опроса, тестирования, в виде доклада (реферата), презентации, отчёта по лабораторной работе.

Окончательная оценка ставится с учетом пропорциональной доли и значимости различных теоретических и практических элементов модуля.

Обязательным условием выставления оценки является успешное прохождение и защита всех предусмотренных лабораторных работ, представление рефератов, презентаций, портфолио.

В случае не завершения или неудовлетворительного выполнения элементов практики (практических занятий, семинаров, лабораторных работ) ставится оценка «неудовлетворительно».

Весь учебный курс оценивается в 100 баллов.

**5.5. Карта рейтинг-контроля**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № модуля | Объём модуля в часах | Оценка в баллах | | Сроки |
| мин. | макс. |
| **Текущий контроль** | | | | |
| Модуль 1 | Лекции – 16 час  Практическая занятия – 16 час  СРС – 28 час  Сумма баллов | 12  12  6  30 | 20  20  10  50 | По графику |
| Модуль 2 | Лекции – 16 час  Практические занятия – 16 час  СРС – 28 час  Сумма баллов | 12  12  7  31 | 20  20  10  50 | По графику |
| **Заключительный контроль** | |  |  | По расписанию экзаменов |
| **Итого баллов** | | **61** | **100** |  |

На основании полученной студентом суммы баллов за семестр выставляется оценка в соответствии с приведённой ниже таблицей.

**Итоговое распределение баллов**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
| Сумма баллов | 61-73 | 74-86 | 87-100 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Содержание оценки | |  | | |
| **Отлично –** замечательный результат при нескольких незначительных недостатках | **5** | **А** | **отлично** | зачёт |
| **Очень хорошо –** результат выше среднего, несмотря на определённое количество  недостатков | **4+** | **В** | **хорошо** |
| **Хорошо –** в общем хорошая работа, несмотря на определённое число значительных недостатков | **4** | **С** |
| **Удовлетворительно –** добросовестная работа, содержащая, однако, значительные недостатки | **3+** | **D** | **Удовлетво-рительно** |
| **Посредственно –** результат соответствует минимально допустимым критериям | **3** | **E** |
| **Неудовлетворительно –** с правом пересдачи, необходима дополнительная работа для получения кредита | **2** | **FX** | **Неудовле-твори-тельно** | незачёт |
| **Неудовлетворительно –** без права пересдачи, необходимо повторить курс, необходима значительная дополнительная работа  (повторный курс) |  | **F** |