КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

**ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

ВВЕДЕНИЕ

***Теоретическая механика*** – наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Под движением в механике понимается изменение положения твердого тела в пространстве и во времени, относительно других тел.

Пространство в классической механике рассматривается как абсолютное, трехмерное, в котором все построения базируются на геометрии Евклида.

Время в классической механике так же абсолютно.

Тела, относительно которых мы рассматриваем движение данного тела, называются *телами отсчета*. Тело отсчета со скрепленными с ним осями координат называется *системой отсчета*.

Система отсчета, которая находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, называется *инерциальной*.

***Абсолютно твердое тело*** – тело, в котором расстояния между любыми точками остается неизменным при взаимодействии с другими телами.

На основе законов механики базируются дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика, инженерные конструкции и т.д.

Механика состоит из трех основных разделов:

* статика;
* кинематика;
* динамика.

РАЗДЕЛ I. СТАТИКА

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

***Статика*** – раздел механики, изучающий условия равновесия материальных тел или систем тел, под действием приложенных к ним сил.

***Покой*** (равновесие) – состояние тела, при котором его положение относительно инерциальной системы отсчета остается неизменным.

Одним из основных понятий в теоретической механике является понятие силы.

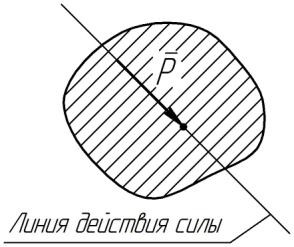


Рисунок 1.1***Сила*** – векторная величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел.

Геометрически сила изображается вектором (рисунок 1.1), который характеризуется:

1. числовым значением (модулем);
2. направлением;
3. линией действия, которая пролегает вдоль вектора силы в оба направления.

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется ***системой сил***.

Если одну систему сил можно заменить другой, и при этом тело не изменит своего кинематического состояния, то эти системы считаются ***эквивалентными***.

***Уравновешенными системами сил*** называются системы сил, которые будучи приложенными к покоящемуся телу не изменят его кинематического состояния, т.е. эквивалентные нулю.

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел, называются ***внешними***.

Силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга, называются ***внутренними***.

Основной ***задачей статики*** является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

* 1. Свободное и несвободное тело. Реакция связи

***Свободное тело*** – тело, перемещение которого ничем не ограничено.

***Несвободное тело*** – тело, перемещение которого ограничено другими телами.

Тело, ограничивающее перемещение рассматриваемого тела, является по отношению к нему ***связью***.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние разделяются на *задаваемые* или *активные* силы и *реакции связей*.

***Активная сила*** – сила, стремящаяся изменить кинематическое состояние тела.

***Пассивная сила*** – реакция связи (возникающая от действия активной силы).

Одним из основных положений механики является принцип ***освобождаемости твердых тел от связей***, согласно которому всякое несвободное тело условно можно считать свободным, если мысленно отбросить связь, наложенную на тело, заменив ее действие **реакцией связи**.

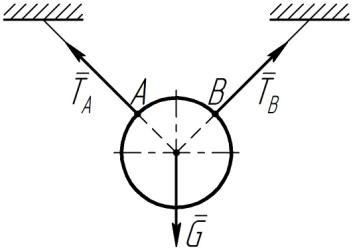
***Реакция связи*** – сила, с которой связь действует на данное тело; по модулю она равняется силе, с которой рассматриваемое тело действует на связь.

Направление реакции связи зависит от характера связи.

* 1. Основные виды связей без трения

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***1. Идеальная гладкая поверхность*** (рисунок 1.7)  Реакция направлена по общей нормали к поверхности  соприкасающихся тел. |
| Рисунок 1.7 |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *а)* | *б)* | ***2. Ребро (связь в виде острия)*** (рисунок 1.8 *а*, *б*)  Реакция направлена по нормали к поверхности тела. |
| Рисунок 1.8 | |  |

Рисунок 1.9

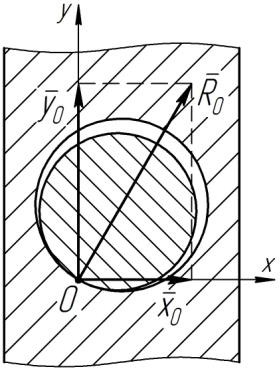
1. Гибкая связь (нерастяжимая нить, трос, канат, цепь) (рисунок 1.9)

Реакция (натяжение *T* ) направлена вдоль связи, от рассматриваемого тела.

1. ***Цилиндрический шарнир*** (рисунок 1.10)

Реакция *RO*

цилиндрического шарнира лежит в

плоскости перпендикулярной оси шарнира. Она проходит через центр *C* шарнира и точку *O* контакта соприкасающихся поверхностей, положение которой обычно не известно, поэтому реакцию шарнира

раскладывают на две неизвестные составляющие

*xO* и

*yO* , которые, обычно направляют вдоль взаимно

Рисунок 1.10

*x*2  *y*2

*O O*

перпендикулярных осей *x* и *y* . Тогда полная реакция *RO*

определится уравнением:

*RO*  .

1. ***Неподвижный цилиндрический шарнир*** (рисунок 1.11)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | → |  | → |  | *RA*  *xA*  *yA* , или по величине:  *R*  *x*2  *y*2 .  *A A A* |
|  |  | Рисунок 1.11 | |  |  |

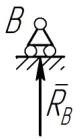


Рисунок 1.12

1. ***Подвижная шарнирная опора или шарнирная опора на катках*** (рисунок 1.12). Реакция всегда будет направлена перпендикулярно направляющей поверхности. Применяются в мостовых и других конструкциях для снятия температурных напряжений.
2. ***Неподвижный сферический шарнир*** (рисунок 1.13)**. *Подпятник***

(рисунок 1.14). Полная реакция

*RO* раскладывается на три неизвестные

составляющие

*xO* ,

*yO* ,

*zO* , направленные вдоль трех взаимно

перпендикулярных осей *x* , *y* , *z* .

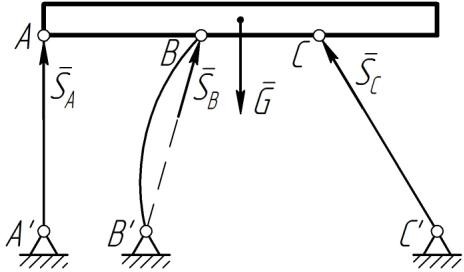
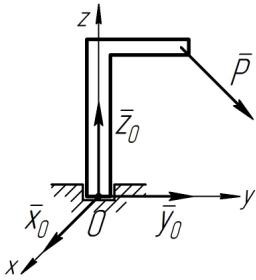
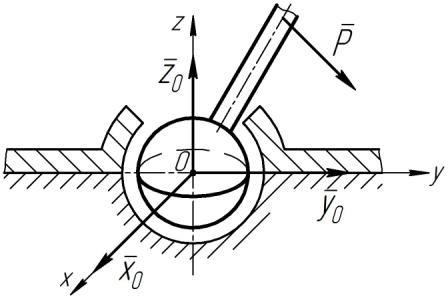


Рисунок 1.13 Рисунок 1.14 Рисунок 1.15

1. ***Жесткий невесомый стержень*** (рисунок 1.15)

Реакция *S* невесомого стержня направлена вдоль прямой,

проходящей через оси шарниров, соответственно стержня.

*A*, *A*,

*B*, *B*,

*C*, *C*,

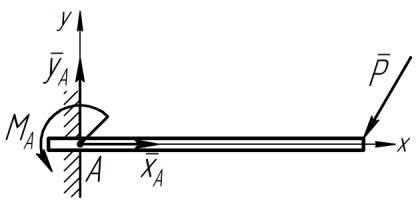


Рисунок 1.16

1. Жесткая заделка (защемление)

(рисунок 1.16)

Реактивные факторы в плоскости сводятся к двум неизвестным составляющим реакции –

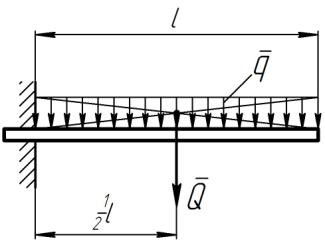
*xA* и

*yA* , и к реактивному моменту заделки

*MA* .

* 1. Распределенные силы

1. ***Равномерно-распределенная нагрузка*** (рисунок 1.17)

Характеризуется интенсивностью *q* распреде-

ленной нагрузки, *q*  H  . Для удобства расчета

 

 м 

заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной

Рисунок 1.17

силой *Q* , приложенной в центре участка приложения

распределенной нагрузки и направленной в ту же сторону, что и

распределенная нагрузка:

*Q*  *ql* ; *Q*  H.

Если нагрузка будет равномерно распределена по площади, тогда

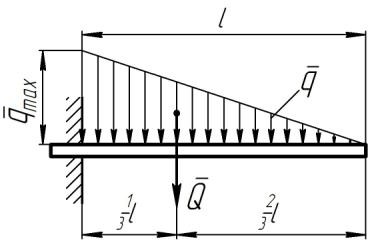
размерность *q*   H  .

 2 

м 

1. ***Линейно-распределенная нагрузка*** (рисунок 1.18)

Характеризуется максимальным значением

*q*max

интенсивности *q* распределенной нагрузки,

Рисунок 1.18

которая заменяется сосредоточенной силой *Q* ,

приложенной на расстоянии 1 *l* от максимального

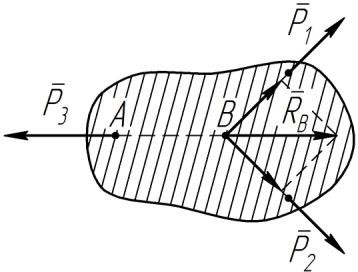
3

значения интенсивности *q* :

*Q*  1 *q l* .

2 max

* 1. еорема о равновесии трех непараллельных сил

Если свободное тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.

*Доказательство* (рисунок 2.3). Пусть на тело,

Рисунок 2.3

находящееся в равновесии, действуют система из

трех непараллельных сил

*P*1 ,

*P*2 ,

*P*3 . Следовательно

*P*1  *P*2  *P*3  0 .

Заменим силы

*P*1 и *P*2

силой

*RB* . Тогда получим уравновешенную систему

двух сил *P*3 , *R* 

эквивалентную нулю. Согласно второй аксиоме силы

*P*3 и

*RB* уравновешены в том случае, если они равны по модулю и направлены

по одной прямой в противоположные стороны, т.е.

*Р*3  *RB*

, *Р*3  *RB* .

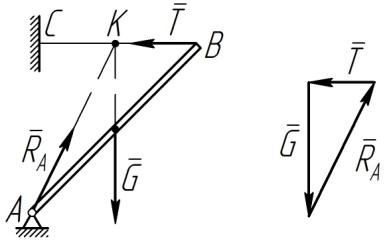


Рисунок 2.4

***Пример***. Определить реакцию в опоре балки (точке *A* ) весом *G* и натяжение нити *BC* (рисунок 2.4).

Балка *AB* закреплена в точке *A* непод- вижным шарниром и в точке *B* нитью *BC* .

Показываем вес балки. Связи заменяем реакциями связей. Реакция нити будет направлена вдоль прямой *BC* . Согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил линия действия реакции шарнира в точке *A* будет проходить через точку пересечения линий действий сил *G* и *T* (точку *K* ).

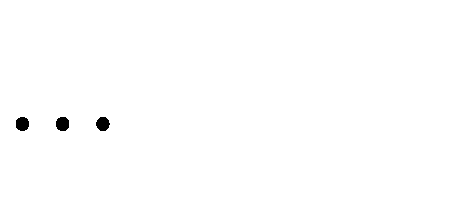
* 1. Проекция силы на ось

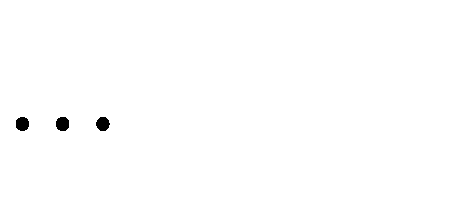
***Проекция силы на ось*** – алгебраическая величина, равная произведе- нию модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси (см. таблицу 2.1).Таблица 2.1 – Проекция силы на ось *x* при различном расположении вектора *P* относительно оси

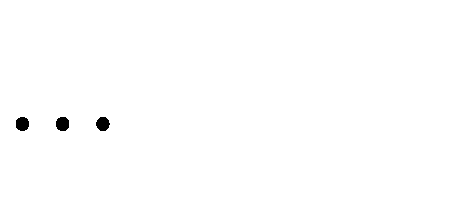
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| **  0 | 0  **  90 | **  90 | 90  ** 180 |
| *Px*  *P*cos**  *P* | *Px*  *P*cos** | *Px*  *P*cos**  0 | *Px*  *P*cos**  *P*cos ** |

* 1. Аналитическое определение равнодействующей сходящейся системы сил

Проекция равнодействующей *сходящейся системы сил* на ось равна сумме проекций всех сил, входящих в эту систему, на ту же ось, т.е.

*Rx*  *P*1*x*  *P*2 *x*   *Pnx*  *Pix* ;

*Ry*  *P*1*y*  *P*2 *y*   *Pny*  *Piy* ;

*Rz*  *P*1*z*  *P*2 *z*   *Pnz*  *Piz* .

*R*   ;

*R*2  *R*2  *R*2

*x y z*





*P* 



2





*iy*



2

*ix*

*P* 





*P*

*iz*



2

Направление вектора равнодействующей *R* сходящейся системы сил по отношению к координатным осям определяется направляющими

косинусами:

ен

в центре *O* и направлен перпендикулярно плоскости *OAB* , в такую сторону, чтобы, смотря ему навстречу, видеть силу *P* стремящуюся вращать плоскость *OAB* против хода часовой стрелки.

По модулю момент силы *P* относительно центра *O* будет равен:

где *h* – плечо, м.

*MO* *P*   *r*  *P*

 *rP*sin*r* , *P*   *Pr* sin**  *Ph* ,

Размерность момента силы H  м.

***Момент силы относительно точки*** – произведение модуля силы на

плечо:

*MA* *P*   *Ph*

* момент силы *P* относительно точки *A* .

***Плечом*** ( *h* ) называется кратчайшее расстояние от точки (полюса), относительно которой определяем момент, до линии действия силы.

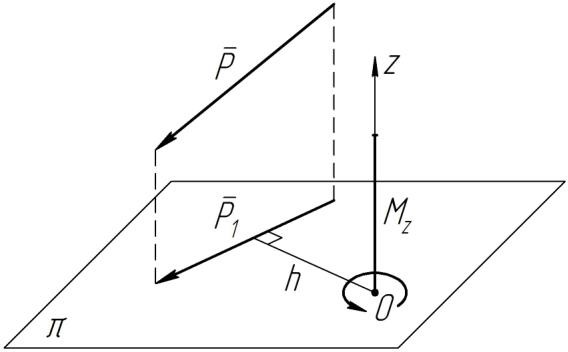
Момент силы считается положительным «  », если мы условно видим обход заданного вектора силы *P* вокруг полюса (точки *A* ) против хода часовой стрелки, и отрицательным « » – если по ходу часовой стрелки.

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 3.2 | ***Пример***. Определить моменты сил *P*1 и *P*2 относи- тельно точки *A* (рисунок 3.2).  *MA* *P*1   *P*1*h*1 ;  *MA* *P*2   *P*2*h*2 . |

Свойства момента силы относительно точки (центра):

1. значение момента силы не изменится, если силу переместить вдоль линии ее действия в любую точку;
2. момент силы относительно точки (центра) равен нулю, если линия действия силы проходит через полюс.

***Момент силы относительно оси*** (рисунок 3.3). Чтобы найти момент

силы *P* относительно оси *z* , необходимо спроецировать силу на плоскость ** (плоскость вращения), перпендикулярную оси вращения *z* , и

найти момент полученной проекции *P*1

Рисунок 3.3сительно точки *O* пересечения оси с плоскостью.

***Момент силы относительно оси*** – произведение модуля проекции

*P*1 силы *P* на плоскость ** , перпендикулярную оси *z* , на ее плечо *h* ,

относительно точки *O* пересечения оси с плоскостью:

*Mz*  *P*1*h* .

Момент силы относительно оси равен нулю, когда:

1. линия действия силы параллельна оси, относительно которой определяется момент силы;
2. линия действия силы пресекает ось, относительно которой определяется момент силы;

т.е. *момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось лежат в одной плоскости*.

* 1. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

*Момент равнодействующей системы сил относительно какого-либо центра равняется геометрической сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно того же центра:*

*MO* *R*   *MO* *Pi* 

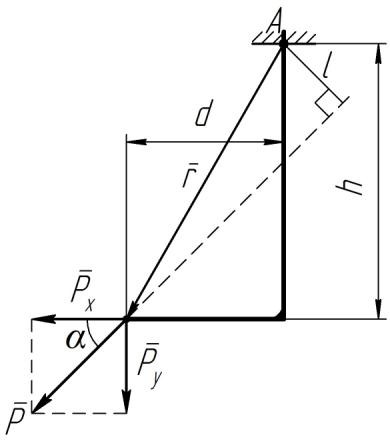
* относительно центра *O* .

*Момент равнодействующей системы сил относительно точки или оси равен алгебраической сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно той же точки или оси:*

*MA* *R*   *MA* *Pi*  – относительно точки *A* ;

*Mx* *R*   *Mx* *Pi* 

* относительно оси *x* .

***Пример*** (рисунок 3.4). Пусть к телу приложена сила *P* . Определить момент этой силы относительно точки *A* .

Момент силы *P* относительно точки *A*

будет равен:

Рисунок 3.4

Так как

*MA* *P*   *r*  *P* .

*P*  *Px*  *Py* , то

*MA* *P*  *r*  *Px*  *r*  *Py* .

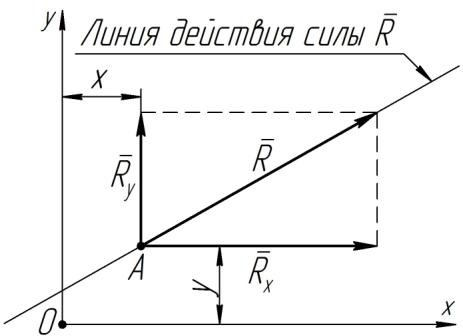
По модулю момент силы *P* относительно точки *A* будет равен:

*MA* *P*   *P*  *l* .

Если силу *P* разложить на составляющие, то момент этой силы относительно точки *A* будет равен алгебраической сумме моментов этих составляющих относительно той же точки:

*MA* *P*  *Px*  *h*  *Py*  *d*  *P* cos**  *h*  *P*sin**  *d* .

* 1. Уравнение линии действия равнодействующей плоской системы сил

Пусть равнодействующая *R* плоской системы сил приложена в точке *A* (рисунок 3.5). Вектор *R* расположен таким

образом, что его проекции

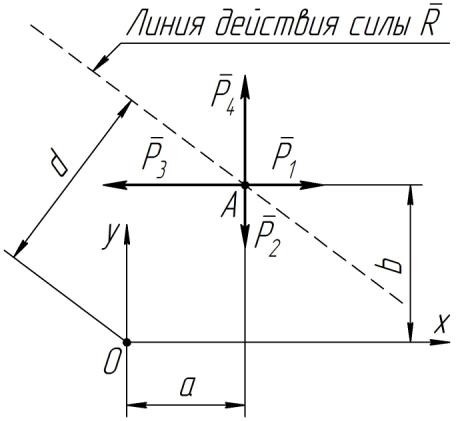
*Rx* и *Ry* на

Рисунок 3.5

координатные оси *x* и *y* направлены в стороны положительных направлений соответствующих осей.

Согласно теореме Вариньона:

*MO* *R*   *Ry x*  *Rx y* ; (3.1)*Ry x*  *Rx y*  *MO* *R*   0 . (3.2) Уравнение (3.2) есть уравнение линии действия равнодействующей.

***Пример***. Определить уравнение линии действия равнодействующей *R* плоской

сходящейся системы сил *P*1, *P*2 , *P*3 , *P*4 ,

приложенных в точке *A* (рисунок 3.6), если

2

4

*P*1 10 Н ,

*P*  8 Н ,

*P*3 18 Н,

*P* 14 Н ,

Рисунок 3.6

*a*  3 м , *b*  4 м.

Сначала определяем проекции равно- действующей на координатные оси:

*Rx*  *Pix*  *P*1  *P*3 10 18  8 Н;

*Ry*  *Piy*  *P*2  *P*4  8 14  6 Н .

Далее определяем сумму моментов всех сил относительно произволь- ной точки, например, относительно начала координат (точки *O* ):

*MO* *Pi*   *P*1*b*  *P*2*a*  *P*3*b*  *P*4*a* ;

*MO* *Pi*   10  4  8 3 18 4 14  3  50 Н м .

Так как*MO* *Pi*   *MO* *R* , согласно формуле (3.1), получим:

*MO* *Pi*   *Ry x*  *Rx y* ;

50  6*x*  8 *y* ;

Таким образом, получили уравнение (3.3) линии действия равнодействующей *R* , которая находится на расстоянии *d* от моментной точки *O* :

*MO* *R* 



*d* .

*R*

По величине сила *R* будет равна:

*R*    10 Н .

*R*2  *R*2

*x y*

82  62

Тогда кратчайшее расстояние *d* от моментной точки *O* до линии

действия силы *R* составит:

*MO* *R*  50

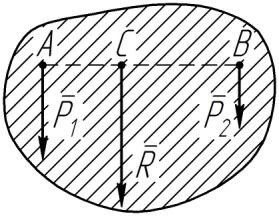
 . 

*d* 5 м

*R* 10

4 ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

* 1. Сложение двух параллельных сил

Равнодействующая *R* двух параллельных сил

*P*1 и

*P*2 одного направления (рисунок 4.1) имеет такое же

Рисунок 4.1

направление, а ее модуль равен алгебраической сумме модулей слагаемых сил:

*R*  *P*1  *P*2 .

Точка *C* приложения равнодействующей делит отрезок *AB* на части обратно пропорциональные модулям сил:

*AC*  *P*2 .

*BC P*1

По свойству пропорций:

*P*1

 *P*2 

*P*1  *P*2

*BC AC BC*  *AC*

Откуда следует равенство:

*P*1  *P*2

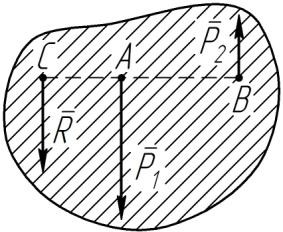
 *R* . (4.1)

*BC AC AB*

Равнодействующая *R* двух параллельных сил

*P*1 и

*P*2 противоположного направления (рисунок 4.2) имеет

Рисунок 4.2

направление силы, большей по модулю, и модуль, равный разности модулей этих сил:

*R*  *P*1  *P*2 .

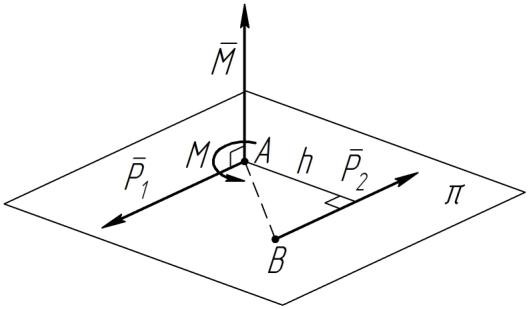
Точка *C* приложения равнодействующей лежит на продолжении отрезка *AB* за точкой приложения большей силы:

*P*1  *P*2

 *R* . (4.2)

*BC AC AB*

* 1. Пара сил. Момент пары сил

***Пара сил*** – совокупность двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рисунок 4.3).

*Пара сил* – это самостоятельный, не

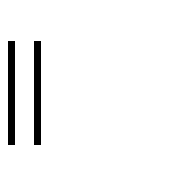
Рисунок 4.3

1. плоскостью действия;
2. направлением вращения;

упрощаемый элемент статики, харак- теризующийся:

1. модулем (величиной) момента пары.

*P*2  *P*1 ; *P*1 *P*2 .



*M* *P*1, *P*2   *AB*  *P*2  *BA* *P*1 ;

*M* *P*1, *P*2   *P*1*h*  *P*2*h* ,

где *h* – кратчайшее расстояние между линиями действия сил, состав- ляющих пару, м.

Размерность момента пары сил H  м.

Момент пары сил *P*1, *P*2 

изображают вектором *M* , который

перпендикулярен плоскости действия пары и направлен в ту сторону, откуда видно пару сил стремящуюся вращать плоскость ее действия против хода часовой стрелки.

Момент пары сил считается положительным «  », если пара сил

стремится вращать плоскость в сторону противоположную ходу часовой стрелки, и отрицательным « » – если в сторону хода часовой стрелки.

|  |  |
| --- | --- |
| Момент положителен « **+** »   | Момент отрицателен « **–** »   |

* 1. Свойства пар

Проекция пары на любую ось равна нулю, что следует из определения пары сил.

Не изменяя действия пары на твердое тело, пару можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары, а так же изменять ее силы и плечо, сохраняя неизменным модуль и направление момента пары.

Таким образом, момент пары сил, есть вектор свободный, т.е. не имеющий определенной точки приложения.

6 АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

1. ***Равновесие пространственной произвольной системы сил***, т.е. системы сил, линии действия которых произвольно расположены в пространстве (рисунок 6.1).

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 6.1 |  *Pix*  0; *Mx* *Pi*   0;   *Piy*  0; *M y* *Pi*   0;   *Piz*  0; *Mz* *Pi*   0. |

*Для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси ( x , y , z ) и суммы моментов всех сил относительно*

*этих осей равнялись нулю*.

Примечание. Оси, относительно которых составляются уравнения, не должны лежать в одной плоскости и быть параллельны.

1. ***Равновесие пространственной параллельной системы сил***, т.е. системы сил расположенных в пространстве, линии действия которых параллельны (рисунок 6.2).

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 6.2 | Пусть линии действия всех сил параллельны оси *Oz* , тогда:   *Piz*  0;  *Mx* *Pi*   0;  *M y* *Pi*   0. |

См. рисунок 6.2

*Для равновесия пространственной параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось параллельную линиям действия сил (ось Oz ) равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух оставшихся осей ( x , y ) также*

*равнялись нулю*.

1. ***Равновесие сходящихся систем сил***, т.е. систем сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рисунки 6.3 и 6.4).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Пространственная сходящаяся* | | *Плоская сходящаяся* | |
| Рисунок 6.3 |  *Pix*  0;   *Piy*  0;   *Piz*  0. | Рисунок 6.4 |  *Pix*  0;   *Piy*  0. |

См. рисунок 6.3

*Для равновесия пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси ( x , y , z ) равнялись нулю*.

См. рисунок 6.4

*Для равновесия плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две координатные оси ( x , y или x , z или y , z ) равнялись нулю*.

1. ***Равновесие плоской произвольной системы сил***, т.е. системы сил произвольно расположенных на плоскости (рисунок 6.5).

Существует III вида (формы) условий равновесия плоской произвольной системы сил.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Рисунок 6.5 | Первый вид (основной):   *Pix*  0;   *Piy*  0;  *MO* *Pi*   0. | Второй вид:   *Pix*  0;  *M A* *Pi*   0;  *MB* *Pi*   0,  прямая  *AB*  *Ox* . | Третий вид:  *M A* *Pi*   0;  *MB* *Pi*   0;  *MC* *Pi*   0,  точки *A* , *B* и *C*   одной прямой. |

* 1. *Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две оси, лежащие в плоскости действия системы сил, равнялись нулю, и сумма моментов относительно любой точки (например точки O ), принадлежащей данной плоскости, также равнялась нулю*.
  2. *Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на любую ось, принадлежащую плоскости действия системы сил (например ось Ox ), равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух любых точек, принадлежащих данной плоскости (например точки A и B ), также равнялись нулю*.

Примечание. Прямая *AB* не должна быть перпендикулярна оси *Ox* .

* 1. *Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно трех произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точек A, B и C ), равнялись нулю*.

Примечание. Точки *A* , *B* и *C* не должны лежать на одной прямой.

1. ***Равновесие плоской параллельной системы сил***, т.е. системы сил расположенных на плоскости, линии действия которых параллельны (рисунок 6.6).

Существуют II вида (формы) условий равновесия плоской параллельной системы сил.

Пусть линии действия всех сил параллельны оси *Oy* .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рисунок 6.6 | Первый вид (основной):  *Piy*  0;  *MO* *Pi*   0. | Второй вид:  *MA* *Pi*   0;  *MB* *Pi*   0,  прямая *AB Oy* . |

* 1. *Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил (например Oy ), равнялась нулю, и сумма моментов всех сил*

*относительно какой-либо точки, принадлежащей плоскости действия системы сил (например точки O ), также равнялась нулю*.

* 1. *Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точек A и B ), равнялись нулю*.

Примечание. Точки *A* и *B* не должны лежать на прямой параллель- ной линиям действия сил.

7 ФЕРМА

***Ферма*** – это шарнирно-стержневая, геометрически неизменяемая конструкция. Фермы бывают *плоские* и *пространственные*.

Ферма состоит из стержней (обозначенных цифрами) и узлов (обозначенных буквами). Рассмотрим плоскую ферму (рисунок 7.1).

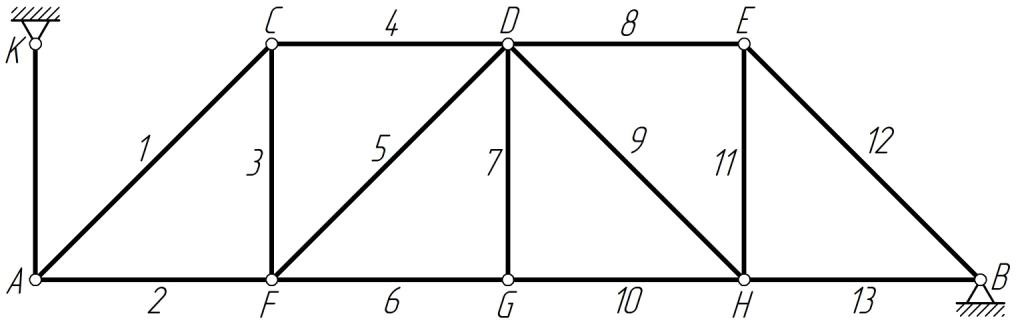


Рисунок 7.1

*1*, *4*, *8*, *12* – *стержни верхнего пояса*.

*2*, *6*, *10*, *13* – *стержни нижнего пояса*.

*3*, *7*, *11* – *стойки*.

*5*, *9* – *раскосы*.

Стержень *AK* называется *опорным*. Расстояние *AB* – *пролет фермы*.

Расчет фермы сводится к определению усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок. Для упрощения расчета фермы принимаем некоторые допущения:

1. стержни, из которых состоит ферма, прямолинейны и невесомы;
2. узлы выполнены в виде шарниров без трения;
3. внешние нагрузки приложены к узлам.

Вследствие этих допущений, усилия в стержнях направлены вдоль осей стержней, т.е. стержни работают только на растяжение или на сжатие.

Перед началом расчета фермы необходимо вычислить ***статическую определимость фермы***:

*k*  2*m*  3,

где *k* – число стержней (опорные стержни не учитываются);

*m* – число узлов.

Если Если

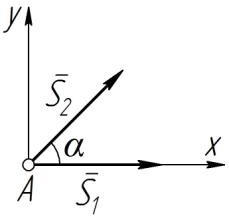
*k*  2*m*  3, то ферма нежесткая.

*k*  2*m*  3, то ферма статически неопределима.

Существует несколько методов (способов) расчета ферм:

1. метод вырезания узлов (аналитический и графический);
2. метод Риттера (метод сечений);
3. метод Максвелла-Кремоны.

7.1 Леммы о нулевых стержнях

Существуют способы позволяющие определить нагрузку в некоторых стержнях фермы без расчета.

1. Если в незагруженном узле сходятся два стержня

под углом

**  180 , то усилия в них равны нулю

Рисунок 7.2

(рисунок 7.2):

*S*1  0 ;

*S*2  0 .

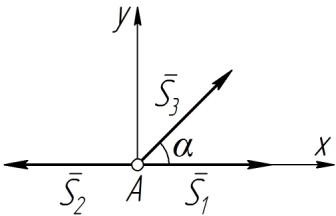
1. Если в незагруженном узле сходятся три стержня, причем два из них лежат на одной прямой, а третий под углом к ним (**  180 ), то усилие в третьем равно нулю, а усилия в первых двух будут

Рисунок 7.3

равны между собой (рисунок 7.3):

*S*1  *S*2 ;

*S*3  0 .

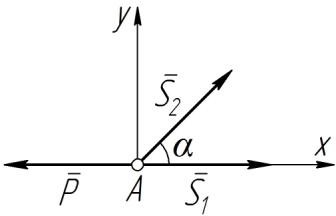
1. Если в загруженном узле сходятся два стержня под углом **  180 , причем линия действия внешней силы совпадает с осью одного из стержней, то усилие во втором будет равно нулю, а в первом равно

Рисунок 7.4

внешней силе (рисунок 7.4):

*S*1  *P* ;

*S*2  0 .

***Пример***. Определить нулевые стержни с помощью лемм (рисунок 7.5).

*BK* – опорный стержень.

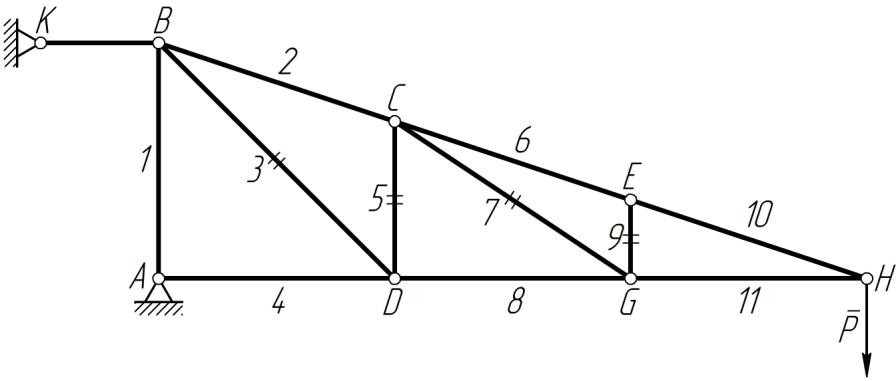


Рисунок 7.5

Рассматривая поочередно узлы *E* , *G* , *C* , и *D* получим, что стержни

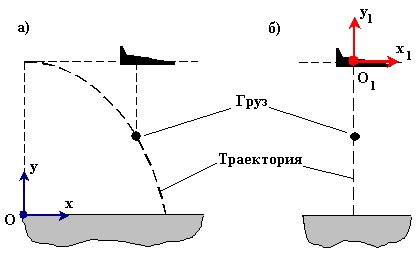
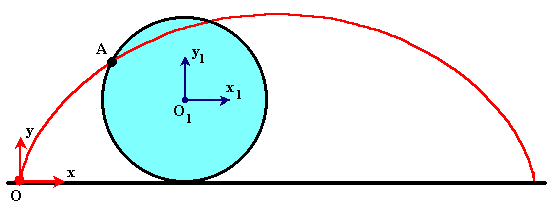
*9*, *7*, *5*, *3* – нулевые, согласно второй лемме.

1. КИНЕМАТИКА

# **Лекция 1**

1. Краткое содержание: Введение в кинематику. Кинематика точки. Понятие траектории. Способы задания движения: векторный, координатный и естественный. Скорость точки при различных способах задания движения.
2. **Введение.** Кинематикой называется раздел теоретической механики в котором изучаются движения материальных объектов таких как точка и твердое тело, без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих это движение.
3. Такое изучение движения материальных объектов не требует учета материальных характеристик этих объектов - массы, моментов инерции и пр.
4. Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.
5. Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.
6. В курсе теоретической механики кинематика делится на кинематику точки и кинематику твердого тела.

## **Кинематика точки**

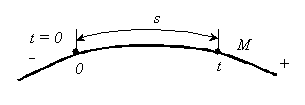
1. В кинематике точки рассматриваются характеристики движения точки, такие, как скорость и ускорение и методы их определения при различных способах задания движения.
2. **Траекторией точки** называется геометрическое место ее последовательных положений в пространстве с течением времени относительно рассматриваемой системы отсчета.
3. Форма траектории может быть прямолинейной или криволинейной и зависит от выбранной системы координат.
4. **Пример 1.**
5. С горизонтально летящего относительно Земли самолета сброшен груз. Сопротивление воздуха отсутствует.
6. Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета Oxy, жестко связанной с Землей, будет парабола. Рис. 1.1а).
7. Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета O1x1y1, жестко связанной с летящим самолетом, будет прямая линия. Рис. 1.1б).
8. Рис. 1-1
9. **Пример 2.**
10. Колесо радиуса R катится по горизонтальной прямой без скольжения. Точка А на ободе колеса совершает сложное движение.
11. Траекторией точки А относительно системы отсчета Oxy, жестко связанной с прямой, будет кривая под названием циклоида.
12. Траекторией точки А относительно системы отсчета O1x1y1, которая движется поступательно и начало отсчета которой находится в центре масс колеса, будет окружность радиуса R, центр которой находится в точке O1.
13. Рис. 1-2
14. **Способы задания движения.**
15. Движение точки можно изучать, используя любую систему координат. Рассмотрим три способа задания движения: векторный, координатный и естественный.
16. **Векторный способ.**
17. Будем рассматривать случай декартовой прямоугольной системы координат. Движение точки относительно рассматриваемой системы отсчета задано, если известен радиус-вектор  этой точки как функция времени, т.е.
18. (1-1)
19. Векторный способ обычно применяется для теоретического изложения кинематики точки.

### **Координатный способ.**

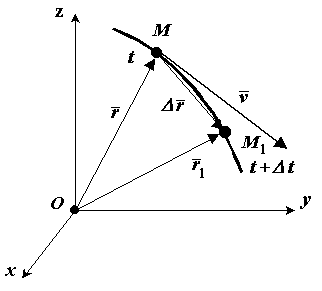
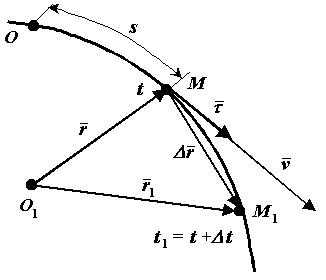
#### Движение точки можно изучать используя любую систему координат. Рассмотрим случай декартовой прямоугольной системы координат.

#### Движение точки задано, если известны координаты точки, как непрерывные, дважды дифференцируемые функции времени, т.е.

#### , , (1-2)

1. Уравнения движения есть также уравнения траектории точки в параметрической форме. Параметром является время *t*.
2.  (1-3)
3. Уравнения траектории в координатной форме получаются из уравнений (1-2) исключением параметра *t*. Получаются уравнения двух поверхностей , . Пересечение этих поверхностей дает кривую в пространстве – траекторию точки.
4. **Примеры:**
5. **Естественный способ задания движения.**
6. При естественном способе задания движения задаются траектория точки и закон движения точки по траектории. Движение точки рассматривается относительно фиксированной системы отсчета.
7. Для задания закона движения точки по траектории необходимо выбрать на траектории точку О, принимаемую за начало отсчета. Кроме того, необходимо задать начало отсчета времени.
8. Рис. 1.3
9.  - закон движения точки по траектории.
10. Функция  должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой.
11. От задания движения в декартовых координатах можно перейти к его заданию естественным способом. Закон движения точки по траектории в дифференциальной форме через декартовы координаты выражается в виде
12. 
13. и после интегрирования - в конечной форме
14. 
15. если 
16. **Примеры:**

## **Скорость точки**

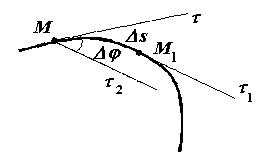
1. Одной из основных характеристик движения точки является ее скорость относительно выбранной системы отсчета.
2. **Скорость точки при векторном способе задания движения**
3. Положение движущейся точки *М* относительно системы отсчета в момент времени  определяется радиус-вектором . В другой момент времени  точка займет положение *М*1 с радиус-вектором . За время  радиус-вектор движущейся точки изменится на .
4. Средней скоростью  называется отношение изменения радиус-вектора  к изменению времени .
5. Рис. 1.4  (1-4)
6. Скорость точки равна первой производной по времени от ее радиус-вектора.
7.  (1-5)
8. **Скорость точки при координатном способе задания движения**
9. Разложим радиус-вектор и скорость на составляющие, параллельные осям координат. Получим
10. 
11.  (1-6)
12. После дифференцирования
13.  (1-7)
14. Отсуда следует
15.    (1-8)
16. Проекция скорости точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки.
17. Модуль скорости и направляющие косинусы равны:
18. 
19.   
20. Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат *Ox*  и *Oy* в этой плоскости, получим:
21.  
22. Для прямолинейного движения точки координатную ось, например ось *Ox*, направляем по траектории. Тогда
23.  
24. **Скорость точки при естественном способе задания движения.**
25. Пусть скорость точки задана естественным способом, т.е. заданы траектория точки и закон ее движения по траектории .
26. Вычислим скорость точки.
27. Используем радиус-вектор . движущейся точки, начало которого находится в неподвижной точке 
28. 
29.  - единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону возрастающих расстояний.
30. Рис. 1.5
31.  (1-9)
32. При  направления векторов  и  совпадают. Если точка движется в сторону убывающих расстояний, то  и направления векторов  и  противоположны.
33. При  вектор скорости направлен по , т.е. в сторону возрастающих расстояний; при  он имеет направление, противоположное , т.е. в сторону убывающих расстояний.
34.  - алгебраическая скорость точки, проекция скорости  на положительное направление касательной к траектории.
35. Естественное задание движения точки полностью определяет скорость по величине и направлению.

# **Лекция 2**

Краткое содержание: Геометрические понятия: кривизна кривой, радиус кривизны, оси естественного трехгранника. Дифференцирование единичного вектора. Ускорение точки при различных способах задания движения. Частные случаи движения точки.

**Геометрические понятия**

В точке *М* кривой линии проведем касательную *М*. В точке *М1* построим касательную *М1.* Между точками *М* и *М1* расстояние *s*.

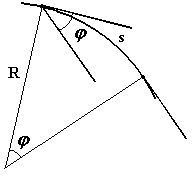
В общем случае пространственной кривой касательные *М* и *М1* будут скрещиваться. Проводим в точке *М* прямую линию *М2* параллельную *М1.* Угол ** между линиями *М* и *М2* называется *углом смежности*.

**Кривизной кривой k** в точке М называется предел, к которому стремится угол смежности, приходящийся на единицу расстояния s, при s , стремящемся к нулю, т.е.

Рис. 2-1

 (2-1)

**Радиусом кривизны кривой ** в точке *М* называется величина, обратная кривизне кривой в этой точке, т.е.

 (2-2)

Вычислим радиус кривизны дуги окружности радиуса R. Дуга окружности длиной *s*, опирающаяся на центральный угол **, выражается зависимостью  

Рис. 2-2

Через пересекающиеся прямые *М* и *М2* проводим плоскость. Предельное положение этой плоскости при совпадении в пределе точек *М* и *М1* называется соприкасающейся плоскостью кривой в точке *М.*

В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость для всех точек кривой является сама плоскость, в которой расположена эта кривая.

### **Естественный трехгранник**

Построим в точке *М* кривой линии естественные оси этой кривой.

Первой естественной осью является касательная *М*. Ее положительное направление совпадает с направлением единичного вектора .

Перпендикулярно касательной *М*располагается нормальная плоскость кривой. Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости называется главной нормалью. По главной нормали *Мn* внутрь вогнутости кривой направим единичный вектор . Он определяет положительное направление второй оси. Нормаль, перпендикулярная главной нормали называется бинормалью. Положительное направление бинормали определяется единичным вектором 

Три взаимноперпендикулярные оси *М* *Мn* и *Мb* называются естественными осями кривой. Эти оси образуют в точке *М* естественный трехгранник.

### **Дифференцирование единичного вектора**

Вычисление производной от единичного вектора  по времени дает следующий результат  Радиус кривизны считаем положительным.

Единичный вектор  перпендикулярен вектору , направ-ленному по касательной к кривой и лежит в соприкасающейся плоскости. Вектор  направлен по главной нормали кривой в сторону ее вогнутости.

**Ускорение точки**

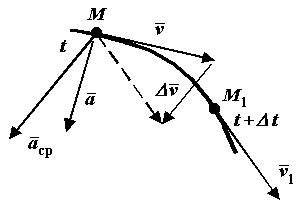
Пусть движущаяся точка *М* в момент времени имеет скорость . В другой момент времени  эта точка будет занимать положение *М1* и иметь скорость . Чтобы изобразить прираще-ние скорости  за время , перенесем вектор  параллельно самому себе в точку *М*.

Рис. 2-3

Средним ускорением точки  за время  называется отношение вектора приращения скорости  к изменению времени .

 (2-3)

Ускорением точки  в момент времени  называется предел к которому стремится среднее ускорение при , стремящемся к нулю. Ускорение точки равно первой производной по времени от скорости точки или второй производной по времени от радиус-вектора.

 (2-4)

**Ускорение точки в декартовых координатах**

Разложим ускорение и скорость точки на составляющие, параллельные осям декартовой системы координат. Получим



 (2-5)

После дифференцирования

 (2-6)

Отсуда следует

   (2-7)

Проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль ускорения и направляющие косинусы равны:

 (2-8)

   (2-9)

Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат *Ox*  и *Oy* в этой плоскости, получим:

 ****

Для прямолинейного движения точки координатную ось, например ось *Ox*, направляем по траектории. Тогда

**Ускорение точки при естественном способе задания движения.**

Скорость точки равна .

В соответствии с определением ускорения

.

Или  (2-10)

Таким образом получено разложение вектора ускорения точки по осям естественного трехгранника.

Часть ускорения  (2-11)

называется **касательной составляющей ускорения***.*

Другая часть ускорения  (2-12)

называется **нормальной составляющей ускорения.**  Она направлена внутрь вогнутости траектории, т.е. в сторону положительного направления единичного вектора главной нормали .

Формулы для проекции ускорения на естественные оси:

Касательная составляющая , при  направлена по направлению вектора , при  противоположно .

**Вычисление проекций ускорения точки на естественные оси**

Пусть движение точки задано в координатной форме. Проекция ускорения на касательную к траектории равна , алгебраическая скорость с точностью до знака равна модулю скорости , а модуль скорости равен

. Вычислим первую производную по времени от этого выражения, получим



Проекция ускорения на нормаль к траектории равна .

Радиус кривизны траектории в текущей точке равен .

**Частные случаи движения точки**

##### ***Равномерное движение***

При равномерном движении точки по траектории любой формы модуль скорости *v=const*, следовательно постоянна и алгебраическая скорость *v*, которая может отличаться от *v* только знаком.

Так как , то . Если принять при  , то после интегрирования получим

 или 

Можно также записать  

##### ***Равнопеременное движение***

Равнопеременным движением называется такое движение точки по траектории любой формы, при котором касательное ускорение постоянно, т.е. *a* =*const* Движение называется *равноускоренным* если алгебраическая скорость *v* и касательное ускорение *a* имеют одинаковые знаки. Если *v* и *a* имеют разные знаки, то назыется *равнозамедленным* . Получим формулы для алгебраической скорости и расстояния при равнопеременном движении.

Имеем:

, .

Если принять при , то после интегрирования получим

 или .

Можно также записать  

Далее  и после интегрирования



или .

Можно также записать 



Если решить квадратное уравнение, то можно найти .

# **Лекция 3**

Краткое содержание: Скорость и ускорение точки в полярных координатах.

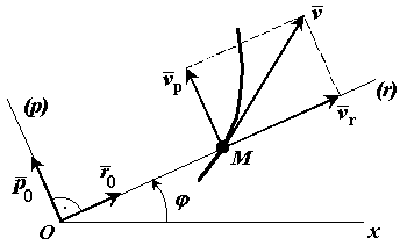
**Скорость и ускорение точки в полярных координатах**

Рассмотрим движение точки в плоскости. В этом случае движение можно задать в полярных координатах. Для этого примем какую-либо точку *О* плоскости за полюс и проведем из нее полярную ось, например ось *Ox*. Положение движущейся точки *М* на плоскости известно, если заданы радиус *r* и полярный угол ** как функции времени, т.е.

 и . (3-1)

Эти уравнения называются ***уравнениями движения точки в полярных координатах***. Если из уравнений (3-1) исключить параметр - время *t*, то получим уравнение траектории в полярных координатах: .

Введем единичный вектор , направленный по радиус-вектору от полюса *О*  к точке *М*. Тогда .

Для скорости  получаем выра-жение

Производная от единичного вектора по времени равна 

(без доказательства)

 - единичный вектор,направление которого получается поворотом вектора  на 900 в положительном направлении угла  .

После этого для скорости  получаем выражение 

Это разложение скорости точки на радиальную  и трансверсальную (поперечную)  составляющие, т.е.

 - радиальная скорость;  - трансверсальная скорость.

Модуль скорости равен .

Определим ускорение точки 

После дифференцирования получаем 

Получили разложение ускорения точки на радиальную **** и трансверсальную (поперечную)  составляющие, т.е.

 - радиальная скорость;

 - трансверсальная скорость.

Модуль ускорения равен .

**Частные случаи:**

1. Если , то имеем прямолинейное движение по прямой ***Or*** .

В этом случае  и

2. Если , то имеем движение по окружности .

В этом случае  и

 - угловая скорость вращения радиус-вектора,  - его угловое ускорение.

# **Лекция 4**

Краткое содержание: Задачи кинематики твердого тела. Виды движения твердого тела. Число степеней свободы твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела.

## **КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Абсолютно твердым телом** называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;
2. определение кинематических характеристик (траектория, скорость и ускорение) движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

1. поступательное движение;
2. вращение вокруг неподвижной оси;
3. плоское движение;
4. вращение вокруг неподвижной точки;
5. свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела:

### Степени свободы твердого тела

Числом степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета.

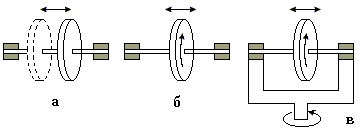
Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.

Рис. 4-1

Рассмотрим пример. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис. а), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы - положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис. б), то он приобретает еще одну [степень свободы](/db/search.html?not_mid=1177773&words=%F1%F2%E5%EF%E5%ED%FC%20%F1%E2%EE%E1%EE%E4%FB) - к координате x добавляется угол поворота  диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис. в), то число степеней свободы становится равным трем – к x и  добавляется угол поворота рамки .

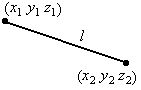
Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы: например декартовы координаты ***x, y*** и ***z***. Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (***r, , z***) и сферической (***r, , ***) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат ***xОy,*** то координаты ***x*** и ***y*** определяют положение точки на плоскости, акоордината  ***z*** тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины ***l.*** Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.

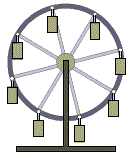
Уравнение  является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют () пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно () шести.

Свободное твёрдое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащие на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

**Поступательное движение твердого тела.**

**Поступательным движением** твёрдого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жёстко скреплённая с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени.

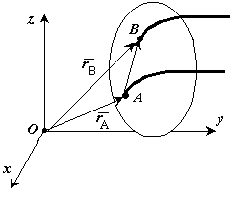
Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках относительно Земли.

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и кривыми, в том числе окружностями.

Рис. 4-2

**Теорема.** При поступательном движении твёрдого тела траектории, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы.

Если выбрать две точки твердого тела А и В, то радиус-векторы этих точек связаны соотношением . Траектория точки А это кривая, которая задается функцией , а траектория точки В это кривая, которая задается функцией . Траектория точки В получается переносом траектории точки А в пространстве вдоль вектора , который не меняет своей величины и направления во времени. Следовательно, траектории всех точек твердого тела одинаковы.

Продифференцируем по времени выражение .

Получаем , так как . Продифференцируем по времени скорости и получим выражение .

Рис. 4-3

Следовательно, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы. Что и требовалось доказать.

Поступательное движение твёрдого тела полностью характеризуется движением одной любой его точки.

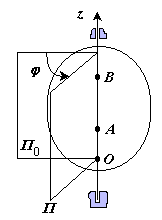
Твёрдое тело при поступательном движении имеет три степени свободы.

Для задания движения твердого тела в декартовой системе координат достаточно знать координаты  любой его точки.

Функции  называются **уравнениями поступательного движения твердого тела**.

**Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси**

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки. Эта прямая называется **осью вращения тела**.

Пусть точки A и B неподвижны. Вдоль оси вращения направим ось . Через ось вращения проведём неподвижную плоскость  и подвижную , скреплённую с вращающимся телом (при  ).

Положение плоскости  и самого тела определяется двугранным углом между плоскостями  и . Обозначим его . Угол  называется **углом поворота тела**.

Положение тела относительно выбранной системы отсчета однозначно определяется в любой момент времени, если задано уравнение , где  - любая дважды дифференцируемая функция времени. Это уравнение называется **уравнением вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси**.

Рис. 4-4

У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра – угла .

Угол  считается положительным, если он откладывается против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном направлении. Траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях перпендикулярных оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси введём понятия угловой скорости и углового ускорения.

**Алгебраической угловой скоростью** тела в какой-либо момент времени называется первая производная по времени от угла поворота в этот момент, то есть .

Угловая скорость является положительной величиной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелке, потому что угол поворота при этом убывает.

Размерность угловой скорости по определению: 

В технике угловая скорость – это частота вращения, выраженная в оборотах в минуту. За одну минуту тело повернётся на угол , где n - число оборотов в минуту. Разделив этот угол на число секунд в минуте, получим



**Алгебраическим угловым ускорением тела** называется первая производная по времени от угловой скорости, то есть вторая производная от угла поворота т.е. 

Размерность углового ускорения по определению: 

Введем понятия векторов угловой скорости и углового ускорения тела.

 и , где  - единичный вектор оси вращения. Векторы  и  можно изображать в любых точках оси вращения, они являются скользящими векторами.

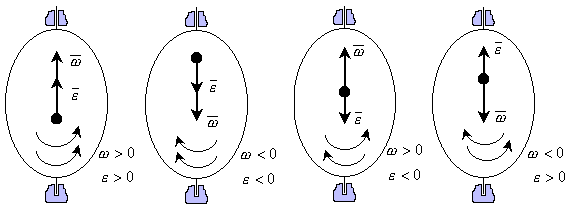
Алгебраическая угловая скорость это проекция вектора угловой скорости на ось вращения. Алгебраическое угловое ускорение это проекция вектора углового ускорения скорости на ось вращения.

Рис. 4-5

Если  при , то алгебраическая угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается ускоренно в рассматриваемый момент времени в положительную сторону. Направление векторов  и  совпадают, оба они направлены в положительную сторону оси вращения .

При  и  тело вращается ускоренно в отрицательную сторону. Направление векторов  и  совпадают, оба они направлены в отрицательную сторону оси вращения .

Если  при , то имеем замедленное вращение в положительную сторону. Векторы  и  направлены в противоположные стороны.

Если  при , то имеем замедленное вращение в отрицательную сторону. Векторы  и  направлены в противоположные стороны.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (если нельзя изобразить вектора). Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела, а дуговая стрелка для углового ускорения – направление, в котором увеличивается алгебраическая угловая скорость. Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного их направления противоположны.

**Частные случаи вращения твердого тела**

##### ***Равномерное вращение***

Вращение называется равномерным, если его угловая скорость постоянна, т.е. .

Так как , то . Начальные условия: , то после интегрирования получим

 или 



##### ***Равнопеременное вращение***

Вращение называется равноускоренным, если его угловое ускорение постоянно и больше нуля, т.е. .

Вращение называется равнозамедленным, если его угловое ускорение постоянно и меньше нуля, т.е. .

Так как , то . Начальные условия: , то после интегрирования получим

 или 



далее ,  и после интегрирования,



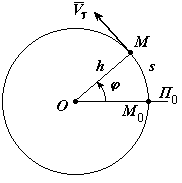
или 

# **Лекция 5**

Краткое содержание: Скорости и ускорения точек тела при вращении. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Сложение скоростей. Сложение ускорений при поступательном движении твердого тела.

**Скорости и ускорения точек тела при вращении.**

Перейдем к изучению движения отдельных точек твердого тела. Известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси ****.

Рассмотрим какою-нибудь точку *М* твердого тела, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения. При вращении твердого тела точка *М* будет описывать окружность радиуса *h,* плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр О лежит на самой оси. Если за время происходит элементарный поворот тела на угол , то точка *М* при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение ****.

Тогда алгебраическая скорость будет равна

**** или **** (5-1)

Рис. 5-1

Скорость точки равна ****. Скорость **** в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще **линейной** или **окружной скоростью**.

Модуль скорости равен

****. (5-2)

Величины скоростей точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость ****. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Ускорение точки раскладываем на касательную и нормальную составляющие, т.е.

****.

Касательное и нормальное ускорения вычисляются по формулам

****, ****.

Таким образом ****, **** и модуль ускорения вычисляется по формуле ****.

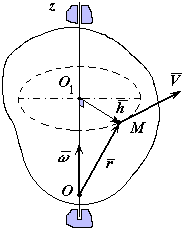
Касательные, нормальные и полные ускорения точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, как и скорости, так же пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака углового ускорения.

**Векторные скорости и ускорения точек тела**

Скорость точки по модулю и направлению можно представить векторным произведением

****, (5-3)

где **** - радиус-вектор точки М, проведенный из произвольной точки оси вращения ****.

Это выражение называется **векторной формулой Эйлера.**

Доказательство. Вектор **** перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы **** и ****, следовательно, по направлению он совпадает со скоростью ****. Модуль векторного произведения **** Таким образом, векторное произведение **** по модулю и направлению определяет скорость точки.

Рис. 5-2

Определим ускорение точки продифференцировав формулу Эйлера.

****, или

****

Первое слагаемое является касательным ускорением, а второе – нормальным.

**** ****.

Сопоставление двух формул для скорости точки (**** и ****) дает формулу для вычисления производной по времени от вектора ****:

****.

В этой формуле вектор **** имеет постоянный модуль, так как соединяет все время две точки твердого тела.

**Сложное движение точки**

**Основные понятия**

Во многих задачах движение точки приходится рассматривать относительно двух (и более) систем отсчета, движущихся друг относительно друга.

В простейшем случае сложное движение точки состоит из **относительного** и **переносного** движений. Определим эти движения.

Рассмотрим две системы отсчета движущиеся друг относительно друга. Одну систему отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1 примем за основную и неподвижную. Вторая система отсчета ***Oxyz*** будет двигаться относительно первой.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета ***Oxyz*** называется **относительным.** Характеристики этого движения, такие как, траектория, скорость и ускорение, называются **относительными.** Их обозначают индексом *r*.

Движение точки относительно основной неподвижной системы отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1называется **абсолютным** (или сложным). Траектория, скорость и ускорение этого движения называются **абсолютными.** Их обозначают без индекса.

**Переносным** движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Вследствие относительного движения движущаяся точка в различные моменты времени совпадает с различными точками тела S, с которым скреплена подвижная система отсчета. **Переносной** скоростью и **переносным** ускорением являются скорость и ускорение той точки тела S, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. **Переносные** скорость и ускорение обозначают индексом  *e*.

Если траектории всех точек тела S, скрепленного с подвижной системой отсчета, изобразить на рисунке, то получим семейство линий – семейство траекторий переносного движения точки М. Вследствие относительного движения точки М в каждый момент времени она находится на одной из траекторий переносного движения.

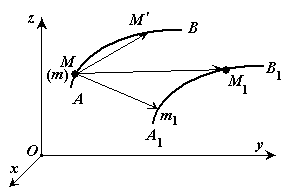
Одно и то же абсолютное движение, выбирая различные подвижные системы отсчета, можно считать состоящим из разных переносных и соответственно относительных движений.

**Пример.**

Имеется круглый диск, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси перпендикулярной плоскости диска. На диске имеется канавка, направленная вдоль радиуса диска. Вдоль канавки перемещается материальная точка. Материальная точка совершает сложное движение. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета является абсолютным. Подвижную систему отсчета жестко свяжем с вращающимся диском, одну из осей (например, x) направим вдоль канавки. Движение точки вдоль оси x будет относительным, движение точки вместе с подвижной системой отсчета (вместе с диском) будет переносным движением.

**Сложение скоростей**

Определим скорость абсолютного движения точки М, если известны скорости абсолютного и переносного движений этой точки.

За малый промежуток времени **** вдоль траектории **** точка М совершит относительное перемещение, определяемое вектором ****. Сама кривая ****, двигаясь вместе с подвижными осями, перейдет за тот же промежуток времени в новое положение **** Одновременно та точка **** кривой ****, с которой совпадала точка М, совершит переносное перемещение ****. В результате точка **** совершит перемещение ****.

****

Деля обе части равенства на **** и переходя к пределу, получим

****

**Сложение ускорений при поступательном переносном движении.**

Определим ускорение абсолютного движения точки в частном случае поступательного переносного движения.

Справедлива теорема ****. Если подвижная система отсчета **** движется поступательно относительно неподвижной ****, то все точки тела, скрепленного с этой системой, имеют одинаковые скорости и ускорения, равные скорости и ускорению начала координат подвижной системы О. Следовательно, для скорости и ускорения переносного движения имеем

****, ****

Выразим относительную скорость в декартовых координатах

****

Подставляя в теорему о сложении скоростей значения переносной и относительной скоростей получаем ****

По определению ****

****, ****, ****.

Следовательно, ****

Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении равно векторной сумме ускорений переносного и относительного движений.

****

# **Лекция 6**

Краткое содержание: Плоское движение твердого тела. Уравнения плоского движения. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Угловая скорость и угловое ускорение при плоском движении. Скорости точек тела при плоском движении. Мгновенный центр скоростей. Методы нахождения положения мгновенного центра скоростей.

**Плоское движение твердого тела**

**Плоским движением** твердого тела называется такое его движение, при котором каждая его точка все время движется в одной и той же плоскости.

Плоскости, в которых движутся отдельные точки тела, параллельны между собой и параллельны одной и той же неподвижной плоскости. Плоское движение твердого тела часто называют плоскопараллельным. Траектории точек тела при плоском движении являются плоскими кривыми.

Плоское движение твердого тела имеет большое значение в технике. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем движения твердого тела.

При изучении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также приемы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

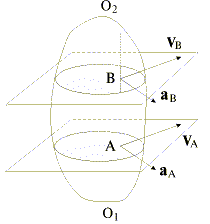
Если в теле провести некоторую прямую О1О2, перпендикулярную плоскостям, в которых происходит движение точек, то все точки этой прямой будут двигаться по одинаковым [траекториям](/db/search.html?not_mid=1176373&words=%D4%D2%C1%C5%CB%D4%CF%D2%C9%D1%CD) с одинаковыми [скоростями](/db/search.html?not_mid=1176373&words=%D3%CB%CF%D2%CF%D3%D4%D1%CD%C9) и [ускорениями](/db/search.html?not_mid=1176373&words=%D5%D3%CB%CF%D2%C5%CE%C9%D1%CD%C9); сама прямая будет, естественно, сохранять свою ориентацию в пространстве. Таким образом, при плоском, движении твердого тела достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела.

Рис. 6-1

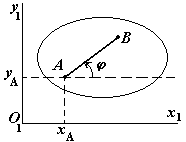
Сечение твердого тела будем называть плоской фигурой. Положение фигуры на ее плоскости полностью определяется положением отрезка прямой линии, жестко скрепленной с этой плоской фигурой.

**Уравнения плоского движения твердого тела**

Для задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат , лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка АВ, скрепленного с фигурой.

Положение отрезка АВ, относительно системы координат определяется заданием координат какой-нибудь точки этого отрезка и его направления. Например, координаты точки А () и направление, заданное углом .

Уравнения движения плоской фигуры относительно системы координат  имеют вид: .

Твердое тело при плоском движении имеет три степени свободы.

Функции



называются **уравнениями плоского движения твердого тела**.

Рис. 6-2

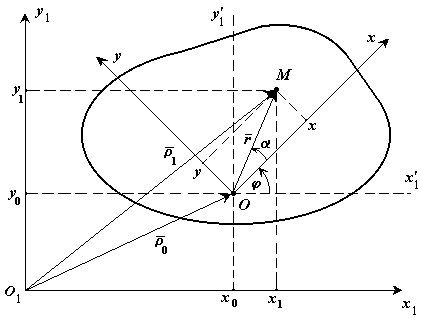
Перейдем к изучению движения отдельной точки твердого тела. Положение любой точки М плоской фигуры относительно подвижной системы отсчета **,** скрепленной с этой движущейся фигурой и лежащей в ее плоскости, полностью определяется заданием координат x и y точки М (Рис.6-3).

Рис. 6-3

Между координатами точки М в различных системах отсчета существует связь:

, (6-1)

где  - длина отрезка ОМ,  - постоянный угол между ОМ и осью . С учетом выражений  и  получаем

, (6-2)

Формулы (6-2) являются уравнениями движения точки М плоской фигуры относительно координат . Эти формулы позволяют определить координаты любой точки плоской фигуры по заданным уравнениям движения этой фигуры и координатам этой точки относительно подвижной системы отсчета, скрепленной с движущейся фигурой.

Используя матрично-векторные обозначения уравнения (6-2) можно записать в такой форме:

, (6-3)

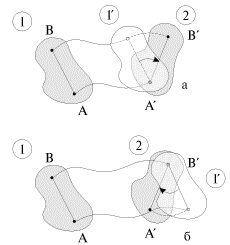
где А – матрица поворота на плоскости:

, , , .

**Разложение плоского движения на поступательное**

**и вращательное движения.**

**Теорема**. Любое движение твердого тела, в том числе и движение плоской фигуры в ее плоскости, бесчисленным множеством способов можно разложить на два движения, одно из которых переносное, а другое – относительное.

В частности, движение плоской фигуры в ее плоскости относительно системы , расположенной в той же плоскости, можно разложить на переносное и относительное движения следующим образом. Примем за переносное движение фигуры ее движение вместе с поступательно движущейся системой координат , начало которой скреплено с точкой О фигуры, принятой за полюс. Тогда относительное движение фигуры будет по отношению к подвижной системе координат  вращением вокруг подвижной оси, перпендикулярной плоской фигуре и проходящей через выбранный полюс.

Для доказательства